SÉRIES DE FOURIER

Peter Haïssinsky

12 janvier 2012

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une application, on dit que T est une période si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x+T)=f(x)$. On vérifie aisément que l'ensemble des périodes de f forment un groupe G_f appelé le groupe de période. Comme sous-groupe de $\mathbb{R}$, il peut être dense (si par exemple f est constante, ou si f est la fonction indicatrice des rationnels) ou monogène (si f est continue). Dans ce dernier cas, le générateur positif de f est la période de f. On dit que f est périodique si son groupe des périodes est non trivial.

On dira qu'une classe de fonctions à ensemble de mesure nulle près est périodique si elle contient un représentant périodique.

Dans la suite, on supposera toujours que 1 est une période de f, cas auquel on peut toujours se ramener en considérant $x\mapsto f(Tx)$ où $T\in G_f$ est non nul.

On notera $\mathbb{T}$ le groupe additif $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identifé à l'intervalle fondamental

$$I=]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\,.$$

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned}
L^p(\mathbb{T}) &:= \{u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,:\, u|_I\in L^p(I)\,et\,u\,est\,1-périodique\}\,,\\
C(\mathbb{T}) &:= \{u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,:\, u\,est\,continue\,et\,u\,est\,1-périodique\}\,,\\
C^k(\mathbb{T}) &:= \{u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\,:\, u\in C^k(\mathbb{R})\,et\,u\,est\,1-périodique\}\,.
\end{aligned}$$

Pour une fonction $u\in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale est

$$\int_{\mathbb{T}} u(t)\,dt=\int_I u(t)\,dt\,.$$

Comme $\mathbb{T}$ est compact, les fonctions de $C(\mathbb{T})$ sont bornées et on a les inclusions $L^\infty(\mathbb{T})\subset L^p(\mathbb{T})\subset L^q(\mathbb{T})\subset L^1(\mathbb{T})$ pour $p\ge q\ge 1$. On note $\|u\|_\infty=\sup_{x\in I}|u(x)|$. On admet que $C(\mathbb{T})$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p\ge 1$.

La transformée de Fourier d'une fonction $f\in L^1(\mathbb{T})$ est la suite indexée par $\mathbb{Z}$ définie par

$$\hat{f}(k)=c_n(f):=\int_{\mathbb{T}} f(t)\,e^{-2i\pi kt}\,dt\,.$$

Remarquez que $|f(t)\, e^{-2i\pi kt}| = |f(t)|$ étant intégrable par hypothèse, $\hat{f}(k)$ est bien donné par une intégrale convergente. De plus on a l'inégalité:

$$|\hat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt < \infty$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

La série de Fourier est l'expression formelle

$$S(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}$$

et ses sommes partielles

$$S_n(f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}$$

sont aussi appelées les sommes de Dirichlet.

Il existe plusieurs théories des séries de Fourier : une théorie de nature intégrable (L^1 et L^2 essentiellement), et une théorie ponctuelle. Dans tous ces cas, on s'intéresse à la convergence de la série et à quand elle s'identifie à la fonction.

Point de vue L^2. La théorie L^2 est la plus "jolie", et repose sur le théorème suivant:

Théorème 1 *La suite de fonctions $(e_k(t) := e^{2i\pi kt})$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

Rappelons que cela signifie que cette famille est orthonormée pour le produit scalaire $(u, v) \to \int_{\mathbb{T}} u(t)\bar{v}(t)\, dt$ et qu'elle est totale.

Il est immédiat de vérifier que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} e_k(t)\bar{e}_j(t)\, dt = \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi(k-j)t}\, dt &= 0 \, si \, k \neq j \\ &= 1 \, si \, k = j \, . \end{aligned}$$

La famille $(e_k(t) := e^{2i\pi kt})$ est donc orthonormée et $\hat{f}(k) = (f, e_k)$..

Nous résumons dans l'énoncé ci-dessous des conséquences du fait que la suite (e_k) soit une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$:

Corollaire 2 *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{T})$, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{|k| \leq n} \hat{u}(k) e^{2i\pi kt} - u(t) \right|^2 dt = 0 \, .$$

De plus, la transformation de Fourier

$$f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(k))_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

est une isométrie hilbertienne. En conséquence, pour toutes fonctions $u, v \in L^2(\mathbb{T})$ on a:

a) Egalité de Parseval :

$$\int_{\mathbb{T}} |u(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(k)|^2$$

b)

$$\int_{\mathbb{T}} u(t)\bar{v}(t)\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)\overline{\hat{v}(k)}.$$

A priori, cela signifie que si $u \in L^2(\mathbb{T})$, alors u est limite presque partout d'une *sous-suite* de $(S_n u)$. En fait, L. Carleson a montré dans un travail publié en 1966 que toute la suite $(S_n u)$ tendait vers u presque partout.

