TRANSFORMÉES DE FOURIER
Notes pour l'agrégation

P. Haïssinsky*

1 Propriétés élémentaires

On se place sur $\mathbb{R}^N$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x.y$ désignera le produit scalaire de x et y.

Pour $1 \leq p < \infty$, on notera $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\int |u(x)|^p \, dx < \infty$. On notera aussi

$$\|u\|_p := \left(\int |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} ,$$

pour la norme de u dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Sa transformée de Fourier est la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par la formule:*

$$\hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-2i\pi x.y} \, dx \, .$$

On utilisera également la notation $\mathcal{F}u = \hat{u}$.

On remarque que comme $|u(x)e^{-2i\pi x.y}| = |u(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale définissant $\hat{u}$ est bien définie et de plus

$$|\hat{u}(y)| \leq \int |u(x)| \, dx < \infty \, .$$

Exercice 1.2 *Montrez que pour toute fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors $\hat{u}$ est continue.*

*compilé à partir de notes de P. Mathieu

1.2 Transformations simples

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Translations: soit $a \in \mathbb{R}^N$. Notons $\tau_a u$ la fonction $\tau_a u(x) = u(x-a)$. Alors $\tau_a u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et de plus

$$\widehat{\tau_a u}(y) = e^{-2i\pi a.y}\hat{u}(y)\,.$$

Dilatations: soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $\delta_\lambda u$ la fonction $\delta_\lambda u(x) = u(x/\lambda)$. Alors $\delta_\lambda u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et de plus

$$\widehat{\delta_\lambda u}(y) = |\lambda|^N \delta_{1/\lambda}\hat{u}(y)\,.$$

Notez que $\delta_{-1}u(x) = u(-x)$.

Ces deux formules s'obtiennent comme conséquences du comportement de la mesure de Lebesgue par translation et dilatation. Les preuves sont élémentaires.

2 Analyse de Fourier sur l'espace de Schwartz

2.1 Quelques notations

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice de longueur N. On notera alors $|\alpha| = \alpha_1 + ...\alpha_N$, $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_N!$. Par convention, $0! = 1$.

Soit $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. On notera x^α le produit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_N^{\alpha_N}$ et on définit l'opérateur de dérivation partielle: $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_N^{\alpha_N}$ où ∂_j dédigne la dérivée partielle par rapport à la $j$ème coordonnée. Ainsi ∂^α est un opérateur qui opère α_1 dérivées partielles par rapport à x_1 puis α_2 dérivées partielles par rapport à x_2 ... Par convention, on pose $\partial_j^0 = \textit{identité}$.

Avec ces notations, la règle de Leibniz s'écrit:

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\,\partial^\beta u\,\partial^\gamma v\,,$$

où la somme porte sur les couples de multi-indices (β, γ) tels que $\beta_j + \gamma_j = \alpha_j$ pour tout j. Quant à la formule d'intégration par parties, elle devient:

$$\int v(x)\partial^\alpha u(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int u(x)\partial^\alpha v(x)\,dx\,,$$

pour toutes fonctions u et v de classe C^∞ et de supports compacts.

2.2 L'espace de Schwartz

Définition 2.1 *L'espace des fonctions à décroissance rapide ou encore espace de Schwartz est l'ensemble*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\ :\ \forall \alpha\,\beta \in \mathbb{N}^N\,,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty\}\,.$$

Remarquez que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact. Nous utiliserons ce fait pour montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense par exemple dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. (Il faut d'abord vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$).

Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$.

1. Montrez qu'alors $uv \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\partial^\beta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
2. Montrez que $x \to x^\alpha u(x)$ appartient également à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Propriété 2.2 *On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Démonstration. — On écrit que

$$|u(x)|^p = (1 + |x|^2)^{mp} |u(x)|^p (1 + |x|^2)^{-mp},$$

et on remarque que, si $2pm > N$ alors la fonction $(1 + |x|^2)^{-mp}$ est intégrable. De plus, comme $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la fonction $(1 + |x|^2)^{mp} |u(x)|^p$ est bornée. On voit ainsi que $|u(x)|^p$ est intégrable i.e. $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. ■

Propriété 2.3 *Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ telle que $\varphi \geq 0$ et $\int \varphi = 1$. Alors la suite (φ_k) définie par*

$$\varphi_k(x) = k^N \varphi(kx)$$

est une approximation de l'identité.

