

GÉOMÉTRIE QUASICONFORME, ANALYSE AU BORD DES ESPACES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES ET RIGIDITÉS

par **Peter Haïssinsky**

Avertissement. Ces notes sont en cours d'élaboration et sans prétention!! Toute suggestion visant à l'amélioration de ce texte est la bienvenue.

Notations. On notera parfois la métrique $d(x, y) = |x - y|$. Si a, b sont des réels positifs, on notera $a \asymp b$ s'il existe une constante universelle $u \geq 1$ telle que $a/u \leq b \leq ua$ et $a \sim b$ s'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que $|a - b| \leq C$.

Une boule sera notée $B = B(x_B, r_B) = \{y, |x_B - y| < r_B\}$. On notera $\lambda B = B(x_B, \lambda r_B)$ la boule concentrique de rayon multiplié par $\lambda > 0$.

TABLE DES MATIÈRES

1. L'espace hyperbolique	3
1.1. Éléments de géométrie riemannienne	3
1.2. Modèles de l'espace hyperbolique	5
1.3. Groupes d'isométries	8
1.4. Quelques propriétés	12
Annexe A. Géométrie conforme	16
A.1. Similitudes euclidiennes	16
A.2. Inversions	18
A.3. Espace étendu	21
2. Bord à l'infini	23
2.1. Fonctions de Busemann	24
2.2. Produit de Gromov à l'infini	25
2.3. Vue hyperbolique du birapport	27
2.4. Action des isométries	28
3. Actions de groupes sur les espaces métriques	29
3.1. Quotients et revêtements	30
3.2. Actions géométriques et quasi-isométries	32
3.3. Actions sur un espace hyperbolique	36

4. Flot géodésique	39
4.1. Flot géodésique sur une variété riemannienne	39
4.2. Version macroscopique	39
4.3. Paramétrage de Hopf	40
4.4. Ergodicité du flot géodésique	40
B. Actions sur les mesures de Radon	42
B.1. Mesures de Radon	42
B.2. Mesures invariantes	43
5. Géométrie quasiconforme	44
5.1. Applications quasisymétriques et variantes	44
5.2. Modules de courbes	48
5.3. Espaces de Sobolev	56
5.4. Espaces de Loewner	62
5.5. Théorème de Liouville	66
C. Théorèmes de recouvrements et applications	68
D. Quelques rappels	69
6. Théorème de Mostow	70
7. Espaces CAT(-1)	70
7.1. Triangle de comparaison	70
7.2. Compactification	71
7.3. Le bord comme espace mesuré	76
7.4. Flot géodésique	82
7.5. Espaces hyperboliques et espaces CAT(-1)	83
E. Hyperbolicité au sens de M. Gromov	85
E.1. Compactification	87
E.2. Quasi-isométries entre espaces hyperboliques	88
E.3. Groupes hyperboliques	89
F. Mesures de Hausdorff	89
F.1. Dimension de Minkowski	90
F.2. Ahlfors-régularité	91
RÉFÉRENCES	92

1. L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Il existe de nombreux ouvrages sur la géométrie hyperbolique. Ces notes ont été préparées avec [BH, CFKP, Thu], sans intention d'exclure les autres.

1.1. Éléments de géométrie riemannienne

On peut consulter [GHL, dC, TF] sur la géométrie riemannienne.

1.1.1. *Formes quadratiques.* On considère $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, comme un espace vectoriel réel muni de sa base canonique. Les formes quadratiques définies positives sont représentées par des matrices symétriques définies positives. Celles-ci apparaissent comme l'image par l'application exponentielle des matrices symétriques qui est un espace vectoriel de dimension $N = n(n+1)/2$. L'ensemble des formes quadratiques définies positives $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, on peut parler d'applications régulières à valeurs dans $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.2. *Métrique riemannienne sur un ouvert.* Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $TU = U \times \mathbb{R}^n$ le fibré tangent de U , et $T_x U = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ l'espace tangent de U au point x , que l'on identifie à $\mathbb{R}^n$.

Une *métrique riemannienne* g sur U est la donnée d'une application continue $g : U \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto g_x$, où g_x définit une structure euclidienne sur $T_x U$. Sur chaque plan tangent $T_x U$, on désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ le produit scalaire associé à g_x , et par $|\cdot|_g$ la norme d'un vecteur tangent.

L'exemple le plus simple est $U = \mathbb{R}^n$ et

$$g : x \mapsto q \left(\sum v_i e_i \right) = \sum |v_i|^2$$

qui se ramène à l'espace euclidien standard.

Si $v, v' \in T_x U$, on définit l'angle $\alpha \in [0, \pi]$ entre v et v' par

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, v' \rangle_g}{|v|_g |v'|_g}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'existence de l'angle entre deux vecteurs.

Si (U, g) et (U', g') sont des ouverts munis d'une structure riemannienne, une *isométrie* est un difféomorphisme $f : U \rightarrow U'$ tel que, pour tout $x \in U$, l'application linéaire tangente $T_x f : (T_x U, g_x) \rightarrow (T_{f(x)} U', g'_{f(x)})$ est une isométrie vectorielle *i.e.*, pour tous $(x, v) \in TU$, on a $|D_x f(v)|_{g'_{f(x)}} = |v|_{g_x}$. On dit que f est conforme s'il existe $|f'(x)| > 0$ pour chaque $x \in U$ tel que, $|D_x f(v)|_{g'_{f(x)}} = |f'(x)| \cdot |v|_{g_x}$ pour chaque $v \in T_x U$ (autrement dit, les angles sont conservés par f).

Un *chemin* ou une *courbe* dans U est une application continue $\gamma : I \rightarrow U$ définie sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si γ est différentiable, on définit sa longueur

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt.$$

EXERCICE 1.1. — Vérifier que si $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ est monotone, surjective et de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\ell(\gamma \circ \varphi) = \ell(\gamma)$, donc la longueur d'une courbe ne dépend pas de son paramétrage.

À une métrique riemannienne, on associe une fonction $d_g : U \times U \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme suit : $d_g(x, y)$ est l'infimum des longueurs des courbes $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Lorsque U est connexe, d_g définit une distance sur U compatible avec la topologie de $\mathbb{R}^n$.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un chemin continu, on dit que γ est rectifiable si

$$\sup \sum_j d_g(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) < \infty$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$.

EXERCICE 1.2. — Vérifier que si γ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\ell(\gamma) = \sup \sum_j d_g(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$.

Par conséquent, on pose

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_j d_g(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})).$$

De plus, on définit une notion de *volume* v_g ainsi. Si $E \subset U$ est borélien, on définit

$$v_g(E) = \int_E \sqrt{\det g_x} dx.$$

EXERCICE 1.3. — Montrer à l'aide de la formule de changement de variables que le volume est invariant par transformations isométriques.

1.1.3. *Variété riemannienne.* Une variété riemannienne (M, g) de dimension $n \geq 1$ est un espace topologique muni d'un recouvrement $\mathcal{U}$ par des ouverts qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) à chaque ouvert $U \in \mathcal{U}$ est associé un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique riemannienne g_V et un homéomorphisme $\varphi_U : U \rightarrow V$ appelé une carte ;
- (2) si U, U' sont dans $\mathcal{U}$ et $U \cap U' \neq \emptyset$, alors le changement de cartes

$$\begin{aligned} \varphi_{U, U'} &: \varphi_U(U \cap U') \rightarrow \varphi_{U'}(U \cap U') \\ x &\mapsto (\varphi_{U'} \circ \varphi_U^{-1})(x) \end{aligned}$$

est une isométrie.

- (3) La famille $\{(U, \varphi_U), U \in \mathcal{U}\}$ est maximale relative aux deux propriétés précédentes.

Les notions de longueur de courbes, de la distance d_g , de courbes rectifiables, et de volume v_g s'étendent sans difficulté à ce cadre.

Une *courbe géodésique* est un chemin $\gamma : I \rightarrow M$ tel que, pour tous $t, t' \in I$, $t \leq t'$, on a

$$d_g(\gamma(t), \gamma(t')) = \ell(\gamma|_{[t, t']}).$$

On parle de segment quand I est compact, de rayon si $I = \mathbb{R}_+$ et tout simplement de géodésique si $I = \mathbb{R}$. Une *courbe géodésique locale* est un chemin $\gamma : I \rightarrow M$ qui est géodésique au voisinage de chaque point de γ .

On a le théorème fondamental et admis suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

- (1) *Tout point admet un voisinage convexe : toute paire de points de ce voisinage est jointe par un segment contenu dedans.*
- (2) *Pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_x M$, il existe une unique géodésique locale γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$ qui est définie sur un intervalle maximal.*

COROLLAIRE 1.5 (Théorème de Hopf-Rinow). — *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *l'espace métrique (M, d_g) est complet ;*
- (2) *l'espace (M, g) est géodésiquement complet, c.à.d. que chaque courbe géodésique locale est la restriction d'une géodésique locale définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ;*
- (3) *toute paire de points est jointe par un segment géodésique ;*
- (4) *l'espace métrique (M, d_g) est propre (les boules fermées de rayon fini sont compactes).*

EXERCICE 1.6. — *Démontrer le point (1) du Théorème 1.4 et le Théorème de Hopf-Rinow.*

EXERCICE 1.7. — *Montrer que l'ensemble des géodésiques $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

1.2. Modèles de l'espace hyperbolique

Nous présentons plusieurs modèles de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ de dimension n .

1.2.1. *L'hyperboloïde.* On considère l'espace de Minkowski de dimension $n + 1$, à savoir $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2 - x_{n+1}^2.$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sa forme polaire.

Posons

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}), x_{n+1} \geq 1, q(x_1, \dots, x_{n+1}) = -1\}.$$

C'est une sous-variété de codimension 1.

Soit $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathcal{H}$. Son espace tangent $T_p \mathcal{H}$ est l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ tels que

$$\sum_{1 \leq j \leq n} 2p_j x_j - 2p_{n+1} x_{n+1} = 0$$

soit $\langle x, p \rangle = 0$. On a donc $T_p \mathcal{H} = p^\perp$.

Comme la signature de q est $(n, 1)$, et que $q(p) = -1$ par définition, on en déduit par le théorème d'inertie de Sylvester que $q|_{T_p \mathcal{H}}$ est définie positive. On obtient ainsi une variété riemannienne $\mathbb{H}^n = (\mathcal{H}, q|_{\mathcal{H}})$. Au point $(0_n, 1)$, l'espace tangent est naturellement $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne standard.