Point de vue L^1. Le résultat le plus général est le suivant:

Théorème 3 *La transformation de Fourier $f \in L^1(\mathbb{T}) \mapsto (c_n(f))$ est une application linéaire continue injective non surjective de $L^1(\mathbb{T})$ dans l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini munie de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Théorie ponctuelle. On s'intéresse à savoir quand est-ce que l'on a l'égalité ponctuelle $f(x) = S(f)(x)$ pour f continue, principal intérêt des séries de Fourier. Une fonction continue est de carré intégrable, donc on sait que l'on a $S(f) = f$ pp. Cependant, les choses se compliquent !

Le premier résultat est négatif :

Théorème 4 *Il existe un G_δ dense Ω de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $\{x \in \mathbb{T},\ \sup |S_n(f)(x)| = \infty\}$ soit un G_δ dense de $\mathbb{T}$ pour tout $f \in \Omega$.*

Cependant, si on rajoute des propriétés à f, on peut conclure de manière plus satisfaisante :

Théorème 5 (Théorème d'inversion) *Soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ une fonction continue périodique. Supposons que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(k)| < \infty$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2i\pi kt}\,, \tag{1}$$

cette série convergeant absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

De là, nous pouvons conclure à la convergence dès que f est suffisamment régulière.

1 Approximations de l'identité

Notre point de départ sera la notion fondamentale suivante.

Définition 1.1 *Une* <u>*approximation de l'identité*</u> *est une suite de fonctions continues* (p_n) *définies sur* $\mathbb{T}$ *telles que:*
(i) $\int_{\mathbb{T}} p_n(t)\,dt = 1$,
(ii) $\sup_n \int_{\mathbb{T}} |p_n(t)|\,dt < \infty$,
(iii) pour tout $\delta > 0$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} |p_n(t)|\,dt = 0$.

Son intérêt réside dans le théorème suivant.

Théorème 1.2 *Soit* (p_n) *une approximation de l'identité.*
a) Soit $p \geq 1$. *Pour toute fonction* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *la suite* $f \star p_n$ *converge vers* f *dans* $L^p(\mathbb{T})$.
b) Soit $f \in C(\mathbb{T})$. *Alors la suite* $f \star p_n$ *converge uniformément dans* $\mathbb{T}$ *vers* f.

Il existe de nombreuses approximations de l'identité. Parmis celles qui nous intéressent, notons les noyau de Poisson et de Fejér.

Lemme 1.3 *Pour* $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, *et* $h \in \mathbb{R}$, *notons*

$$w_p(f,h) = \int_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|^p dx\,.$$

On a

$$\lim_{h\to 0} w_p(f,h) = 0\,.$$

DÉMONSTRATION. Si f est continue, alors f est uniformément continue car $\mathbb{T}$ est compact, donc

$$w_p(f,h) = \int_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$$

quand h tend vers 0. Si f est seulement L^p-intégrable, on l'approche par une fonction continue g, et on obtient par l'inégalité de Minkowski

$$w_p(f,h)^{1/p} \leq w_p(f-g,h)^{1/p} + w_p(g,h)^{1/p} \leq 2\|f-g\|_p + w_p(g,h)^{1/p}$$

et le lemme suit. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2. a) On se fixe n et $\delta \in]0, 1/3]$.

Alors, en utilisant (i) deux fois et l'inégalité de Hölder, avec $(1/p) + (1/q) = 1$ (en faisant attention au cas $p = 1$),

$$\begin{aligned}
|f \star p_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{T}} p_n(y)(f(x-y) - f(x))dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)|^{1/q}(|p_n(y)|^{1/p} \cdot |f(x-y) - f(x)|)dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |p_n(y)|dy\right)^{1/q} \cdot \left(\int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)|^p)dy\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)|^p)dy\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On élève cette inégalité à la puissance p et on intègre par rapport à x, et on utilise le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |f \star p_n(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)|^p) dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)|^p) dx \right) dy \\
&= \int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \\
&\quad + \int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \,.
\end{aligned}$$

Or, le Lemme 1.3 et (ii) implique

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} \cdot |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy &= \int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)| w_p(f, -y) dx \\
&\leq \sup_{|y|\leq\delta} w_p(f,y) \sup_n \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| dy
\end{aligned}$$

tend vers 0 avec δ (indépendemment de n). D'autre part,

$$\int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \leq 2\|f\|_p^p \int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| dy$$

qui tend vers 0 avec n d'après (iii).

b) Si f est continue, alors, en utilisant le même type d'argument, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
|f \star p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} p_n(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&= \int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\quad + \int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| dy \\
&\quad + \sup_{x,|y|\leq\delta} |f(x) - f(x-y)| \sup_n \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| dy
\end{aligned}$$