Propriété 2.4 *Soit $u \in L^1$ telle que*

$$\int uv = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{S}$. Alors $u = 0$ dans L^1.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{S}$ est dense dans les fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini, on a aussi

$$\int uv = 0$$

pour tout v continue à support compact:

$$\left| \int uv \right| = \left| \int u(v - v_n) \right| \leq \|u\|_1 \|v - v_n\|_\infty$$

L'unicité dans le de représentation de Riesz nous affirme que $u = 0$.

Notons $A_\pm = \{|f| = \pm f\}$. On peut approcher $\chi_{A\pm}$ par des fonctions continues en norme....

2.3 Inversion de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$

Théorème 2.5 *(Inversion de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$.)*
Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \; : \; & \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \\ & u \to \hat{u} \end{aligned}$$

est une bijection linéaire telle que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \delta_{-1}$.

La preuve utilise différents éléments qui ont leur propre intérêt. Nous la donnons ci-dessous en plusieurs paragraphes.

2.3.1 Transformée de Fourier et dérivations

Propriété 2.6 *Soient $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Alors $\hat{u}$ est de classe $C^{|\alpha|}$ et on a*
a) $\widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(x) = \partial^\alpha \hat{u}(x)$,
b) $\widehat{\partial^\alpha u}(y) = (2i\pi y)^\alpha \hat{u}(y)$.

Démonstration. — Commencez par remarquer que les dérivées partielles de la fonction $x \to e^{-2i\pi x.y}$ sont données par la formule $\partial^\alpha(e^{-2i\pi x.y}) = (-2i\pi y)^\alpha e^{-2i\pi x.y}$.

Pour le a), on écrit que

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \hat{u}(x) &= \partial^\alpha \int e^{-2i\pi x.y} u(y)\, dy \\
&= \int (-2i\pi y)^\alpha e^{-2i\pi x.y} u(y)\, dy \\
&= \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}(x)\,.
\end{aligned}$$

La dérivation sous le signe $\int$ ne pose pas de problème car la fonction $y \to (-2i\pi y)^\alpha e^{-2i\pi x.y} u(y)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et donc à $L^1(\mathbb{R}^N)$.

On prouve b) par intégration par parties:

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha u}(y) &= \int e^{-2i\pi x.y} \partial^\alpha u(x)\, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int (-2i\pi y)^\alpha e^{-2i\pi x.y} u(x)\, dx \\
&= (2i\pi y)^\alpha \hat{u}(y)\,.
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Transformée de Fourier de la gaussienne

Lemme 2.7 *La fonction $w : x \to e^{-\pi|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et satisfait $\hat{w} = w$.*

Démonstration. — Soit α un multi-indice tel que $|\alpha| = 1$. On a $\partial^\alpha w(x) = -2\pi x^\alpha w(x)$. En prenant la transformée de Fourier de cette égalité et d'après la proposition précédente, on voit que cela implique que $(2\pi y^\alpha)\hat{w}(y) = -\partial^\alpha \hat{w}(y)$. On en déduit que

$$\partial^\alpha \frac{\hat{w}}{w}(y) = \frac{1}{w^2(y)}(w(y)\partial^\alpha \hat{w}(y) - \hat{w}(y)\partial^\alpha w(y)) = 0\,.$$

On résoud cette équation différentielle: il existe une constante c telle que $w(y) = c\hat{w}(y)$. On trouve la valeur de c en écrivant que $c = \frac{\hat{w}(0)}{w(0)} = \int e^{-\pi|x|^2}\, dx = 1$.

En effet, on rappelle que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2}\, dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\, e^{-\pi x^2 - \pi y^2} \\
&= \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\pi r^2} \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2\pi} e^{-\pi r^2}\right]_0^\infty = 1\,,
\end{aligned}$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2}\, dx = 1$.) ■

2.3.3 Fin de la preuve du théorème d'inversion

Montrons que, si $u \in \mathcal{S}$ alors $\hat{u} \in \mathcal{S}$: soient α et β deux multi-indices. On a alors

$$(2i\pi y)^\alpha \partial^\beta \hat{u}(y) = (2i\pi y)^\alpha \widehat{(-2i\pi y)^\beta} u(y) = \widehat{\partial^\alpha v}(y)\,,$$

où $v(x) = (-2i\pi x)^\beta u(x)$. La fonction v appartient à $\mathcal{S}$, donc $\partial^\alpha v \in L^1$ et donc $\widehat{\partial^\alpha v}$ est bornée. On a donc montré que la fonction $y \to (2i\pi y)^\alpha \partial^\beta \hat{u}(y)$ est bornée pour tous multi-indices α et β i.e. $\hat{u} \in \mathcal{S}$.