THÉORÈME 1.8. — *On a les propriétés suivantes.*

(1) *Toutes les courbes géodésiques sont de la forme*

$$\gamma(t) = \operatorname{ch} t \cdot p + \operatorname{sh} t \cdot u$$

où $p \in \mathbb{H}^n$ et $u \in T_p \mathbb{H}^n$ de norme 1. En particulier, $\mathbb{H}^n$ est complet et uniquement géodésique.

(2) *Pour tous $p, q \in \mathbb{H}^n$, on a*

$$\operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p, q) = -\langle p, q \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Montrons que les boules fermées de rayon fini sont compactes : il suffit de regarder les boules centrées en $w = (0_n, 1)$. On se fixe $R < \infty$. Puisque $O_n(\mathbb{R}) \times \{1\}$ opère par isométries sur $\mathcal{H}$ en fixant w , on voit que deux points à même distance de w auront la même dernière coordonnée : il existe $x_{n+1} > 1$ tel que $\overline{B_g(w, R)} \subset \mathcal{H} \cap (\mathbb{R}^n \times [1, x_{n+1}])$. Du coup, les boules sont compactes et le théorème de Hopf-Rinow s'applique.

Soient $p \in \mathbb{H}^n$ et $u \in T_p \mathbb{H}^n$ un vecteur unitaire. On a, du fait que $\langle p, u \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle &= \operatorname{ch}^2 t \langle p, p \rangle + \operatorname{sh}^2 t \langle u, u \rangle \\ &= -\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t \\ &= -1 \end{aligned}$$

donc γ est bien une courbe de $\mathbb{H}^n$. Par ailleurs, $\gamma'(t) = \operatorname{sh} t \cdot p + \operatorname{ch} t \cdot u$, donc

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= \operatorname{sh}^2 t \langle p, p \rangle + \operatorname{ch}^2 t \langle u, u \rangle \\ &= -\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par suite, γ est paramétrée par longueur d'arc : pour tous réels $a \leq b$, on a

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) = |b - a|.$$

Soit c l'unique géodésique locale maximale telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = u$, qui existe d'après le Théorème 1.4. On considère le plan P de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendré par p et u , et on note $Q = P^\perp \subset p^\perp$. Si $q \in \mathbb{R}^{n+1}$, on décompose $q = q_P + q_Q$ et on définit $f(q) = q_P - q_Q$. On a, pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(v) \rangle &= \langle v_P - v_Q, v_P - v_Q \rangle \\ &= \langle v_P, v_P \rangle + \langle v_Q, v_Q \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

donc f est une isométrie de $\mathbb{H}^n$. Puisque $f(p) = p$ et $f(u) = u$ aussi, f préserve c , donc $c \subset \mathbb{H}^n \cap P$. Ceci montre que $c = \gamma$ et que toute géodésique locale est contenue dans un plan de type P . Comme l'espace est géodésique, et que toute géodésique est en particulier une géodésique locale, on en déduit que la courbe c est une géodésique globale, et il existe au plus une géodésique joignant deux points.

Posons $q = \gamma(t)$. On a donc $d_{\mathcal{H}}(p, q) = t$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \langle p, p \cosh t + u \sinh t \rangle \\ &= \cosh t \langle p, p \rangle + \sinh t \langle p, u \rangle \\ &= -\cosh t \\ &= -\cosh d_{\mathcal{H}}(p, q). \end{aligned}$$

Maintenant, si p et q sont fixés et distincts, on cherche $u \in T_p \mathbb{H}^n$ unitaire dans le plan engendré par p et q . Si on note $d = d_{\mathcal{H}}(p, q)$, on doit avoir

$$u = \frac{1}{\sinh d}(q - p \cosh d) = \frac{1}{\sinh d}(q + p \langle p, q \rangle).$$

On vérifie que

$$\langle u, p \rangle = \frac{1}{\sinh d}(\langle q, p \rangle + \langle p, p \rangle \cdot \langle p, q \rangle) = 0$$

ainsi que

$$\langle u, u \rangle = \frac{1}{\sinh d} \langle q, u \rangle = \frac{1}{\sinh^2 d}(\langle q, q \rangle + \cosh^2 d) = 1.$$

Donc p et q sont joints par un segment de la forme prescrite. On en déduit que $\mathbb{H}^n$ est uniquement géodésique et complet. $\blacksquare$

1.2.2. La boule conforme. Soit $n \geq 1$. On note $|\cdot|_e$ la norme euclidienne. On définit sur la boule unité B de $\mathbb{R}^n$ la métrique riemannienne g_B comme suit. Si $x \in B$ et si $v, w \in T_x B$,

$$\langle v, w \rangle_B = \frac{4(v \cdot w)}{(1 - |x|_e^2)^2}.$$

On note d_B la distance riemannienne associée. Il vient que, sur chaque espace tangent, les angles issus de la nouvelle structure riemannienne coïncident avec ceux de la métrique euclidienne sous-jacente : l'application identique entre (B, d_B) et (B, d_e) est conforme.

THÉORÈME 1.9. — *L'espace (B, d_B) est isométrique à $\mathbb{H}^n$.*

DÉMONSTRATION. On identifie B à $B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On note $o = (0_n, -1)$. On définit la transformation $f_B : B \times \{0\} \rightarrow \mathcal{H}$ comme suit. Si $x \in B$, la droite (o, x) coupe $\mathcal{H}$ en exactement un seul point y : on pose $f(x) = y$.

Montrons que f est bien définie. On écrit $p = (p', p_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La droite (o, x) a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} p' = \lambda x \\ p_{n+1} = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche $\lambda > 0$ tel que

$$|p'|_e^2 - p_{n+1}^2 + 1 = \lambda^2 |x|_e^2 - (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$$

soit

$$(|x|_e^2 - 1)\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

donc on obtient

$$f_B(x) = \left(\frac{2x}{1 - |x|_e^2}, \frac{1 + |x|_e^2}{1 - |x|_e^2} \right).$$

On laisse en exercice la preuve que f est bijective.

Pour montrer que f_B est isométrique, on considère $x \in B$ et $v \in T_x B$: on trouve

$$T_x f_B(v) = \left(\frac{4x(x \cdot v)}{(1 - |x|_e^2)^2} + \frac{2v}{1 - |x|_e^2}, \frac{4(x \cdot v)}{(1 - |x|_e^2)^2} \right).$$

Par conséquent

$$\langle T_x f_B(v), T_x f_B(v) \rangle_B = \frac{4|v|_e^2}{(1 - |x|_e^2)^2} = \langle v, v \rangle_B.$$

■

1.2.3. *Le demi-espace.* Notons $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$. On définit, pour $x \in U_n$, $v, w \in T_x U_n$,

$$\langle v, w \rangle_U = \frac{(v \cdot w)}{x_n^2}.$$

Il s'agit d'un autre modèle conforme.

THÉORÈME 1.10. — *L'espace (U_n, d_U) est isométrique à $\mathbb{H}^n$.*

DÉMONSTRATION. On considère l'inversion par rapport à la sphère de centre o et de rayon $\sqrt{2}$. Elle transforme la boule unité en le demi-espace supérieur puisque la sphère unité passe par le centre de l'inversion, l'origine a une image dans U_n et que la trace de la sphère unité sur $\{x_n = 0\}$ reste fixe. Il reste à vérifier que la restriction $f_U : B \rightarrow U$ est bien une isométrie. ■

1.3. Groupes d'isométries

1.3.1. *L'hyperboloïde.* Par définition, le groupe $O(n, 1)$ opère par isométries sur $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$, et préserve $\{q = -1\}$. Le sous-groupe qui préserve $\mathcal{H}$ s'identifie à $PO(n, 1)$ (si $g(H) \neq H$ pour $g \in O(n, 1)$, alors $-g(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$). Il opère sur $\mathbb{H}^n$ par isométries.

Nous allons considérer deux de ses sous-groupes. Étant donné un réel x , on note D_x la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & 0_{1,n-1} & \operatorname{sh} x \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1,n-1} & 0_{n-1,1} \\ \operatorname{sh} x & 0_{1,n-1} & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Soit $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$; on a

$$\begin{aligned} q(D_x \cdot p) &= (p_1 \operatorname{ch} x + p_{n+1} \operatorname{sh} x)^2 + \sum_{j=2}^{n-1} p_j^2 - (p_1 \operatorname{sh} x + p_{n+1} \operatorname{ch} x)^2 \\ &= (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) p_1^2 + \sum_{j=2}^{n-1} p_j^2 + (\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x) p_{n+1}^2 \\ &= q(p). \end{aligned}$$

Donc D_x est bien une isométrie. De plus, on a $D_x(0_n, 1) = (\operatorname{sh} x, 0_{n-1}, \operatorname{ch} x)$ et $D_x \circ D_y = D_{x+y}$.

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on définit

$$g_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie sans mal que g_A est une isométrie, et que le point $(0_n, 1)$ est fixé par g_A .

Si p et p' sont fixés, le lieu des points q équidistants est un hyperplan H . En effet, $d_{\mathcal{H}}(p, q) = d_{\mathcal{H}}(p', q)$ entraîne $\langle p, q \rangle = \langle p', q \rangle$ soit $\langle p - p', q \rangle = 0$.

Or $\langle p - p', p - p' \rangle = -2(1 + \langle p, p' \rangle) = (-2)(1 - \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p, p')) > 0$. Donc l'orthogonal de $(p - p')$ est bien un hyperplan (par le théorème de Sylvester).

Etant donné un hyperplan H qui coupe $\mathcal{H}$, on note $r_H : x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u$ où u est un vecteur unitaire orthogonal à H . On a

$$\begin{aligned} \langle r_H(p), r_H(q) \rangle &= \langle p, q \rangle + 4\langle p, u \rangle \langle q, u \rangle - 2(\langle p, u \rangle \cdot \langle u, q \rangle + \langle q, u \rangle \cdot \langle p, u \rangle) \\ &= \langle p, q \rangle \end{aligned}$$

donc r_H est une isométrie.

Si $p \in H$, alors $r_H(p) = p$. Sinon,

$$\begin{aligned} (r_H \circ r_H)(p) &= r_H(p) - 2\langle r_H(p), u \rangle u \\ &= p - 2\langle p, u \rangle u - 2(\langle p, u \rangle - 2\langle p, u \rangle)u \\ &= p \end{aligned}$$

Par suite, si $q \in H$, on a $d_{\mathcal{H}}(p, q) = d_{\mathcal{H}}(r_H(p), q)$.