Cette estimation ne dépend pas de x :

$$\|f \star p_n - f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)| dy + \sup_{x,|y|\leq\delta} |f(x) - f(x-y)| \sup_n \int_{\mathbb{T}} |p_n(y)| dy \,.$$

On choisit d'abord δ en fonction de la continuité uniforme de f, puis n assez grand, pour montrer la convergence uniforme. ∎

1.1 Le noyau de Dirichlet

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On remarque que

$$(f \star e_k)(t) = \hat{f}(k) e_k(t)\,.$$

On définit les sommes de Dirichlet:

$$S_n(f) := f \star \sum_{k=-n}^{n} e_k\,.$$

Par linéarité de la convolution, on a $S_n(f) = f \star D_n$ où $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ est le noyau de Dirichlet.

Remarquez qu'inverser la transformée de Fourier revient à montrer que $S_n(f)$ converge vers f.

Exercice 1.4 *Donnez une autre expression du noyau de Dirichlet en calculant explicitement la somme* $\sum_{k=-n}^{n} e_k$*.*

On trouve

$$D_n(t) = \frac{\sin 2\pi(n+1/2)t}{\sin \pi t}\,.$$

L'application $f \mapsto S_n(f)$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{T})$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$ de norme $\|D_n\|_1$ (prendre la fonction $f = sg(D_n)$ dans le cas L^1, et une approximation continue de f dans le cas continue).

Or

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{|\sin 2\pi(n+1/2)t|}{t} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi(n+1/2)} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

qui tend vers l'infini avec n.

1.2 Le noyau de Fejér

Le noyau de Fejér K_n est la moyenne de Césaro du noyau de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k\,.$$

On note alors

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)\,,$$

les sommes de Fejér d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$. On peut également écrire $\sigma_n(f)$ comme convolution: $\sigma_n(f) = f \star K_n$.

On a le

Théorème 1.5 (théorème de Fejér)
Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Les sommes de Fejér convergent uniformément sur $\mathbb{T}$ vers f.
Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, alors les sommes de Fejér convergent vers f dans $L^p(\mathbb{T})$.

Exercice 1.6 *Trouvez une expression plus explicite de K_n. En déduire que (K_n) est une approximation de l'identité puis le théorème de Fejér.*

Le théorème de Fejér admet plusieurs conséquences importantes:

Proposition 1.7 *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C(\mathbb{T})$ et $L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$.*

Démonstration. On remarque que $\sigma_n(f)$ est un polynôme trigonométrique. ■

Proposition 1.8 (théorème d'unicité)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k. Alors $f = 0$.

Démonstration. Il suffit de dire que si $\hat{f}(k) = 0$ pour tout k alors $\sigma_n(f)(t) = 0$ pour tout t et comme f est la limite L^1 de $\sigma_n(f)$, on a donc $f = 0$. ■

On en déduit le Théorème 1.

Démonstration du Théorème 1. Soit H la fermeture dans $L^2(\mathbb{T})$ de l'espace engendré par les $(e_k)_k$. Pour montrer que $(e_k)_k$ est une base hilbertienne, il suffit de montrer que $H^\perp$ est triviale : soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $(f, e_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ceci implique, par définition des coefficients de Fourier, que $\hat{f}(k) = 0$, donc $f = 0$ car $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Proposition 1.9 (lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $\hat{f}(k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration. On remarque que $\hat{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$. Donc $\widehat{\sigma_n(f)}(k) = 0$ si $n < |k|$. Par ailleurs

$$|\hat{f}(k) - \sigma_n(f)(k)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t) - \sigma_n(f)(t)|\, dt \to 0\,,$$

quand n tend vers ∞. On peut conclure. ■

Démonstration du Théorème 3. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, la transformée de Fourier est bien linéaire continue à valeurs dans c_0. L'injectivité découle du théorème d'unicité.

Pour voir la non-surjectivité, on procède par contradiction : si c'était le cas, le théorème de l'application ouverte impliquerait l'existence de $\delta > 0$ telle que

$$\|\hat{f}\|_\infty \geq \delta \|f\|_1$$

pour toute $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Or, $\|D_n\|_1$ tend vers l'infini bien que $\|\hat{D}_n\|_\infty = 1$. Pour une démonstration plus élémentaire, voir l'Exercice 2.4. ■

On termine par le Théorème 5.

Démonstration du Théorème 5. Puisque $(\hat{f}(n))_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la série de fonctions de terme général

$$x \mapsto \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$$

est normalement convergente dans $C(\mathbb{T})$. Par suite, elle définit une fonction continue

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}.$$

Puisque, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\sum_{|n|\le k} \hat{f}(n)e^{2i\pi(n-m)x}\right| \le \sum_{|n|\le k} |\hat{f}(n)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty,$$

le théorème de convergence dominée implique que $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ pour tout n. D'après le Théorème 3, on a donc $f = g$ dans L^1. Comme ces deux fonctions sont continues, on a égalité en tout point. ■

1.3 Le noyau de Poisson

Le noyau de Poisson est défini par

$$P_r(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{2i\pi kt},$$

pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{T}$.