Pour terminer la preuve de la formule d'inversion $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \delta_{-1}$, on commence par le

Lemme 2.8 *(Relation de dualité)*
Soient u, $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$\int v(x)\hat{u}(x)\,dx = \int u(x)\hat{v}(x)\,dx\,.$$

Démonstration. — Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int\int |v(x)u(y)e^{-2i\pi xy}|dydx = \left(\int |v(x)|dx\right)\cdot\left(\int |u(y)|dy\right) < \infty\,.$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int v(x)\hat{u}(x)\,dx &= \int v(x)\left(\int u(y)e^{-2i\pi xy}dy\right)dx\\ &= \int u(y)\left(\int v(x)e^{-2i\pi xy}dx\right)dy\\ &= \int u(x)\hat{v}(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

■

Posons $w_t(x) = e^{-\pi t^2|x|^2}$. De l'invariance de la gaussienne par Fourier et des formules de dilatations, il découle que $\hat{w}_t(y) = t^{-N}e^{-\pi t^{-2}|x|^2}$. On a

$$\begin{aligned}&\int \hat{u}(y)w_t(y)e^{-2i\pi x.y}\,dy = \int \widehat{\tau_x u}(y)w_t(y)\,dy = \int \tau_x u(y)\hat{w}_t(y)\,dy\\ =\; &\int u(y-x)t^{-N}e^{-\pi t^{-2}|y|^2}\,dy = \int u(ty-x)e^{-\pi|y|^2}\,dy\,.\end{aligned}$$

D'une part, comme $\hat{u} \in \mathcal{S}$, il est facile d'utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que

$$\int \hat{u}(y)w_t(y)e^{-2i\pi x.y}\,dy \to_{t\to 0} \int \hat{u}(y)e^{-2i\pi x.y}\,dy = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}(u)(x)\,.$$

Par ailleurs,

$$|u(ty-x)e^{-\pi|y|^2}| \le \|u\|_\infty e^{-\pi|y|^2} \in L^1$$

donc il est possible d'appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que

$$\int u(ty-x)e^{-\pi|y|^2}\,dy \to_{t\to 0} \int u(-x)e^{-\pi|y|^2}\,dy = u(-x)\,.$$

En conclusion, nous avons montré que $\mathcal{F}\circ\mathcal{F}(u)(x) = u(-x) = \delta_{-1}u(x)$. ■

2.4 Transformées de Fourier et convolutions

Définition 2.9 *Soient $u,\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \to u(x-y)v(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$. On pose*

$$u \star v(x) := \int u(x-y)v(y)\,dy\,,$$

et on appelle $u \star v$ la <u>convolée</u> des fonctions u et v.

Propriété 2.10 *Soient $u,\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous avons*
a) $\hat{u} \star \hat{v} = \widehat{uv}$,
b) $u \star v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,
c) $\widehat{u \star v} = \hat{u}\hat{v}$,
d) $\int |u(x)|^2\,dx = \int |\hat{u}(x)|^2\,dx$ (Egalité de Plancherel).

Démonstration. — Nous utilisons la relation de dualité puis la formule d'inversion de Fourier pour avoir

$$\hat{u} \star \hat{v}(x) = \int \hat{u}(x+y)\hat{v}(-y)\,dy = \int \tau_{-x}\hat{u}(y)\hat{v}(-y)\,dy = \int e^{2i\pi x.y}\hat{\hat{u}}(y)v(-y)\,dy$$
$$= \int e^{2i\pi x.y}u(-y)v(-y)\,dy = \int e^{-2i\pi x.y}u(y)v(y)\,dy = \widehat{uv}(x)\,,$$

ce qui prouve a).

Preuve de b) et c): $\mathcal{F}$ étant bijective sur $\mathcal{S}$, il existe $f, g \in \mathcal{S}$ telles que $\hat{f} = u$ et $\hat{g} = v$. On a alors $u \star v = \hat{f} \star \hat{g} = \widehat{fg}$. Mais $fg \in \mathcal{S}$ et donc $\widehat{fg} \in \mathcal{S}$. De plus, en prenant la transformée de Fourier de cette égalité et en appliquant la formule d'inversion, on trouve que $\widehat{u \star v} = \widehat{\widehat{fg}} = \delta_{-1}(fg)$. Or $\delta_{-1}f = \hat{\hat{f}} = \hat{u}$ et $\delta_{-1}g = \hat{v}$. D'où finalement la formule $\widehat{u \star v} = \hat{u}\hat{v}$.