THÉORÈME 1.11. — *On a les propriétés suivantes.*

- (1) *Les points fixes d'une isométrie non triviale sont contenus dans un hyperplan. Ils s'identifient à un hyperplan si et seulement si l'isométrie est une réflexion.*
- (2) *Le groupe des isométries est engendré par les réflexions.*
- (3) *Toute isométrie définie sur une partie de $\mathbb{H}^n$ se prolonge en une isométrie globale.*

DÉMONSTRATION. Soit g une isométrie non triviale. Si $g(p) \neq p$, et si q est un point fixe, alors $d_{\mathcal{H}}(p, q) = d_{\mathcal{H}}(g(p), g(q)) = d_{\mathcal{H}}(g(p), q)$. Donc q est dans l'hyperplan H médian défini par $\{p, g(p)\}$. Si tous les points de H sont fixes, alors $g \circ r_H$ admet $H \cup \{p\}$ comme points fixes. Donc $g \circ r_H$ est l'application identique. Ceci établit (1).

SCHOLIE 1.12. — Soient $k \geq 1$, et $(p_j, q_j)_{1 \leq j \leq k}$ des points tels que $d_{\mathcal{H}}(p_i, p_j) = d_{\mathcal{H}}(q_i, q_j)$ pour tous i, j . Alors il existe une isométrie g composée de réflexions telle que $g(p_j) = q_j$ pour tout j .

Démonstration. — On procède par récurrence. Si $k = 1$, on considère la réflexion par rapport à l'hyperplan médian de $\{p_1, q_1\}$. Supposons que l'on a défini une isométrie g telle que $g(p_j) = q_j$ pour $j < k$. Si $g(p_k) \neq q_k$, on considère l'hyperplan H médian de $\{g(p_k), q_k\}$.

Pour $j < k$, on a $d_{\mathcal{H}}(q_j, g(p_k)) = d_{\mathcal{H}}(g(p_j), g(p_k)) = d_{\mathcal{H}}(p_j, p_k) = d_{\mathcal{H}}(q_j, q_k)$. Donc $q_j \in H$. Par conséquent $r_H \circ g$ transforme p_j en q_j pour tout $j \leq k$. $\square$

On choisit $n + 1$ points (p_j) , $0 \leq j \leq n$, sur $\mathcal{H}$ en position générale (ils ne sont contenus dans aucun hyperplan). Soit g une isométrie. On construit à l'aide de la scholie une isométrie g' composée de réflexions qui transforme p_j en $g(p_j)$. Par conséquent, $g^{-1} \circ g'$ fixent $n + 1$ points contenus dans aucun hyperplan : il s'agit de l'identité d'après (1).

Soient $E \subset \mathcal{H}$ et $g : E \rightarrow F = g(E)$ une isométrie. On considère une suite (p_j) de points dans E dense dans E . On construit une suite d'isométries globales (g_k) telles que $g_k(p_j) = g(p_j)$ pour tout $j \leq k$. Ou bien on montre que cette suite est stationnaire, ou bien on applique le théorème d'Ascoli pour extraire une limite de (g_k) . La limite prolongera g . $\blacksquare$

EXERCICE 1.13. — Le groupe d'isométries opère transitivement sur le fibré des repères orthonormés. Autrement dit, soient p_1, p_2 dans $\mathbb{H}^n$, soient $(e_1 \dots e_n)$ une base orthonormée de $T_{p_1}\mathbb{H}^n$ et $(f_1 \dots f_n)$ une base orthonormée de $T_{p_2}\mathbb{H}^n$. Alors il existe une isométrie qui transforme p_1 en p_2 et e_j en f_j .

1.3.2. Les modèles conformes.

PROPOSITION 1.14. — Les réflexions sont les restrictions des inversions par rapport aux sphères de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ orthogonales au bord du modèle cerné.

DÉMONSTRATION. Dans $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$, le groupe $O_n(\mathbb{R}) \times \{1\}$ opère par isométries sur $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ et $(B \times \{0\}, d_B)$ et cette action commute avec l'isométrie f_B . Tout hyperplan H passant par $(0_n, 1)$ coupe B en un hyperplan médiateur, et la restriction de la réflexion r_H à B devient une réflexion euclidienne. En conjuguant par f_U , chaque hyperplan H devient une sphère orthogonale à $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1} \times \{0\}$ et r_H agit par inversion sur U_n .

On observe que les similitudes (euclidienne) de $\mathbb{R}^n$ qui préservent U_n sont des isométries hyperboliques. En effet, une telle similitude est de la forme $\sigma : x \mapsto \lambda A \cdot x + t$, où $\lambda > 0$,

$t \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ et $A \in O_{n-1}(\mathbb{R}) \times \{1\}$. Par conséquent $T_x \sigma = \lambda A$ et, si $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et $v \in T_x U$,

$$\langle T_x \sigma(v), T_x \sigma(v) \rangle_{\sigma(x)} = \frac{|\lambda v|_e^2}{|\lambda x_n|_e^2} = \frac{|v|_e^2}{|x_n|_e^2} = \langle v, v \rangle_x.$$

Or ces similitudes opèrent transitivement sur U_n et conjuguent les inversions en d'autres inversions. Par conséquent, toute réflexion de $\mathcal{H}$ est conjuguée à une inversion.

On obtient le résultat pour B en utilisant f_U . ■

En dimension 2, les transformations conformes sont holomorphes ou anti-holomorphes. Dans le modèle du disque unité $\mathbb{D}$, celles qui sont holomorphes sont de la forme

$$z \in \mathbb{D} \mapsto \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

où $\lambda \in \mathbb{S}^1$ et $a \in \mathbb{D}$.

Dans le cas du demi-plan supérieur U_2 , on peut utiliser la transformation

$$z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1 - iz}{z - i} \in U_2$$

qui est une isométrie. Les isométries qui préservent l'orientation sont donc isomorphes à $\mathbb{PSL}_2(\mathbb{R})$. Etant donnés deux fois trois points distincts de $\widehat{\mathbb{R}}$, il existe une unique isométrie de U_2 qui transforme le premier triplet (ordonné) en le second.

On en tire plusieurs corollaires.

COROLLAIRE 1.15. — *Les géodésiques sont les arcs de cercles de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ orthogonaux au bord.*

DÉMONSTRATION. Dans $\mathcal{H}$, on obtient les géodésiques comme intersection d'hyperplans. Par conséquent, ces géodésiques apparaissent dans les modèles conformes comme intersection de sphères orthogonales au bord. ■

EXERCICE 1.16. — *Dans le modèle du demi-espace, montrer, sans faire appel au Théorème 1.4, que seul le segment vertical $[p, q]$ est géodésique entre $p = (0_{n-1}, x)$ et $q = (0_{n-1}, y)$. En déduire, en utilisant le groupe d'isométries de U_n , que $\mathbb{H}^n$ est uniquement géodésique ainsi que le corollaire précédent.*

COROLLAIRE 1.17. — *Soient r_1, r_2 deux rayons géodésiques. Ou bien r_1 et r_2 aboutissent au même point de $\mathbb{S}^{n-1}$ et il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\mathbb{H}^n}(r_1(t+u), r_2(t)) = 0$; sinon $d((r_1(t), r_2(t))) \gtrsim t$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que les rayons aboutissent au même point. Dans le modèle du demi-espace, on peut supposer que c'est le point à l'infini. Dans ce cas, les deux rayons sont verticaux, et on les paramètre par leur altitude, de sorte que l'altitude de $r_j(t)$ est $a_j + t$.

Posons $u = a_2 - a_1$ pour que $r_1(t + u)$ et $r_2(t)$ soient à la même altitude $t + a_2$ et à distance euclidienne $e \geq 0$. Dans ce cas,

$$d(r_1(t + u), r_2(t)) \leq \int_0^e \frac{ds}{a_2 + t} = \frac{e}{a_2 + t}$$

qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

Si r_1 et r_2 ont des limites différentes, on se place dans la situation où $r_1(\infty) = \infty$ et $r_2(\infty) = a \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dans ce cas, la géodésique verticale γ telle que $\gamma(-\infty) = a$ et $\gamma(\infty) = \infty$ est asymptote aux deux rayons. Par conséquent,

$$d(r_1(t), r_2(t)) \geq d(\gamma(t+u_1), \gamma(-t+u_2)) - (d(r_1(t), \gamma(t+u_1)) + d(r_2(t), \gamma(-t+u_2))) \geq 2t + o(1).$$

■

COROLLAIRE 1.18. — *On se place dans un modèle conforme. Soient x, y deux points distincts de $\mathbb{H}^n$, et γ la géodésique passant par x, y . On note x_∞ le point du bord, à l'infini du rayon $[y, x)$ et y_∞ du rayon $[x, y)$. On a*

$$d(x, y) = \log[x_\infty : y : x : y_\infty].$$

DÉMONSTRATION. Dans le modèle du demi-espace, on place la géodésique (x, y) verticalement, avec x sous y de sorte que $x = (0_{n-1}, x_n)$ et $y = (0_{n-1}, y_n)$. On a

$$d(x, y) = \log \frac{y_n}{x_n} = \log[0 : y : x : \infty] = \log[x_\infty : y : x : y_\infty].$$

■

1.4. Quelques propriétés

On établit quelques propriétés des espaces hyperboliques qui marquent la différence avec la géométrie euclidienne standard.

1.4.1. La loi hyperbolique du cosinus.

DÉFINITION 1.19 (Triangle). — *Un triangle est la donnée de trois points munis de segments qui les relient deux à deux.*

PROPOSITION 1.20. — *Soient p_1, p_2 et p_3 trois points distincts de $\mathbb{H}^n$ qui forment un triangle. On note α l'angle entre les segments $[p_1, p_2]$ et $[p_1, p_3]$. On a*

$$\operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_2, p_3) = \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) - \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) \cos \alpha.$$

DÉMONSTRATION. Soit u_j le vecteur unitaire qui engendre $[p_1, p_j]$, $j = 2, 3$.

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_2, p_3) &= -\langle p_2, p_3 \rangle \\ &= -\langle \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) p_1 + \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) u_2, \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) p_1 + \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) u_3 \rangle \\ &= \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) - \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) \langle u_2, u_3 \rangle \\ &= \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) - \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_3) \cos \alpha \end{aligned}$$

■

On dit qu'un sommet du triangle est idéal s'il est à l'infini. Autrement dit, dans le modèle de la boule, le sommet se trouve sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Un triangle est idéal si tous ses sommets sont à l'infini.