Exercice 1.10 *En quel sens cette série converge-t-elle ?*

On peut donner une autre expression de $P_r(t)$ en sommant la série:

$$P_r(t) = 2\Re\sum_{k\in\mathbb{N}} (re^{2i\pi t})^k - 1 = \Re\frac{1 + re^{2i\pi t}}{1 - re^{2i\pi t}},$$

et donc

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos 2\pi t + r^2}. \tag{2}$$

($\Re$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe.)

Il est aussi facile de calculer la série de Fourier en intégrant terme à terme la série. (Savez-vous le justifier ?) On trouve:

$$\hat{P}_r(k) = r^{|k|}.$$

Lemme 1.11 *Le noyau de Poisson $P_r(t)$ vérifie:*
a) $P_r(t) > 0$ *pour tous* $r \in [0, 1[$ *et* $t \in \mathbb{R}$,
b) $\int_{\mathbb{T}} P_r(t),dt = 1$ *pour tout* $r \in [0, 1[$,
c) $\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} P_r(t)\, \mathbf{1}_{|t|\geq\delta}\, dt = 0$ *pour tout* $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$.

Démonstration. Soit $r \in [0, 1[$. L'égalité (2) montre que $P_r(t) > 0$. En effet $1 - r^2 > 0$ et

$$1 - 2r \cos 2\pi t + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0\,.$$

Observons que

$$\left| \sum_{|k|\leq n} r^{|k|} e^{2i\pi kt} \right| \leq \sum_k r^{|k|} \leq \frac{2}{1 - r}\,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet alors d'intégrer terme à terme pour obtenir:

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(t)\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} r^{|k|} e^{2i\pi kt}\, dt = 1\,.$$

Enfin, observez que pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\delta \leq |t| \leq 1/2$,

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos 2\pi t + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos 2\pi\delta + r^2}$$

et donc

$$0 < \int_{\mathbb{T}} P_r(t)\, \mathbf{1}_{|t|\geq\delta}\, dt < \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos 2\pi\delta + r^2} \to 0\,,$$

quand $r \to 1^-$. ∎

Démonstration du Théorème 5. Nous avons démontré dans le lemme 1.11 que le noyau de Poisson est une approximation de l'identité quand $r \to 1^-$. Voyez la définition 1.1. Nous déduisons alors du Théorème 1.2 que

$$u(t) = \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} u(t - s) P_r(s)\, ds$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.12 *Montrez que*

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(s) u(t - s)\, ds = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{u}(k) e^{2i\pi kt}\,.$$

Soient $r \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Observez que

$$\left| \sum_{|k|\leq n} r^{|k|} e^{2i\pi k(t-s)} u(s) \right| \leq \frac{2\|u\|_\infty}{1 - r}\,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet alors d'intégrer terme à terme pour obtenir:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} P_r(s)u(t-s)\,ds &= \int_{\mathbb{T}} P_r(t-s)u(s)\,ds\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi k(t-s)}u(s)\,ds\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}\,.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Par continuité uniforme, il existe $\delta\in]0,\frac{1}{2}[$ tel que $|u(t)-u(t-s)|\leq\varepsilon$ pour tous $t\in\mathbb{T}$ et $|s|\leq\delta$. On utilise maintenant la partie c) du lemme précédent: il existe $R\in[0,1[$ tel que

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(s)\,\mathbf{1}_{|s|\geq\delta}\,ds\leq\varepsilon\,,$$

dès que $R\leq r\leq 1$. On aura alors:

$$\begin{aligned}\left|u(t)-\int_{\mathbb{T}} u(t-s)P_r(s)\,ds\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}}(u(t)-u(t-s))P_r(s)\,ds\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{T}\,,\,|t|\leq\delta}|u(t)-u(t-s)|P_r(s)\,ds+\int_{\mathbb{T}\,,\,|t|\geq\delta}|u(t)-u(t-s)|P_r(s)\,ds\\ &\leq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}P_r(s)\,ds+2\|u\|_\infty\int_{\mathbb{T}\,,\,|t|\geq\delta}P_r(s)\,ds\\ &\leq \varepsilon+2\varepsilon\|u\|_\infty\,.\end{aligned}$$

b) On suppose maintenant que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(k)|<\infty$. La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}$ converge absolument et uniformément par la convergence normale. (C'est une conséquence du théorème de Weierstrass.)