Prouvons enfin d):

$$\int |\hat{u}(x)|^2\,dx = \int \hat{u}(x)\overline{\hat{u}}(x)\,dx = \int \hat{u}(x)\hat{\bar{u}}(-x)\,dx$$
$$= \int \hat{\hat{u}}(x)\bar{u}(-x)\,dx = \int u(-x)\bar{u}(-x)\,dx = \int |u(x)|^2\,.$$

(Nous avons utilisé les formules de dualité et d'inversion et la formule $\bar{\hat{u}}(x) = \hat{\bar{u}}(-x)$.) ■

3 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$

3.1 Théorème de Riemann-Lebesgue

Exercice 3.1 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Montrez que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \hat{u}(x) = 0\,.$$

(Indication: approchez u par une suite de fonctions dans $\mathcal{S}$.)

3.2 Formule sommatoire de Poisson

Etant donnée une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on souhaite lui associer la fonction périodique donnée par la série formelle

$$v(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(t-k)\,,$$

où $t \in \mathbb{R}$. Nous commencerons par vérifier que cette série converge (en précisant en quel sens). Puis nous calculerons les coefficients de Fourier de la limite.

Lemme 3.2 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$. La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k u$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$.*

Démonstration. — On observe que

$$\sum_k \int_{\mathbb{T}} |u(t-k)|\,dt = \sum_k \int_{-k-\frac{1}{2}}^{-k+\frac{1}{2}} |u(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|\,dt < \infty\,.$$

Donc la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k u$ est absolument convergente et admet une limite dans $L^1(\mathbb{T})$. (Rappel: dans un espace de Banach, les séries absolument convergentes convergent au sens de la norme.)
■

Dorénavant, on pose

$$v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k u\,.$$

Le lemme précédent nous assure que $v \in L^1(\mathbb{T})$.

Utilisez le théorème de Fubini pour montrer que les coefficients de Fourier satisfont:

$$\hat{v}(k) = \hat{u}(k)\,.$$

(Faites attention: $\hat{v}(k)$ est le k-ième coefficient de Fourier d'une fonction définie sur $\mathbb{T}$ alors que $\hat{u}(k)$ est la valeur de la transformée de Fourier de u en k.)

Théorème 3.3 *(Formule sommatoire de Poisson)*
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable telle que

$$|u(x)| \leq c(1+|x|)^{-2}\,,\ |\hat{u}(x)| \leq c(1+|x|)^{-2}\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. (c désigne une constante.) Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2i\pi kx}\,,$$

les séries convergeant absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Montrez que la série $\sum_k \tau_k u$ converge absolument sur $[-r, r]$ pour tout r et que sa limite est continue et périodique. Utilisez la formule d'inversion des séries de Fourier pour démontrer la formule du théorème. ■
Applications.

1. Identité de Jacobi.

   On choisit $u(x) = e^{-tx^2}$. De la formule sommatoire de Poisson, on déduit que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4t\pi^2k^2} = (4\pi t)^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-k^2/4t}\,,$$

   pour tout $t > 0$. (Vérifiez le calcul.)

2. Calculez la transformée de Fourier de la fonction $u_t(x) = e^{-2\pi t|x|}$, $t > 0$. (Justifiez les calculs). En déduire que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2+t^2} = \frac{\pi}{t}\frac{1+e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}\,.$$

4 L'algèbre de Wiener

Définition 4.1 *On appelle algèbre de Wiener l'ensemble de fonctions*

$$\mathcal{A} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) \,:\, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)\}\,.$$

Exercice 4.2 *(i) Etendre la formule de dualité en montrant que*

$$\int v\hat{u} = \int u\hat{v}\,,$$

pour $v \in L^1$ et $u \in L^1$.
(ii) En déduire que $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et étendre la formule d'inversion à $\mathcal{A}$ i.e. montrer que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u) = \delta_{-1}u$ presque partout pour toute fonction $u \in \mathcal{A}$.