On remarque que si un sommet est idéal, l'angle en ce point est nul, car les rayons géodésiques qui y aboutissent sont tangents. On peut le voir aussi avec la loi hyperbolique du cosinus : on se donne trois points p_1 , p_2 et p , et on désigne par α l'angle en p . On fixe p_1 et p_2 , et on laisse tendre p à l'infini le long d'un rayon $r(t)$. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, p_2) &= \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_1, r(t)) \operatorname{ch} d_{\mathcal{H}}(p_2, r(t)) - \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_1, r(t)) \operatorname{sh} d_{\mathcal{H}}(p_2, r(t)) \cos \alpha_t \\ &= e^{d_{\mathcal{H}}(p_1, r(t)) + d_{\mathcal{H}}(p_2, r(t))} (1 - \cos \alpha_t) + o(1). \end{aligned}$$

Puisque le terme de gauche est constant, on a $\cos \alpha_t$ qui tend vers 1, donc α_t tend vers 0.

1.4.2. Sous-espaces géodésiques.

PROPOSITION 1.21. — *Les sous-espaces complets et totalement géodésiques sont isométriques à des $\mathbb{H}^k$.*

DÉMONSTRATION. On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soit F est un sous-espace totalement géodésique et complet passant par un point p . On en extrait une base. En utilisant les matrices de $O_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $p = (\operatorname{sh} x, 0_{n-1}, \operatorname{ch} x)$, puis en appliquant D_{-x} , que $p = (0_n, 1)$. On considère l'ensemble V de tous les vecteurs de $T_p \mathbb{H}^n$ qui engendrent F : si $v \in V$, on note $\gamma_v : t \mapsto p \operatorname{ch} t + (v/|v|_g) \operatorname{sh} t$; on a donc $F = \cup_{v \in V} \gamma_v(\mathbb{R})$.

SCHOLIE 1.22. — *Un triangle est contenu dans un sous-espace isométrique à $\mathbb{H}^2$.*

Démonstration. — On se donne trois points (p_1, p_2, p_3) . Les arêtes sont contenues dans les plans engendrés par (p_1, p_2) , (p_1, p_3) , (p_2, p_3) , donc dans l'espace engendré par (p_1, p_2, p_3) . En faisant opérer $\operatorname{PO}(n, 1)$, on peut s'arranger pour que $p_1 = (0_n, 1)$, $p_2 \in \mathbb{R}_+(1, 0_{n-1}, -1)$ et $p_3 \in \mathbb{R}(1, 0_{n-1}, -1) \oplus \mathbb{R}(0, 1, 0_{n-2}, -1)$. □

Cette scholie montre que $V \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension k . En effet, si $v, w \in V$, alors (p, v, w) engendre un espace de dimension 3 dont la trace sur $\mathcal{H}$ est isométrique à $\mathbb{H}^2$, donc $(v + w) \in V$. En faisant opérer $O_n(\mathbb{R})$ sur $T_p \mathbb{H}^n$, on peut supposer que $V = \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. Par suite,

$$F = (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{H}.$$

■

EXERCICE 1.23. — *Soit $X \subset \mathbb{H}^n$. Montrer qu'il existe un unique espace de dimension minimale isométrique à un $\mathbb{H}^k$ qui contient X .*

1.4.3. *Formule de Gauss-Bonnet.*

PROPOSITION 1.24. — *Soit Δ un triangle hyperbolique d'angle α , β et γ . On a*

$$\text{Aire } \Delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

En particulier, la somme des angles d'un triangle est strictement plus petite que π .

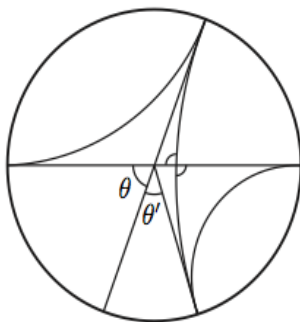
DÉMONSTRATION. Un triangle est contenu dans un sous-espace isométrique à $\mathbb{H}^2$. On se place dans le modèle du demi-plan supérieur. La démonstration se passe en trois temps. Dans un premier temps, on calcule l'aire d'un triangle idéal, dont les trois sommets sont à l'infini. En utilisant une isométrie, on peut supposer que les sommets sont -1 , 1 et ∞ . Du coup, les géodésiques sont l'arc du cercle unité joignant (-1) et 1 et les demi-droites verticales issues de ces points. Les angles sont tous les trois nuls.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \text{Aire } \Delta &= \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} \\ &= \pi \end{aligned}$$

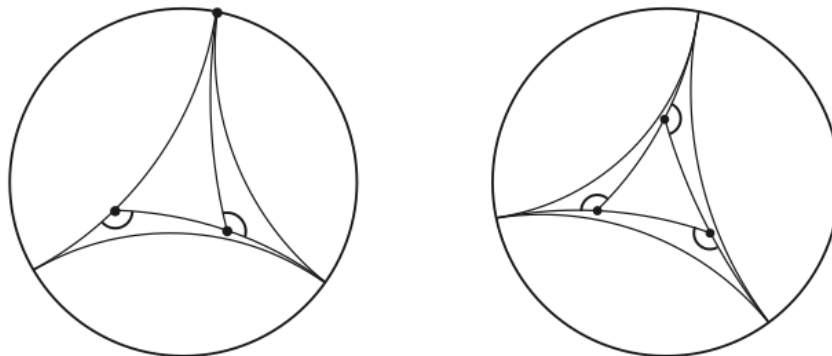
en posant $x = \sin \theta$.

Dans un second temps, on note $A(\theta)$ l'aire d'un triangle ayant deux sommets à l'infini et un sommet fini d'angle $\pi - \theta$. On observe que si θ est fixé, deux tels triangles sont bien isométriques car les isométries sont conformes. De plus, $\theta \in [0, \pi] \mapsto A(\theta)$ est clairement continue, et si θ , θ' et $\theta + \theta' \in [0, \pi]$, alors $A(\theta + \theta') = A(\theta) + A(\theta')$.



Par conséquent, pour tout rationnel r tel que $r\theta \in [0, \pi]$, on a aussi $A(r\theta) = rA(\theta)$. Enfin, par continuité, on obtient aussi $A(r\theta) = rA(\theta)$ pour tout réel. Puisque $A(\pi) = \pi$ (cas du triangle idéal), on obtient $A(\theta) = \theta$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. Autrement dit, l'aire du triangle ayant deux angles nuls et un angle θ est $\pi - \theta$.

Le troisième temps consiste à inclure n'importe quel autre triangle Δ dans un triangle Δ_0 ayant au moins deux sommets à l'infini, et d'écrire Δ_0 comme la réunion disjointe de Δ avec d'autres triangles ayant au moins deux sommets à l'infini.



■

1.4.4. Distance à un sous-espace.

PROPOSITION 1.25. — *La distance d'un point p à un sous-espace totalement géodésique F est réalisé par un unique point q tel que $[p, q]$ est orthogonal à F .*

DÉMONSTRATION. On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. On traite le cas d'une géodésique. Le cas général s'en déduit. On considère d'abord une géodésique $\gamma : t \mapsto q \cosh t + u \sinh t$. On s'intéresse à $f(t) = \text{ch } d_{\mathcal{H}}(p, \gamma(t)) = -\langle p, \gamma(t) \rangle$. On dérive : $f'(t) = -\langle p, \gamma'(t) \rangle$ donc la dérivée est nulle si et seulement si $\langle p, \gamma'(t) \rangle = 0$. Dans ce cas, on a bien $\langle p - \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Si on a deux perpendiculaires, disons, $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$, alors le triangle $(p, \gamma(t), \gamma(t'))$ aurait deux angles droits, ce qui contredit la formule de Gauss-Bonnet. ■

EXERCICE 1.26. — *Montrer que la distance d'un point à un ensemble convexe fermé est réalisé par un unique point.*

1.4.5. Les triangles sont fins.

PROPOSITION 1.27. — *Soit Δ un triangle hyperbolique. La distance d'un point x aux deux côtés opposés est borné par $\log(1 + \sqrt{2})$.*

DÉMONSTRATION. Pour cela, on se place dans le modèle du demi-plan supérieur. Soit $x \in \Delta$ qui n'est pas un sommet. On place Δ de sorte que le côté contenant x soit sur l'arc de cercle $[-1, 1]$, et qu'un autre côté soit vertical. Alors Δ est inclus dans le triangle de sommets (-1) , 1 et ∞ . Donc l'estimation initiale est majorée par ce cas-ci. Le point x de l'arc qui maximise la distance aux verticales est le point i . Par une similitude complexe, on se ramène à calculer la longueur de l'arc γ du cercle unité joignant $(1 + i)/\sqrt{2}$ à i . On paramètre cet arc par $\gamma : \theta \in [\pi/4, \pi/2] \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$. On a donc

$$d(i, \{-1\} \times \mathbb{R}_+) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \log(1 + \sqrt{2}).$$

1.4.6. Entropie volumique.

PROPOSITION 1.28. — Soient $n \geq 1$ et $B(R) \subset \mathbb{H}^n$ une boule de rayon R . Alors

$$v_g(B(R)) \asymp e^{R(n-1)}.$$

On dit que $\mathbb{H}^n$ a pour entropie volumique

$$v = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log v_g(B(R)) = n - 1.$$

DÉMONSTRATION. Dans le modèle de la boule, si ρ est le rayon euclidien d'une boule centrée en zéro, alors il correspond à une boule de rayon hyperbolique R de l'ordre de $-\log(1 - \rho)$ à une constante additive près.

$$v_g(B(R)) = \int_{B_e(\rho)} \frac{4^{n/2} dx}{(1 - |x|^2)^n} \asymp \int_0^\rho \frac{r dr}{(1 - r^2)^n} \asymp (1 - \rho)^{-(n-1)}.$$

Du coup, on trouve $v_g(B(R)) \asymp e^{R(n-1)}$. ■

1.4.7. *Produit de Gromov.* On peut se référer à [A et al., CDP, GdlH] pour ce paragraphe.