Soit $\varepsilon>0$. Il existe n tel que $\sum_{|k|>n}|\hat{u}(k)|\leq\varepsilon$. On a alors:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}\right. &- \left.\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}\right|\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|1-r^{|k|}||\hat{u}(k)|\\ &\leq \sum_{|k|>n}|\hat{u}(k)|+\sum_{|k|\leq n}|1-r^{|k|}||\hat{u}(k)|\\ &\leq \varepsilon+\sum_{|k|\leq n}|1-r^{|k|}||\hat{u}(k)|\,,\end{aligned}$$

et le dernier terme converge vers 0 quand $r\to 1^-$. On a ainsi démontré que, au sens de la convergence uniforme

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{u}(k)e^{2i\pi kt}\,.$$

■

1.4 Fonctions régulières

Lemme 1.13 *Soit $u \in C^k(\mathbb{T})$. On a*

$$\widehat{u^{(k)}}(n) = (2i\pi n)^k \hat{u}(n)\,.$$

et alors $\hat{u}(n) = o(1/n^k)$.

Démonstration. On intègre k fois par parties pour trouver que

$$\begin{aligned}
\widehat{u^{(k)}}(n) &= \int_{\mathbb{T}} u^{(k)}(t) e^{-2i\pi nt}\,dt \\
&= (2i\pi n)^k \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2i\pi nt}\,dt \\
&= (2i\pi n)^k \hat{u}(n)\,.
\end{aligned}$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue conclut. ∎

Lemme 1.14 *Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, alors $\sum |\hat{u}(n)| < \infty$.*

Le Théorème 5 montre alors que $u = S(u)$.

Démonstration. Par le Lemme 1.13, on a

$$\begin{aligned}
\sum |\hat{u}(n)| &= \sum \frac{|\hat{u'}(n)|}{2\pi n} \\
&\leq \left(\sum |\hat{u'}(n)|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

car $u' \in L^2(\mathbb{T})$, puisque continue. ∎

2 Convergence ponctuelle des fonctions continues

2.1 Divergence générique des séries de Fourier

Le Théorème 4 s'appuie sur le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 2.1 *Soit X un espace de Banach. On considère une famille de formes linéaires continues $(\Lambda_\alpha)_\alpha$. Ou bien il existe $M > 0$ telle que $\|\Lambda_\alpha\| \leq M$ pour tout α, ou bien il existe un G_δ dense de X tel que*

$$\sup_{\alpha \in A} |\Lambda_\alpha(x)| = \infty\,.$$

Démonstration. On suppose que $\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha\|$ n'est pas borné.

On note $\varphi(x)=\sup_\alpha|\Lambda_\alpha(x)|$, et $V_n=\{\varphi>n\}$.

Soient $x\in V_n$ et α tels que $|\Lambda_\alpha(x)|\geq\varphi(x)$.

Soit $y\in X$,

$$|\Lambda_\alpha(y)|\geq|\Lambda_\alpha(x)|-|\Lambda_\alpha(x-y)|$$

donc si $|x-y|$ est assez petit, alors $\varphi(y)\geq|\Lambda_\alpha(y)|>n$, donc $y\in V_n$ et V_n est ouvert.

Si V_n n'est pas dense, il existe une boule $B(x,r)$ disjointe de V_n. Or, si $|z|<r$, alors, pour tout $\alpha\in A$, on a

$$|\Lambda_\alpha(z)|\leq|\Lambda_\alpha(x)|+|\Lambda_\alpha(x+z)|\leq 2n$$

donc

$$\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha\|\leq\frac{2n}{r}\,.$$

Contradiction.

Par conséquent, $\cap V_n$ est un G_δ dense par le théorème de Baire. ∎

Démonstration du Théorème 4. On considère l'application $f\mapsto S_n(f)(x)$ pour $x\in\mathbb{T}$ fixé. La norme est donnée par $\|D_n\|_1$, qui n'est pas bornée. En effet, si on prend $f(t)=e^{2i\pi n(t-x)}\mathrm{sg}[\sin(2n+1)\pi(t-x)]$, alors

$$S_n(f)(x)=\int_0^1\frac{|\sin(2n+1)\pi(t-x)|}{\sin\pi t}dt\,.$$

On conclut en approchant f par des fonctions continues. Par suite le théorème de Banach-Steinhaus s'applique. En considérant un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{T}$, on trouve un G_δ dense Ω de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ sur lequel la série de Fourier diverge sur notre ensemble de points. Fixons nous $f\in\Omega$; l'ensemble

$$\{x,\ \sup|S_n(f)(x)|>n\}$$

étant ouvert, on obtient un G_δ dense de $\mathbb{T}$. Ceci montre le Théorème 4.