Voici quelques propriétés des fonctions de $\mathcal{A}$:

a) Soit $f \in \mathcal{A}$. Alors f est continue, tend vers 0 à l'infini et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \le p \le \infty$.
En effet, par le résultat d'inversion, f est la transformée de Fourier de $g \in \mathcal{A}$. Donc f est continue et tend vers 0 à l'infini. En particulier f est bornée. Comme par ailleurs $f \in L^1$, on voit que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

b) Si $f, g \in \mathcal{A}$ alors $fg \in \mathcal{A}$ et $f \star g \in \mathcal{A}$. (Démontrez-le.)

5 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

5.1 Construction

Comme $L^2(\mathbb{R}^N) \not\subset L^1(\mathbb{R}^N)$, il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ par une formule intégrale. Nous procédons par densité:
l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et l'application

$$\mathcal{F} \;:\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$u \to \hat{u}$$

vérifie $\|\mathcal{F}(u)\|_2 = \|u\|_2$ par l'égalité de Plancherel. En particulier, l'application $\mathcal{F}$ est continue pour les normes L^2. Comme elle est aussi linéaire, on conclut qu'il existe un unique prolongement continu de $\mathcal{F}$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ et à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous notons temporairement $\tilde{\mathcal{F}}$ ce prolongement. $\tilde{\mathcal{F}}$ est une application linéaire continue. En fait l'égalité de Plancherel se prolonge par continuité (La norme est continue sur tout est de Banach.) et donc on a $\|\tilde{\mathcal{F}}(u)\|_2 = \|u\|_2$ pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ i.e. $\tilde{\mathcal{F}}$ est une isométrie.

Nous avons ainsi donné un sens à la transformée de Fourier de toute fonction de L^2. Remarquez tout de même que, par construction, $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ n'est pas une fonction mais plutôt une classe de fonction dans L^2. En particulier cela n'a pas de sens de parler de la valeur de $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ en un point donné: $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ n'est défini qu'à ensembles de mesure nulle près.

Finalement la relation de dualité

$$\int u\mathcal{F}(v) = \int v\mathcal{F}(u)\,,$$

que nous avons déja vue si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ reste vraie par continuité pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\tilde{\mathcal{F}}$.

Il y a une dernière vérification à faire: soit $u \in L^1 \cap L^2$. Nous avons défini la transformée de Fourier de u par deux méthodes différentes: premièrement par la formule intégrale $\hat{u}(y) = \int u(x)\exp(-2i\pi x.y)dy$ (Notez que cela définit $\hat{u}(y)$ pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}^N$.) et d'autre part via l'extension L^2. Il nous faut montrer que ces deux définitions coincident:

Lemme 5.1 *Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $\mathcal{F}(u) = \tilde{\mathcal{F}}(u)$ presque partout.*

Démonstration. — Par construction $\mathcal{F}(v) = \tilde{\mathcal{F}}(v)$ pour toute fonction $v \in \mathcal{S}$. Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ et considérons une suite (u_n) de $\mathcal{S}$ qui converge vers u dans L^2 et L^1. Par conséquent, $\tilde{\mathcal{F}}(u_n)$ converge vers $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ dans L^2 et vers $\mathcal{F}(u)$ dans L^1. Or, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\tilde{\mathcal{F}}(u_n)$ converge vers $\tilde{\mathcal{F}}(u)$ presque partout; par ailleurs, la convergence ayant aussi lieu dans L^1, on a aussi $\mathcal{F}(u_n)$ qui tend $\mathcal{F}(u)$ presque partout. ■

Puisque les deux constructions de la transformée de Fourier coincident, il n'y a aucune incohérence à utiliser les mêmes notations pour $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$.

Résumons:

Définition 5.2 *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Nous noterons $\mathcal{F}(u)$ ou $\hat{u}$ sa tranformée de Fourier obtenue par prolongement de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

La proposition suivante étend à L^2 des propriétés déja vues sur $\mathcal{S}$:

Propriété 5.3 *Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors*
a) $\|\mathcal{F}(u)\|_2 = \|u\|_2$ (Egalité de Plancherel),
b) $\int u\mathcal{F}(v) = \int v\mathcal{F}(u)$ (Relation de dualité),
c) $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u) = \delta_{-1}(u)$ (Formule d'inversion).

5.2 Le sinus-cardinal

Montrez par un calcul direct que la transformée de Fourier de l'indicatrice de l'intervalle $\mathbf{I} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est la fonction sinus cardinal définie par

$$sinc(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}\,.$$

(Avec la convention $sinc(0) = 1$.)