DÉFINITION 1.29 (Produit de Gromov). — Le produit de Gromov de deux points x, y de $\mathbb{H}^n$ par rapport à $w \in \mathbb{H}^n$ est

$$(x|y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)).$$

EXERCICE 1.30. — (1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ telle que, pour tous $w, x, y \in \mathbb{H}^n$, on ait

$$|d(w, [x, y]) - (x|y)_w| \leq \delta.$$

(2) Montrer qu'il existe $\delta' > 0$ telle que, pour tous $x, y, z, w \in \mathbb{H}^n$, on ait

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta'.$$

Annexe A. GÉOMÉTRIE CONFORME

On peut consulter [Thu, Cox, Spi]

A.1. Similitudes euclidiennes

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Une isométrie est une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $|f(x) - f(y)|_e = |x - y|_e$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si p et p' sont fixés, le lieu des points q équidistants est un hyperplan H . Soit m le milieu de (p, p') . Si $|p - q|_e = |p' - q|_e$ alors $|(p - m) + (m - q)|_e^2 = |(p' - m) + (m - q)|_e^2$. On obtient $2((p - m) \cdot (m - q)) = 2((p' - m) \cdot (m - q))$ soit $(p - p') \cdot (m - q) = 0$.

Etant donné un hyperplan H , on note $r_H : x \mapsto x - 2(x \cdot u)u$ où u est un vecteur unitaire orthogonal à H . On a

$$\begin{aligned} r_H(p) \cdot r_H(q) &= p \cdot q + 4(p \cdot u)(q \cdot u) - 2((p \cdot u) \cdot (u \cdot q) + (q \cdot u) \cdot (p, u)) \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

donc r_H est une isométrie.

Si $p \in H$, alors $r_H(p) = p$. Sinon,

$$\begin{aligned} (r_H \circ r_H)(p) &= r_H(p) - 2(r_H(p) \cdot u)u \\ &= p - 2(p \cdot u)u - 2((p \cdot u) - 2(p, u))u \\ &= p \end{aligned}$$

Par suite, si $q \in H$, on a $|p - q|_e = |r_H(p) - q|_e$.

THÉORÈME A.1. — *On a les propriétés suivantes.*

- (1) *Les points fixes d'une isométrie non triviale sont contenus dans un hyperplan. Ils s'identifient à un hyperplan si et seulement si l'isométrie est une réflexion.*
- (2) *Le groupe des isométries est engendré par les réflexions, et s'écrit sous la forme $x \mapsto A \cdot x + v$, $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit g une isométrie non triviale. Si $g(p) \neq p$, et si q est un point fixe, alors $|p - q|_e = |g(p) - g(q)|_e = |g(p) - q|_e$. Donc q est dans l'hyperplan H médian défini par $\{p, g(p)\}$. Si tous les points de H sont fixes, alors $g \circ r_H$ admet $H \cup \{p\}$ comme points fixes. Donc $g \circ r_H$ est l'application identique. Ceci établit (1).

SCHOLIE A.2. — *Soient $k \geq 1$, et $(p_j, q_j)_{1 \leq j \leq k}$ des points tels que $|p_i - p_j|_e = |q_i - q_j|_e$ pour tous i, j . Alors il existe une isométrie g composée de réflexions telle que $g(p_j) = q_j$ pour tout j .*

Démonstration. — On procède par récurrence. Si $k = 1$, on considère la réflexion par rapport à l'hyperplan médian de $\{p_1, q_1\}$. Supposons que l'on a défini une isométrie g telle que $g(p_j) = q_j$ pour $j < k$. Si $g(p_k) \neq q_k$, on considère l'hyperplan H médian de $\{g(p_k), q_k\}$.

Pour $j < k$, on a $|q_j - g(p_k)|_e = |g(p_j) - g(p_k)|_e = |p_j - p_k|_e = |q_j - q_k|_e$. Donc $q_j \in H$. Par conséquent $r_H \circ g$ transforme p_j en q_j pour tout $j \leq k$. $\square$

On choisit $n + 1$ points (p_j) , $0 \leq j \leq n$, en position générale (ils ne sont contenus dans aucun hyperplan). Soit g une isométrie. On construit à l'aide de la scholie une isométrie g' composée de réflexions qui transforme p_j en $g(p_j)$. Par conséquent, $g^{-1} \circ g'$ fixent $n + 1$ points contenus dans aucun hyperplan : il s'agit de l'identité d'après (1).

Si g est une isométrie, $g - g(0)$ fixe l'origine. Il s'agit donc d'une isométrie linéaire. $\blacksquare$

Rappelons que, dans une base adaptée, une isométrie orthogonale s'exprime par une matrice diagonale par blocs dont chaque bloc est une rotation. Une telle application est donc la composée de réflexions par rapport à des hyperplans.

Par définition, une similitude est une transformation $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $\lambda > 0$ qui vérifie $|f(x) - f(y)|_e = \lambda|x - y|_e$. Par conséquent f/λ est isométrique. Donc une similitude est une application de la forme $\lambda A + v$, $\lambda > 0$, $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

A.2. Inversions

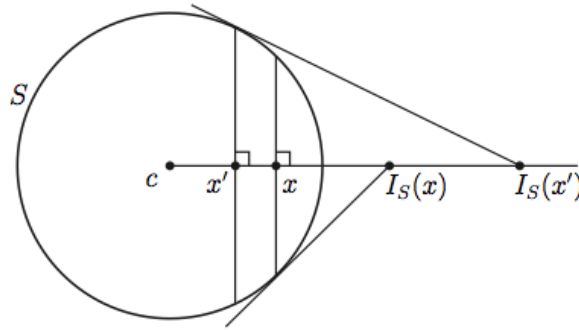
On se place dans $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa structure euclidienne.

DÉFINITION A.3 (Inversion). — Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une sphère de dimension n de centre c et de rayon $R > 0$. L'inversion par rapport à S est l'application $I_S : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{c\}$ définie par

$$I_S(x) = c + \frac{R^2}{|x - c|_e^2}(x - c)$$

Géométriquement, $I_S(x)$ se trouve sur la demi-droite $[c, x)$ tel que

$$|I_S(x) - c|_e |x - c|_e = R^2.$$

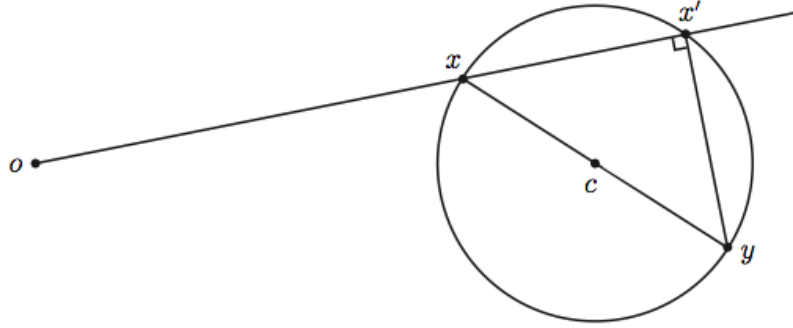


PROPOSITION A.4. — Soit I_S l'inversion par rapport à une sphère S . On a les propriétés suivantes.

- (1) Une inversion est une involution qui fixe S ponctuellement.
- (2) Les sphères invariantes différentes de S sont celles qui coupent S orthogonalement.
- (3) Les sphères et espaces affines sont préservés. Plus précisément,
 - (a) les sphères disjointes de c sont transformées en sphères ;
 - (b) les sphères passant pas c sont transformées en espaces affines, et réciproquement ;
 - (c) les espaces affines passant par c sont préservés.
- (4) La transformation est conforme (préserve les angles).

On rappelle quelques propriétés élémentaires des cercles et des sphères qui permettent d'établir cette proposition.

LEMME A.5. — Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ une sphère et $o \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Il existe une constante K telle que, pour toute demi-droite issue de o qui coupe S en deux points (éventuellement confondus) x et x' , on a $|x - o|_e \cdot |x' - o|_e = K$.



Démonstration. — On note $\rho = |o - c|^2 - R^2$. Si $[p, p']$ est un diamètre, alors $(p - o) \cdot (p' - o) = \rho$. En effet,

$$\begin{aligned} (p - o) \cdot (p' - o) &= ((p - c) + (c - o)) \cdot ((p' - c) + (c - o)) \\ &= -|p - c|_e^2 + |c - o|_e^2 \\ &= \rho. \end{aligned}$$

On suppose qu'une demi-droite issue de o coupe S en deux points x, x' . Alors, notons y le point diamétralement opposé de x . Le triangle (x, x', y) est rectangle en x' , donc $(x - o) \cdot (x' - y) = 0$.

$$\begin{aligned} (x - o) \cdot (x' - o) &= (x - o) \cdot ((x' - y) + (y - o)) \\ &= (x - o) \cdot (y - o) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

□

DÉMONSTRATION. On considère un point $p \notin S$. Soit S' une sphère contenant p et $I_S(p)$ et de centre un point c' . Les points $c, p, I_S(p)$ et c' sont coplanaires puisque les trois premiers sont alignés. Dans ce plan P , les cercles $P \cap S$ et $P \cap S'$ ont même rayon que leur sphère. On applique le Lemme A.5 pour en déduire que les points d'intersection de toute demi-droite issue de c qui coupe $S' \cap P$ sont image l'un de l'autre par I_S . En particulier, si le point d'intersection d'une demi-droite de tangence est fixe : il appartient à S et les sphères se coupent orthogonalement en ce point.

Si p' est un autre point de la sphère, on considère le plan P' défini par c , p et p' . Il vient que $I_S(p') \in S'$. Donc la sphère est préservée.

Soit maintenant une sphère $S' \neq S$ invariante. Prenons $p \in S'$. Le raisonnement précédent montre que S' et S sont orthogonales. Réciproquement, si S et S' sont des sphères orthogonales, tout point d'intersection est fixe, et le Lemme A.5 montre que S' est invariante.

Un sous-espace affine contenant c est clairement invariant. Soit H un espace affine ne contenant pas c . Quitte à se restreindre au plus petit sous-espace affine contenant H et c , on peut supposer que H est un hyperplan. On se fixe $p \in H$ qui réalise la distance de c à H . Nous allons montrer que l'image de toute droite de H passant par p se transforme en un cercle de diamètre $[c, I_S(p)]$. Soit p' un autre point. Puisque $|c - p|_e |c - I_S(p)|_e = |c - p'|_e |c - I_S(p')|_e$ et les angles des triangles (c, p, p') et $(c, I_S(p'), I_S(p))$ sont identiques en c , ces triangles sont semblables. En particulier, le second triangle a un angle droit en $I_S(p')$ ce qui signifie qu'il est sur le cercle de diamètre $[c, I_S(p)]$. Cet argument en sens inverse montre qu'une sphère passant par c s'inverse en un hyperplan l'évitant.