2.2 Convergence ponctuelle des sommes de Fejér et Dirichlet

Théorème 2.2 *Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$. Soit $t_0\in\mathbb{T}$.*
a) Si t_0 est un point de continuité de f alors les sommes de Fejér $\sigma_n(f)(t_0)$ convergent vers $f(t_0)$.
b) On suppose que t_0 est un point de continuité de f et que la suite $(k\hat{f}(k))$ est bornée. Alors les sommes de Dirichlet $S_n(f)(t_0)$ convergent vers $f(t_0)$.

a) On écrit que

$$\sigma_n(f)(t_0)-f(t_0)=\int_{\mathbb{T}}(f(t_0-s)-f(t_0))K_n(s)\,ds\,.$$

Montrons que cette dernière intégrale tend vers 0. Pour cela on découpe l'intégrale en deux morceaux: pour les valeurs de s proche de 0, $|s|\leq\delta$, c'est la continuité de f au point t_0 qui permet de conclure. Pour s'assurer de la convergence de la partie de l'intégrale portant sur les grandes valeurs de s, on utilise la borne ci-dessous: si $|s| > \delta$ alors

$$0 \leq K_n(s) \leq \frac{C(\delta)}{n},$$

où $C(\delta)$ est une constante.

b) La démonstration de b) découle de a) et du théorème de Hardy-Landau suivant :

Théorème 2.3 *Soit $u_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. On note*

$$\begin{cases} s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \\ \\ \sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1} s_k(x) \end{cases}$$

1. *Si, pour un $x \in [0,1]$, il existe A avec $|u_n(x)| \leq A/n$ pour tout $n \geq 1$ et on a $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \ell$.*
2. *On suppose qu'il existe A avec*

$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n}$$

pour tout $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$. S'il existe une fonction f telle que $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n - f\|_\infty = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_\infty = 0$.

■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3.

1. Montrer que

$$m\sigma_m - n\sigma_n = (m-n)s_m - \sum_{k=n+2}^{m} (k-n-1)u_k .$$

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que si $|\sigma_n - \ell| < \varepsilon$ pour tous les entiers n plus grand qu'un entier N_ε, alors pour $m > n \geq N_\varepsilon$, on a

$$|s_m - \ell| \leq \varepsilon \frac{m+n}{m-n} + \frac{A}{2}\left(\frac{m}{n} - 1\right) .$$

3. Conclure.

L'exercice suivant montre en particulier que la transformation de Fourier n'est pas surjective sur c_0.

Exercice 2.4 1. *Soit $f \in L^1([0,1])$ d'intégrale nulle. Montrer que la fonction*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

est une fonction continue qui peut être prolongée à $\mathbb{R}$ en une fonction continue 1-périodique.

2. *Calculer les coefficients de Fourier de F en fonction de ceux de f.*
3. *En déduire qque la série de Fourier de F converge uniformément vers F.*
4. *Montrer que la suite définie par $c_0 = 0$ et $c_n = (-1)^n / \log n$ sinon, n'est pas la suite des coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1([0,1])$.*

2.3 Suites à décroissance rapide

Les propriétés de décroissance de $\hat{u}(k)$ sont liées à la régularité de la fonction u. C'est ce qu'illustrent le théorème d'inversion et le théorème 2.6.

Définition 2.5 *L'espace des suites à décroissance rapide est défini par*

$$\mathcal{S}(\mathbb{Z}) := \{(c_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \,:\, \forall n \in \mathbb{N}\,, \sup_{k \in \mathbb{Z}} |k^n c_k| < \infty\}\,.$$

Théorème 2.6 *La transformée de Fourier d'une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ est une suite à décroissance rapide. Réciproquement, toute suite à décroissance rapide peut être obtenue comme transformée de Fourier d'une fonction de $C^\infty(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer que l'application

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \,:\, u \to (\hat{u}(k))$$

est une bijection dont l'inverse est

$$\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \to C^\infty(\mathbb{T}) \,:\, (c_k) \to \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt}\,.$$

a. D'après le Lemme 1.13, si $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ alors $(\hat{u}(k)) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

b. Soit $(c_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Montrons que la fonction

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt}$$

est indéfiniment dérivable.

Par hypothèses, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k^n c_k|$$

converge. Cela implique la convergence uniforme de la série de fonctions

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2i\pi k)^n c_k e^{2i\pi kt}\,.$$

On en déduit, comme application des résultats de dérivation des séries, que la fonction est C^∞.