Observez que $\mathbf{1_I}$ appartient à $L^1 \cap L^2$ et que $sinc \in L^2 \setminus L^1$. On aura alors

$$\widehat{sinc} = \mathbf{1_I}\,,$$

et l'égalité de Plancherel montre que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}\, dx = 1\,.$$

5.3 Espace BL^2

Nous allons nous intéresser aux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier s'annulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$. Par dilatation, on se ramène au cas où $[a, b] = \mathbf{I}$.

Posons

$$BL^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}); \hat{u}(y) = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus \mathbf{I}\}\,.$$

On munit BL^2 est muni du produit scalaire $(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u\bar{v}$.

Propriété 5.4 *BL^2 est complet.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que BL^2 est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$. Or si (u_n) est une suite dans BL^2 qui converge (au sens L^2) vers $u \in L^2(\mathbb{R})$ alors, par continuité de la tranformée de Fourier, on aura $\hat{u}_n \to \hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Mais alors $\hat{u}_n \to \hat{u}$ dans $L^2(\mathbb{R} \setminus \mathbf{I})$ et comme $\hat{u}_n = 0$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{I}$, on a donc $\hat{u} = 0$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{I}$, donc $u \in BL^2$. ■

Montrez que si $u \in BL^2$ alors u est continue et satisfait $\lim_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0$ et

$$|u(x)| \leq \|u\|_2\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Indications: pour cette dernière égalité, remarquez que $u = \delta_{-1} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(u)$, puis utilisez l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbf{I}$ et l'égalité de Plancherel.)

Propriété 5.5 *La suite $(\tau_k sinc\,,\, k \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de BL^2.*

Démonstration. — Rappelons que la famille $(e_k(t) := e^{2i\pi kt})$ est une base de $L^2(\mathbf{I})$ et remarquez que $(\tau_k sinc = \hat{e}_k)$ est simplement obtenue par transformée de Fourier. ■

Théorème 5.6 *(Théorème d'échantillonage)*
L'application

$$U \ : \ BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$u \to (u(k)\,,\, k \in \mathbb{Z})$$

est unitaire et, pour tout $u \in BL^2$,

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k) sinc(x-k)\,,$$

la série convergeant uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. — On écrit la décomposition de u sur la base $(\tau_k sinc)$:

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \tau_k sinc\,,$$

où $a_k = \int u\overline{\tau_k sinc}$. Comme $|u(x)| \le \|u\|_2$ et que u est continue, la convergence est en fait uniforme. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k sinc(x-k)\,.$$

En faisant $x = k \in \mathbb{Z}$, on trouve que $a_k = u(k)$, ce qui achève la preuve. ∎

6 Transformées de Fourier et fonctions entières.

Théorème 6.1 *Soit* $u \in L^1(\mathbb{R})$ *à support compact. Si il existe un ouvert non vide* A *tel que* $\hat{u}$ *est nulle en tout point de* A *alors* u *est la fonction identiquement nulle.*

Démonstration. — Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, on notera $tz = tx + ity$.
Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, on définit la fonction $\Phi_u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi_u(z) = \int u(t)e^{-2i\pi tz}dt\,.$$

Notez que Φ_u coincide avec la transformée de Fourier pour z réel.

Exercice 6.2 *Montrez que* Φ_u *est une fonction entière. En déduire le theorème.*

Le théorème de Paley-Wiener

Exercice 6.3 *Soient* u *de classe* C^∞ *nulle en dehors de la boule de rayon* R *et* Φ_u *comme ci-dessus. Montrez que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe une constante* γ_n *telle que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a*

$$|\Phi_u(z)| \le \gamma_n(1+|z|)^{-n}e^{2\pi R|y|}\,, \tag{6.1}$$

où y *désigne la partie imaginaire de* z.

Théorème 6.4 *Soit Φ une fonction entière satisfaisant l'inégalité (6.1). Alors il existe une fonction u définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et à support dans la boule de rayon R telle que $\Phi = \Phi_u$.*

Exercice 6.5 *La fonction u est-elle unique?*

Preuve du théorème:
1. On pose $f(x) = \Phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que f est intégrable.
On pose $u(t) = \int f(x) e^{2i\pi tx} dx$.
2. Montrez que u est de classe C^∞.
3. Montrez que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale

$$\int \Phi(x+iy) e^{2i\pi t(x+iy)} dx$$

ne dépend pas de y. Utilisez maintenant l'inégalité (6.1) pour en déduire que $u(t) = 0$ pour $|t| > R$. On pourra prendre $y = t/|t|$.
4. Montrez que $\Phi_u = \Phi$.

∎