Soit maintenant S' une sphère disjointe de c . On note K' le nombre associé par le Lemme A.5 signé selon que c soit intérieur (négativement) ou extérieur (positivement) à la sphère. On considère l'homothétie D de centre c et de rapport R^2/K' . Soient p, p' deux points de S' sur le même rayon issu de c , et posons $q = D(p')$.

On a

$$|q - c|_e |p - c|_e = \frac{R^2}{K'} |p' - c|_e |p - c|_e = R^2.$$

Donc $q = I_S(p)$. De même, $I_S(p') = D(p)$. On en déduit que $I_S(S') = D(S')$.

Pour montrer qu'une inversion est conforme, on a deux méthodes. L'une par le calcul, simple et direct. L'autre par un raisonnement plus géométrique. Par le calcul, on peut se ramener en conjuguant notre inversion par une similitude à la réflexion par rapport à la sphère unité. On considère donc $f(x) = x/|x|_e^2$. Du coup, on a

$$T_x f(v) = \frac{v}{|x|_e^2} - \frac{2(x \cdot v)x}{|x|_e^4}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} T_x f(v) \cdot T_x f(v) &= \frac{|v|_e^2}{|x|_e^4} - \frac{4(x \cdot v)^2}{|x|_e^6} + \frac{4(c \cdot v)^2 |x|_e^2}{|x|_e^6} \\ &= \frac{|v|_e^2}{|x|_e^4}. \end{aligned}$$

Par suite, f transforme la métrique euclidienne en une métrique qui lui est conforme.

Le raisonnement géométrique est plus long. Tout d'abord, on considère deux hyperplans H_1 et H_2 qui contiennent un point $p \notin S$. On considère les sphères S_1 et S_2 tangentes à H_1 et H_2 et passant par $I_S(p)$. Celles-ci sont orthogonales à S , donc invariantes par I_S , et leur angle au point $I_S(p)$ est identique à celui en p . (pour $n = 2$, cela suffit essentiellement pour conclure).

On se donne maintenant un vecteur unitaire v en p orthogonale à une sphère S' qui passe par p et $I_S(p)$. Ce vecteur se présente comme l'intersection de $n - 1$ hyperplans orthogonaux deux à deux et à S' . Par l'argument précédent, leurs images le sont aussi, ainsi qu'à S' . Donc $T_p I_S(v)$ est normale à S' en $I_S(p)$.

On se donne maintenant deux vecteurs v_1 et v_2 issus de p . Soient H_1 et H_2 des hyperplans passant par p orthogonaux à v_1 et v_2 . On considère les sphères S_1 et S_2 tangentes à H_1 et H_2 et passant par $I_S(p)$. Celles-ci sont orthogonales à S , donc invariantes par I_S , et leur angle au point $I_S(p)$ est identique à celui en p . Par conséquent, leurs normales font le même angle aussi, ainsi que leurs normales : I_S est conforme au point p . On traite le cas $p \in S$ par continuité. ■

EXERCICE A.6. — *Montrer que la composée de deux inversions par rapport à des sphères concentriques est une similitude. Montrer la réciproque.*

A.3. Espace étendu

A.3.1. *Projection stéréographique.* On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et on considère la sphère S de centre $o = (0_n, -1)$ de rayon $\sqrt{2}$. La projection stéréographique de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est la restriction de I_S . Puisque $\mathbb{S}^n$ contient le centre de S , son image est un espace affine. Il contient les points de $S \cap \mathbb{S}^n$, soit $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$. On a bien $I_S : \mathbb{S}^n \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On pose $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ que l'on identifie *via* la projection stéréographique à $\mathbb{S}^n$ munie de sa structure conforme.

Toute inversion de $\mathbb{R}^n$ se prolonge en une transformation conforme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Par extension, on appelle « sphère » de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ une sphère de $\mathbb{R}^n$, ou un hyperplan affine $P \cup \{\infty\}$. Du coup, *l'inversion ou la réflexion par rapport à une sphère donnée préserve les sphères.*

A.3.2. *Groupe de Möbius.* On définit le birapport de quatre points distincts x_1, x_2, x_3, x_4 de $\mathbb{R}^n$ par

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{|x_1 - x_2|_e |x_3 - x_4|_e}{|x_1 - x_3|_e |x_2 - x_4|_e}.$$

On le prolonge à $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en passant à la limite quand un point va vers l'infini. Supposons par exemple que l'on fait tendre x_4 vers l'infini. On a

$$|x_2 - x_4|_e \leq |x_3 - x_4|_e + |x_2 - x_3|_e = |x_3 - x_4|_e \left(1 + \frac{|x_2 - x_3|_e}{|x_3 - x_4|_e}\right)$$

et

$$|x_2 - x_4|_e \geq |x_3 - x_4|_e - |x_2 - x_3|_e = |x_3 - x_4|_e \left(1 - \frac{|x_2 - x_3|_e}{|x_3 - x_4|_e}\right).$$

Par conséquent

$$\lim_{x_4 \rightarrow \infty} [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{|x_1 - x_2|_e}{|x_1 - x_3|_e}.$$

THÉORÈME A.7. — *Soit $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ un homéomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *L'homéomorphisme f est un produit de réflexions.*
- (2) *L'homéomorphisme f préserve les sphères.*
- (3) *L'homéomorphisme f préserve le birapport.*
- (4) *L'homéomorphisme est conforme.*

Un homéomorphisme qui vérifie les conditions de ce théorème est une *transformation de Möbius*. Ces transformations forment le groupe de Möbius.

DÉMONSTRATION. Nous montrerons plus tard que les transformations conformes sont caractérisées par les autres propriétés (théorème de Liouville (Théorème 5.44)).

On remarque que le groupe engendré par les inversions vérifie toutes ces propriétés. La seule propriété non triviale est la préservation du birapport d'une inversion. Il suffit de traiter le cas de $I(x) = x/|x|_e^2$. On montre que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|I'(x)| \cdot |I'(y)| \cdot |x - y|_e^2 = |I(x) - I(y)|_e^2.$$

Rappelons que $|I'(x)| = 1/|x|_e^2$. Du coup

$$\begin{aligned} |I(x) - I(y)|_e^2 &= ((I(x) - I(y)) \cdot (I(x) - I(y))) \\ &= (I(x) \cdot I(x)) + (I(y) \cdot I(y)) - 2(I(x) \cdot I(y)) \\ &= \frac{1}{|x|_e^2} + \frac{1}{|y|_e^2} - \frac{2(x \cdot y)}{|x|_e^2 \cdot |y|_e^2} \\ &= \frac{(x \cdot x) - 2(x \cdot y) + (y \cdot y)}{|x|_e^2 \cdot |y|_e^2} \\ &= |I'(x)| \cdot |I'(y)| \cdot |x - y|_e^2 \end{aligned}$$

On en déduit maintenant la préservation du birapport.

Soit f un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Si $f(\infty) \neq \infty$, on note $a = f^{-1}(\infty)$, et on considère l'inversion I par rapport à une sphère centrée en a , sinon, on appelle I l'application identique. On définit enfin la transformation $g : x \mapsto I \circ f(x) - I \circ f(0)$. Cette transformation vérifie $g(0) = 0$ et $g(\infty) = \infty$.

Supposons que f préserve les birapports de quatre points. On traduit cette condition en considérant $0, x, y, \infty$:

$$\frac{|g(x)|_e}{|g(y)|_e} = \frac{|x|_e}{|y|_e}.$$

Notons $\lambda = |g(x)|_e/|x|_e$. Par ailleurs, en prenant $(x, y, 0, \infty)$,

$$\frac{|g(x) - g(y)|_e}{|g(x)|_e} = \frac{|x - y|_e}{|x|_e}$$

donc $|g(x) - g(y)| = \lambda|x - y|$. Soit maintenant z un troisième point,

$$\frac{|g(y) - g(z)|_e}{|g(y) - g(x)|_e} = \frac{|y - z|_e}{|y - x|_e}$$

donc $|g(y) - g(z)| = \lambda|y - z|$ pour tous $y, z \in \mathbb{R}^n$. Par suite, l'application g est une similitude, donc f est un produit d'inversions.

Si f préserve les sphères de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, alors g préserve les hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Par suite, g préserve aussi leur parallélisme. On en déduit que g préserve les sous-espaces affines et leur parallélisme aussi puisqu'on les obtient comme intersection d'hyperplans.

On se fixe deux vecteurs x et y indépendants et l'on considère la construction du parallélogramme de leur somme : on regarde donc les droites $\mathbb{R}x$, $\mathbb{R}y$, $x + \mathbb{R}y$ et $y + \mathbb{R}x$. Leurs images sont dans la même configuration, et on en déduit que $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Par continuité, on a la même relation pour x et y colinéaires. On en déduit facilement que g est linéaire. Comme g préserve les sphères, c'est une similitude. ■

A.3.3. Extension des transformations de Möbius. Soit $n \geq 1$ fixé. Toute réflexion $I_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ se prolonge de manière canonique en une réflexion $I_S : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ en utilisant la même formule. Il en va de même pour les transformations de Möbius.

Réciproquement, si $f : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ est une transformation de Möbius qui préserve $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (resp. $\mathbb{S}^n$), alors f est déterminée par $f|_{\widehat{\mathbb{R}}^n}$ (resp. $f|_{\mathbb{S}^n}$) à réflexion près par rapport à $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (resp. $\mathbb{S}^n$), selon que f préserve ou non les composantes connexes de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \widehat{\mathbb{R}}^n$ (resp. $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$).

En effet, supposons que $f(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \widehat{\mathbb{R}}^n$ et soit $g : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ l'extension canonique de la restriction de f à $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Alors $h = g \circ f^{-1}$ est une transformation de Möbius qui prolonge l'application identique sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Par conséquent, h fixe le point à l'infini, et h est une similitude de facteur 1 : h est donc une isométrie de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui fixe un hyperplan. D'après le Théorème A.1, h est ou bien l'application identique ou bien la réflexion par rapport à $\mathbb{R}^n$. On traite le cas de la sphère en conjuguant f par la projection stéréographique.

On obtient la proposition suivante :

PROPOSITION A.8. — Soient $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité et $f, g, h : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ des transformations de Möbius qui préservent B . Si $h \circ f \circ h^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} = g|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ alors $h \circ f \circ h^{-1} = g$.

DÉMONSTRATION. La transformation de Möbius $h \circ f \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ vaut l'identité sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et fixe la boule unité. Par conséquent, $h \circ f \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ est l'application identique. ■

2. BORD À L'INFINI

On suppose $n \geq 2$. On se place dans le modèle de la boule. On a vu que les isométries étaient données par des produits d'inversions par rapport à des sphères orthogonales à $\mathbb{S}^{n-1}$. Par conséquent, chaque isométrie opère sur $\mathbb{S}^{n-1}$ (sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tout entier, d'ailleurs) par transformations de Möbius.