c. Posons $u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi kt}$. Montrons que

$$\hat{u}(j) = c_j \,.$$

Nous conclurons que $\Phi \circ \Psi$ est l'identité sur $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Nous avons

$$|\sum_{|k|\leq n} c_k e^{2i\pi(k-j)t}| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty \,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet alors d'intégrer terme à terme:

$$\hat{u}(j) = \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2i\pi jt}\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{T}} e^{-2i\pi(k-j)t}\, dt = c_j \,.$$

d. Montrons maintenant que $\Psi \circ \Phi$ est l'identité sur $C^\infty(\mathbb{T})$. Comme u est C^2, il existe $c > 0$ tel que

$$|\hat{u}(k)| \leq \frac{c}{|k|^2} \,.$$

Mais alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}(k)| < \infty$ et nous pouvons appliquer le théorème d'inversion pour voir que

$$u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k) e^{2i\pi kt} \,.$$

∎

3 Applications

3.1 Séries numériques

Exercice 3.1 *Soit χ la fonction 2π-périodique qui vaut l'identité sur $[0, 2\pi[$.*

1. *Calculer les coefficients de Fourier de χ et montrer que*

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

2. *Montrer que $S(\chi) = \chi$ sur $]0, 2\pi[$, et retrouver en intégrant cette égalité le calcul ci-dessus.*

3. *En déduire que*

$$\sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n^k}$$

est un polynôme P_k de degré k.

3.2 Inégalité isopérimétrique

Soit Ω un domaine borné du plan bordé par une courbe régulière $\mathcal{C}^1$ de longueur finie. On note ℓ la longueur de $\partial\Omega$, et A l'aire de Ω.

Théorème 3.2 *L'inégalité isopérimétrique affirme*

$$4\pi A \leq \ell^2$$

avec égalité si et seulement si Ω est un disque.

On commence par démontrer l'inégalité de Wirtinger:

Proposition 3.3 *Si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1 telle que*

$$\int_0^1 f(t)dt = 0$$

alors

$$4\pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\,.$$

On a égalité si f est de la forme

$$f(t) = ae^{2i\pi t} + be^{-2i\pi t}\,.$$

Démonstration. On peut supposer, quitte à changer la valeur de f en 1, que f est 1-périodique. Du coup, f et f' sont bornées, donc dans $L^2(\mathbb{T})$. Nous pouvons ainsi appliquer la formule de Parseval pour ces deux fonctions. Or, $\hat{f'}(n) = 2i\pi n\hat{f}(n)$ pour tout n, donc

$$|\hat{f'}(n)|^2 \geq 4\pi^2|\hat{f}(n)|^2$$

puisque $\hat{f}(0) = 0$ par hypothèses. Il vient

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= 4\pi^2 \sum |\hat{f}(n)|^2 \\ &\leq \sum |\hat{f'}(n)|^2 \\ &= \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\,. \end{aligned}$$

Puisque f est de classe C^1, sauf à l'origine, on a convergence absolue de la série de ses coefficients de Fourier: du coup, f est égale à sa série de Fourier sauf peut-etre en 0 et 1. Donc, si on a égalité dans l'inégalité de Wirtinger, cela entraîne

$$f(t) = \hat{f}(1)e^{2i\pi t} + \hat{f}(-1)e^{-2i\pi t}\,.$$

La continuité de f permet de conclure. ∎

On peut maintenant en déduire l'inégalité isopérimétrique ainsi. On écrit $\partial\Omega$ comme l'image d'une application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'application γ a deux coordonnées γ_x et γ_y. On a

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2} dt\,.$$

On peut supposer que

$$\int_0^1 \gamma(t)dt = 0$$

en faisant une translation de Ω si nécessaire. Or, la formule de Green-Riemann implique

$$\begin{aligned} A &= \int dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(xdy - ydx) \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_0^1 (\gamma_x(t)\gamma_y'(t) - \gamma_x'(t)\gamma_y(t)dt\right|\,. \end{aligned}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Wirtinger, il vient

$$\begin{aligned} 2A &\leq \sqrt{\int_0^1 (\gamma_x(t)^2 + \gamma_y(t)^2)dt}\sqrt{\int_0^1 (\gamma_x'(t)^2 + \gamma_y'(t)^2)dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 |\gamma(t)|^2 dt}\sqrt{\int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt} \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\ell^2\,. \end{aligned}$$

Ceci nous donne l'inégalité recherchée. Le cas d'égalité découle des cas d'égalité des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Wirtinger: il vient que γ et γ' sont liées et que leurs coefficients de Fourier sont nuls, sauf éventuellement pour $n = \pm 1$. Ces deux conditions nous mènent à $\gamma(t) = \hat{f}(1)e^{2i\pi t}$ ou $\gamma(t) = \hat{f}(-1)e^{-2i\pi t}$: dans ces deux cas, on obtient un cercle. On vérifie que cela donne bien l'égalité. ∎

3.3 Equation de la chaleur

On considère l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u - \dfrac{\partial}{\partial t}u = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x),\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0 \end{cases}$$

où $u : [0,1/2] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ en $x \in]0,(1/2)[$, de classe $\mathcal{C}^1$ en $t > 0$ et continue sur $[0,1/2] \times \mathbb{R}_+$ et u_0 est continue (et donée).