Nous allons réinterpréter ces résultats de manière plus intrinsèque en s'appuyant sur [EO, Bou1, Bou2].

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rayons de $\mathbb{H}^n$ sur lequel on met la relation d'équivalence $r \sim r'$ si $d_H(r, r') < \infty$. On désigne $\mathcal{R}/\sim$ par $\partial\mathbb{H}^n$. On a une bijection naturelle entre $\partial\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$.

Si $w \in \mathbb{H}^n$ est fixé, on note $\mathcal{R}_w$ les rayons issus de w .

EXERCICE 2.1. — *On a une bijection naturelle entre $\mathcal{R}/\sim$ et $\mathcal{R}_w$ (utiliser le modèle de la boule, par exemple).*

On munit $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ de la topologie suivante. On identifie $\mathbb{H}^n$ aux segments issus de w . Un système de voisinages de $x \in \mathbb{H}^n$ est donné par les boules hyperboliques (de rayon fini). Si $r_0 \in \mathcal{R}$, on écrit $V_{r_0}(R, \varepsilon)$ l'ensemble des rayons r de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ tel que $d(r_0(R), r(R)) \leq \varepsilon$. Une base de voisinage d'un point $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ est donnée par la famille $V_{r_0}(R, \varepsilon)$, où r_0 représente ξ et $R, \varepsilon > 0$.

EXERCICE 2.2. — *Montrer qu'il existe un homéomorphisme entre $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n, |x|_e \leq 1\}$.*

Si $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$, on dit que r aboutit en ξ si r représente ξ .

EXERCICE 2.3. — *Soit X un espace métrique. Rappelons que si $x, y, z \in X$, on pose*

$$(x|y)_z = \frac{1}{2}(|x - z| + |y - z| - |x - y|).$$

Soit $w \in X$ un point base. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ tend vers l'infini si

$$\liminf_{m,n \rightarrow \infty} (x_n|x_m)_w = \infty$$

et on dit que deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers l'infini sont équivalentes si $\lim(x_n|y_n) = \infty$. On note $\partial_G X$ l'ensemble de ces classes d'équivalence. Si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont deux classes d'équivalence, on définit

$$(\underline{x}|\underline{y})_w = \sup_{(x_n)=\underline{x}, (y_n)=\underline{y}} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i|y_j)_w,$$

et on définit $V(\underline{x}, R)$ par l'ensemble des classes $\underline{y}$ telles que $(\underline{x}|\underline{y})_w > R$.

- (1) *Montrer que $\{V(\cdot, R), R > 0\}$, définit une topologie sur $\partial_G X$.*
- (2) *On prend $X = \mathbb{H}^n$, montrer que $\partial_G \mathbb{H}^n$ est homéomorphe à $\partial\mathbb{H}^n$.*
- (3) *On prend $X = \mathbb{R}^n$. Déterminer $\partial\mathbb{R}^n$ (obtenu par les classes des rayons) et $\partial_G \mathbb{R}^n$.*

2.1. Fonctions de Busemann

Soit r un rayon. On considère

$$b_r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(r(t), x) - t.$$

Cette fonction est bien définie puisque, si $t \geq t'$, alors

$$d(r(t), x) - t - d(r(t'), x) + t' \leq d(r(t), r(t')) - |t' - t| \leq 0$$

donc $t \mapsto d(r(t), x) - t$ est décroissante, et minorée par $-d(r(0), x)$.

DÉFINITION 2.4 (Fonction de Busemann, horosphères). — Si $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ et $x, y \in \mathbb{H}^n$, on définit

$$\beta_\xi(x, y) = b_r(x) - b_r(y)$$

où r aboutit en ξ (cette limite est indépendante du rayon car ils sont tous asymptotes). Les lignes de niveaux $\{b_r(x) = L\}$ sont les horosphères.

PROPOSITION 2.5. — On a les propriétés suivantes :

- (1) $\beta_\xi(x, y) = -\beta_\xi(y, x)$.
- (2) $\beta_\xi(x, y) = \beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y)$.
- (3) $|\beta_\xi(x, y)| \leq d(x, y)$, avec égalité si x, y, ξ sont alignés.

On laisse la démonstration de cette proposition en exercice.

PROPOSITION 2.6. — L'application $(\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n) \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y)$ est continue.

DÉMONSTRATION. Puisque

$$|\beta_\xi(x, y) - \beta_\xi(x', y')| \leq |\beta_\xi(x, x')| + |\beta_\xi(y, y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

il suffit d'étudier la continuité de $\xi \mapsto \beta_\xi(x, y)$ à x, y fixés.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$. On considère les rayons $r = [x, \xi)$ et $r' = [y, \xi)$. Prenons $u \in \mathbb{R}$ pour que $d(r(t), r'(t+u))$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. On se fixe R assez grand pour que $d(r(R), r'(R+u)) \leq \varepsilon/2$ et $|\beta_\xi(x, y) - (d(x, r(R)) - d(y, r(R)))| \leq \varepsilon$. Notons $U = V_r(R, \varepsilon) \cap V_{r'}(R+u, \varepsilon)$, un voisinage de ξ .

Soit $z_0 \in U \cap \mathbb{H}^n$ et prenons un point z de $[x, z_0]$ dans la boule $B(r(R), \varepsilon)$ et z' un point de $[y, z_0]$ dans la boule $B(r'(R+u), \varepsilon)$. On a $|d(z_0, z) - d(z_0, z')| \leq 2\varepsilon$, $|d(x, r(R)) - d(x, z)| \leq \varepsilon$ ainsi que $|d(y, r'(R+u)) - d(y, z')| \leq \varepsilon$. Par conséquent

$$|\beta_\xi(x, y) - (d(x, z_0) - d(y, z_0))| \leq 5\varepsilon.$$

■

2.2. Produit de Gromov à l'infini

On montre que le produit de Gromov se prolonge continûment à l'infini et comment retrouver la métrique euclidienne de la sphère unité.

PROPOSITION 2.7. — Soit $w \in \mathbb{H}^n$, $\xi, \zeta \in \partial\mathbb{H}^n$ et γ la géodésique entre ξ et ζ . On a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\xi,\zeta)} (x|y)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w, p) + \beta_\zeta(w, p))$$

où $p \in \gamma$. La limite est indépendante de p et on la note $(\xi|\zeta)_w$. De plus, si x, y sont dans $\mathbb{H}^n$, alors

$$(2.1) \quad (\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y = \frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y)).$$

DÉMONSTRATION. On considère deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers ξ et ζ . On considère $p_n \in [x_n, y_n]$ qui réalise la distance à w . On note que p_n reste dans un ensemble borné. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que p_n tend vers $p \in \gamma$.

On a

$$\begin{aligned}(x_n|y_n)_w &= \frac{1}{2}(d(w, x_n) + d(w, y_n) - d(x_n, y_n)) \\ &= \frac{1}{2}(d(w, x_n) + d(w, y_n) - (d(x_n, p_n) + d(p_n, y_n))) \\ &= \frac{1}{2}(d(w, x_n) - d(x_n, p_n)) + \frac{1}{2}(d(w, y_n) - d(p_n, y_n))\end{aligned}$$

En passant à la limite, on a bien

$$\lim_n (x_n|y_n)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w, p) + \beta_\zeta(w, p)).$$

Soit q un autre point de γ , $\beta_\xi(w, p) = \beta_\xi(w, q) + \beta_\xi(q, p)$ et $\beta_\zeta(w, p) = \beta_\zeta(w, q) + \beta_\zeta(q, p)$. Prenons $x_n, y_n \in \gamma$ qui tendent vers ξ et ζ , et supposons que les points sont alignés sur γ dans l'ordre x_n, p, q, y_n . En écrivant

$$\begin{cases} d(q, x_n) = d(p, x_n) + d(p, q) \\ d(p, y_n) = d(p, q) + d(q, y_n) \end{cases}$$

on obtient

$$d(q, x_n) - d(p, x_n) + d(q, y_n) - d(p, y_n) = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y &= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x, p) + \beta_\zeta(x, p)) - \frac{1}{2}(\beta_\xi(y, p) + \beta_\zeta(y, p)) \\ &= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x, p) - \beta_\xi(y, p)) + \frac{1}{2}(\beta_\zeta(x, p) - \beta_\zeta(y, p)) \\ &= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y))\end{aligned}$$

■

PROPOSITION 2.8. — On choisit w comme étant l'origine de la boule et a, b deux points distincts de la sphère. On a

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} 2e^{-(x|y)_w} = |a - b|_e.$$

DÉMONSTRATION. D'une part, on a $|a - b|_e = 2 \sin \theta/2$, où θ est l'angle du triangle (euclidien) (w, a, b) en w .

Par ailleurs, prenons maintenant $x \in [w, a[$ et $y \in [w, b[$ et supposons que $d(w, x) = d(w, y) = t$. La loi hyperbolique du cosinus affirme que

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} d(x, y)}{\operatorname{sh}^2 t}.$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\theta}{2} &= \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} d(x, y)}{2 \operatorname{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\operatorname{ch} d(x, y)}{2 \operatorname{sh}^2 t} - \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{2 \operatorname{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\operatorname{ch} d(x, y)}{2 \operatorname{sh}^2 t} - \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\operatorname{ch} d(x, y)}{2 \operatorname{sh} d(w, x) \operatorname{sh} d(w, y)} + o(1) \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\exp d(x, y)}{\exp d(w, x) \exp d(w, y)} + o(1) \right)^{1/2} \\
 &= \exp -(x|y)_w + o(1).
 \end{aligned}$$

■

Il vient des deux propositions précédentes le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.9. — *Pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, la formule*

$$d_x(\xi, \zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$

définit une distance sur $\partial\mathbb{H}^n$ qui le rend compact. De plus, si $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $\xi, \zeta \in \partial\mathbb{H}^n$, alors

$$d_y(\xi, \zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y))} d_x(\xi, \zeta).$$

DÉMONSTRATION. Dans le modèle de la boule, si w correspond à l'origine et g est une isométrie telle que $g(w) = x$, alors $(g(\xi)|g(\zeta))_w = (\xi|\zeta)_x$ donc

$$d_x(\xi, \zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x} = e^{-(g(\xi)|g(\zeta))_w} = d_w(g(\xi), g(\zeta)).$$

Donc d_x est bien une distance.