1. On suppose que u est solution. Montrer que l'on peut prolonger u par continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de sorte que u est 1-périodique et impaire en la variable x.

2. Montrer qu'il existe des fonctions $b_n(t)$, $n \geq 1$, telles que

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n(t) \sin 2\pi x\,.$$

3. Montrer que b_n vérifie une équation différentielle ordinaire du premier ordre, et la résoudre.

4. Montrer que la formule établie pour u est bien une solution du problème.

3.4 Propriétés d'ergodicité d'applications du cercle

Exercice 3.4 *1. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $f(x+\alpha) = f(x)$ pp. Montrer que $f = cste$ pp.*

On considère la rotation d'angle α sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire la transformation $R_\alpha : x \mapsto x+\alpha$ mod 1. Pour tout borélien, on a $\mu(R_\alpha^{-1}(A)) = \mu(A)$. En prenant $f = \chi_A$ dans l'exercice précédent, on montre que si de plus $R_\alpha^{-1}(A) = A$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$ (car χ_A ne prend que ces deux valeurs). Ceci signifie par définition que la transformation munie de la mesure de Lebesgue est ergodique.

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $f(2x) = f(x)$ pp. Montrer que $f = cste$ pp.

On considère le doublement de l'angle sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire la transformation $q : x \mapsto 2x$ mod 1. Pour tout borélien, on a $\mu(q^{-1}(A)) = \mu(A)$. En prenant $f = \chi_A$ dans l'exercice précédent, on montre que si de plus $q^{-1}(A) = A$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$ (car χ_A ne prend que ces deux valeurs). Donc q munie de la mesure de Lebesgue est ergodique.

3.5 Fonctions holomorphes

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $z_0 \in \Omega$, et $D(z_0, 2r) \subset \Omega$, on peut alors considérer l'application

$$f_r : t \in \mathbb{T} \mapsto f\left(z_0 + re^{2i\pi t}\right)\,.$$

Exercice 3.5 *1. Montrer que f est DSE en utilisant les séries de Fourier.*

2. Montrer le principe du maximum.

A Convolutions: rappels

Théorème A.1 *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, la fonction $s \to f(t-s)g(s)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ et si on pose*

$$h(t) := \int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\,ds\,,$$

pour presque tout $t \in \mathbb{T}$ on a alors $h \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$\int_{\mathbb{T}} |h(t)|\, dt \le \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt \int_{\mathbb{T}} |g(t)|\, dt\,.$$

De plus on a $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Si g est bornée, alors h est bornée et on a

$$\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\,.$$

Définition A.2 *La fonction h du théorème est appelée convolée de f et g et on la note $h = f \star g$.*

Démonstration. On pose $F(t,s) = f(t-s)g(s)$. C'est une fonction mesurable sur $\mathbb{T}^2$ car produit de deux fonctions mesurables. De plus on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} ds \int_{\mathbb{T}} dt\, |F(t,s)| &\le \int_{\mathbb{T}} ds\, |g(s)| \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}\,. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on en déduit que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, la fonction $s \mapsto f(t-s)g(s)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ et on a bien

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |h(t)|\, dt &= \int_{\mathbb{T}} ds \left| \int_{\mathbb{T}} ds\, F(t,s) \right| \\ &\le \int_{\mathbb{T}} ds \int_{\mathbb{T}} ds\, |F(t,s)| \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt \int_{\mathbb{T}} |g(t)|\, dt\,. \end{aligned}$$

Si de plus g est bornée, on a alors pour presque tout $t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} f(t-s)g(s)\, ds \right| \\ &\le \int_{\mathbb{T}} |f(t-s)g(s)|\, ds \\ &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_T |f(t-s)|\, ds \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_T |f(s)|\, ds\,. \end{aligned}$$

(Notez le changement de variables qui remplace $t-s$ par s et laisse la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ invariante.)

On a montré que

$$\|h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\,.$$

Calculons les coefficients de Fourier:

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(k) &= \int_{\mathbb{T}} h(t) e^{-2i\pi kt}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} dt \int_{\mathbb{T}} ds\, f(t-s) g(s) e^{-2i\pi kt} \\
&= \int_{\mathbb{T}} dt \int_{\mathbb{T}} ds\, f(t-s) g(s) e^{-2i\pi k(t-s)} e^{-2i\pi ks} \\
&= \int_{\mathbb{T}} dt \int_{\mathbb{T}} ds\, f(t) g(s) e^{-2i\pi kt} e^{-2i\pi ks} \\
&= \int_{\mathbb{T}} dt\, f(t) e^{-2i\pi kt} \int_{\mathbb{T}} ds\, g(s) e^{-2i\pi ks} \\
&= \hat{f}(k) \hat{g}(k)\,.
\end{aligned}
$$

■

Exercice A.3 *Vérifiez que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.*