En prenant l'exponentielle dans (2.1), on obtient

$$d_y(\xi, \zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y))} d_x(\xi, \zeta).$$

■

2.3. Vue hyperbolique du birapport

Si $p \geq 1$, on désigne par $\partial^p \mathbb{H}^n$ l'ensemble des p -uplets ordonnés de points deux à deux distincts de $\partial\mathbb{H}^n$.

On définit $p : \partial^3 \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ comme suit. Étant donnés (ξ, ξ', ζ) , on considère l'unique point de (ξ, ξ') tel que le rayon $[p, \zeta)$ et la géodésique (ξ, ξ') soient orthogonaux en p . On remarque alors que $(\xi|\zeta)_p = (\xi'|\zeta)_p$.

PROPOSITION 2.10. — Si $(\xi, \xi', \zeta, \zeta') \in \partial^4 \mathbb{H}^n$, on a

$$[\xi, \xi', \zeta', \zeta] = \frac{d_x(\xi, \xi')d_x(\zeta, \zeta')}{d_x(\xi, \zeta')d_x(\xi', \zeta)}$$

pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, et

$$\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta] = \frac{1}{2}(\beta_\zeta(p(\zeta, \xi, \zeta'), p(\xi, \zeta, \xi')) - \beta_\xi(p(\zeta, \xi, \zeta'), p(\xi, \zeta, \xi'))).$$

En particulier,

$$|\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta]| = d(p(\xi, \zeta, \xi'), p(\zeta, \xi, \zeta')).$$

DÉMONSTRATION. Pour x le centre de la boule, cela correspond à la proposition précédente.

Pour un autre point, on utilise le fait qu'une isométrie est conforme dans ce même modèle.

Notons $p = p(\xi, \zeta, \xi')$ et $q = p(\zeta, \xi, \zeta')$. On a

$$\begin{aligned} \log[\xi, \xi', \zeta', \zeta] &= \log \frac{d_p(\xi, \xi')d_p(\zeta, \zeta')}{d_p(\xi, \zeta')d_p(\xi', \zeta)} \\ &= \log \frac{d_p(\zeta, \zeta')}{d_p(\xi, \zeta')} \\ &= \frac{1}{2}(\beta_{\zeta'}(q, p) + \beta_\zeta(q, p) - \beta_\xi(q, p) + \beta_{\zeta'}(q, p))) + \log \frac{d_q(\zeta, \zeta')}{d_q(\xi, \zeta')} \\ &= \frac{1}{2}(\beta_\zeta(q, p) - \beta_\xi(q, p)) \end{aligned}$$

Comme les points ξ, ζ, p et q sont alignés, on trouve

$$|\log[\xi, \xi', \zeta, \zeta']| = d(p, q).$$

■

EXERCICE 2.11. — Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$d((\xi, \xi'), (\zeta, \zeta')) - C \leq \max\{0, \log[\xi, \xi', \zeta', \zeta]\} \leq d((\xi, \xi'), (\zeta, \zeta')) + C.$$

2.4. Action des isométries

Le groupe des isométries préserve la relation d'équivalence $\sim$, donc opère sur $\partial \mathbb{H}^n$.

PROPOSITION 2.12. — Si g est une isométrie alors

- (1) g préserve les birapports.
- (2) g est conforme au sens que

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{d_x(g(\xi), g(\zeta))}{d_x(\xi, \zeta)} = e^{\beta_\xi(x, g^{-1}(x))}.$$

On pose alors $|g'(\xi)|_x = e^{\beta_\xi(x, g^{-1}(x))}$.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que si g une isométrie et $(\xi, \xi', \zeta) \in \partial^3 \mathbb{H}^n$, alors

$$p(g(\xi), g(\xi'), g(\zeta)) = g(p(\xi, \xi', \zeta)).$$

D'après la Proposition 2.10, on a

$$\begin{aligned} [g(\xi), g(\xi'), g(\zeta'), g(\zeta)] &= \exp \pm d(g(p(\xi, \zeta, \xi')), g(p(\zeta, \xi, \zeta'))) \\ &= \exp \pm d(p(\xi, \zeta, \xi'), p(\zeta, \xi, \zeta')) \\ &= [\xi, \xi', \zeta', \zeta] \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{d_x(g(\xi), g(\zeta))}{d_x(\xi, \zeta)} &= \frac{e^{-(g(\xi)|g(\zeta))_x}}{d_x(\xi, \zeta)} \\ &= \frac{e^{-(\xi|\zeta)_{g^{-1}(x)}}}{d_x(\xi, \zeta)} \\ &= \frac{d_{g^{-1}(x)}(\xi, \zeta)}{d_x(\xi, \zeta)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x, g^{-1}(x)) + \beta_\zeta(x, g^{-1}(x)))} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en faisant tendre ζ vers ξ et en utilisant la continuité de $\xi \mapsto \beta_\xi(x, g^{-1}(x))$. ■

EXERCICE 2.13. — *Montrer que si g est une isométrie, alors*

$$|g'(\xi)|_x |g'(\zeta)|_x = \left(\frac{d_x(g(\xi), g(\zeta))}{d_x(\xi, \zeta)} \right)^2.$$

3. ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

On utilise [BH, Thu] comme références de base.

Soient X un ensemble et G un groupe. Une action de G sur X est donnée par un homomorphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$, où $\mathfrak{S}_X$ désigne le groupe des bijections de X .

L'orbite d'un point x est l'ensemble $G(x) = \{\rho(g)(x), g \in G\}$, et son stabilisateur, ou sous-groupe d'isotropie est $G_x = \text{stab}(x) = \{g \in G, g(x) = x\}$. On rappelle que si x et y sont dans la même orbite, alors leurs stabilisateurs sont conjugués.

Les orbites de G induisent une partition de X et la relation « être dans la même orbite » est la relation d'équivalence associée sur X . On note X/G l'espace quotient, c.à.d. l'ensemble des orbites, ou des classes d'équivalence.

On dit que l'action est fidèle si ρ est injective, transitive si X n'est formé que d'une orbite et libre si quel que soit $x \in X$, $g(x) = x$ implique $g = \text{Id}$.

Si X est un espace topologique, on munit le groupe des homéomorphismes $\text{Homéo}(X)$ de la topologie compacte-ouverte : un voisinage d'un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ est donné par l'ensemble des homéomorphismes $g : X \rightarrow X$ tels que $g(K) \subset U$, où $K \subset X$ est compact, $U \subset X$ est ouvert et $f(K) \subset U$.

EXERCICE 3.1. — *Montrer que si X est un espace métrique, alors la topologie compacte-ouverte correspond à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

On suppose maintenant que G opère par homéomorphismes sur X , autrement dit, $\rho(G) \subset \text{Homéo}(X)$. On s'intéresse aux notions suivantes.

- (1) L'action est discrète si l'orbite d'un point quelconque est un ensemble discret.
- (2) L'action est errante si tout $x \in X$ admet un voisinage V tel que

$$\{g \in G, g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

est fini.

- (3) L'action est proprement discontinue si, pour tous compacts K et L de X ,

$$\{g \in G, g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini.

- (4) L'action est cocompacte s'il existe un compact K tel que $X = \cup_{g \in G} g(K)$.

EXERCICE 3.2. — *Montrer que si une action est discrète alors $\rho(G)$ est un sous-groupe discret de $\text{Homéo}(X)$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.*

EXERCICE 3.3. — *Montrer que si l'action est errante, alors le stabilisateur de chaque point est fini.*

EXERCICE 3.4. — *Montrer qu'une action est proprement discontinue si et seulement si l'application*

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g(x), x) \end{aligned}$$

est propre. Montrer alors que $\ker \rho$ est fini.

EXERCICE 3.5. — *Montrer qu'une action proprement discontinue est errante, et qu'une action errante est discrète. Les réciproques sont-elles vraies ?*

3.1. Quotients et revêtements

On suppose pour simplifier tous les espaces topologiques connexes et localement connexes par arcs.

3.1.1. *Revêtements.* On se réfère à [DD, Hat]. Un revêtement est une transformation continue $f : X \rightarrow Y$ surjective telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un espace discret D non vide, un voisinage U de y et un homéomorphisme $\phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times D$ tels que $\phi(x) = (f(x), d)$ pour tout $x \in f^{-1}(U)$. On en déduit qu'un revêtement est un homéomorphisme local.

On associe le groupe $\text{Aut}_Y X$ des homéomorphismes h de X tels que $f \circ h = f$. Le groupe $\pi_1(Y, y)$ opère sur la fibre $f^{-1}(\{y\})$. Si Y admet un revêtement universel, le morphisme $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est injectif et son image dans $\pi_1(Y, f(x))$ correspond au stabilisateur de x .

On dit qu'un revêtement est galoisien si l'action de $\text{Aut}_Y X$ est transitive sur les fibres de f , et on l'appelle le groupe de Galois de X .

THÉORÈME 3.6. — *Soit (Y, y) un espace connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe.*

- (1) *Si H est un sous-groupe de $\pi_1(Y, y)$, alors il existe un revêtement pointé $p : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, unique à isomorphisme près, tel que $f_*(\pi_1(X, x)) = H$.*
- (2) *Un revêtement $p : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est galoisien si et seulement si $f_*(\pi_1(X, x))$ est distingué dans $\pi_1(Y, y)$. Dans ce cas, $\text{Aut}_Y X$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y)/\pi_1(X, x)$ et Y est homéomorphe à $X/\text{Aut}_Y X$.*

3.1.2. *Actions proprement discontinues.*

PROPOSITION 3.7. — *Soit G un groupe opérant fidèlement par homéomorphismes sur un espace X connexe, localement connexe par arcs et localement compact. L'action de G est libre et proprement discontinue si et seulement si X/G est séparé et la projection $p : X \rightarrow X/G$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois G .*

DÉMONSTRATION. Supposons l'action libre et proprement discontinue.

Soit $x \in X$. Il existe un voisinage U de x tel que $g(U) \cap U = \emptyset$. En effet, si K un voisinage compact de x assez petit, seul un nombre fini de translations $g(K)$ intersectent K , avec $x \notin g(K)$ dès que $g \neq 1$. Donc $U = K \setminus \bigcup_{g \neq 1} g(K)$ convient. Par conséquent, $p^{-1}(G(U))$ est homéomorphe à $U \times G$, où on a muni G de la topologie discrète. Par conséquent $p : X \rightarrow X/G$ est un revêtement, G opère transitivement sur les fibres par définition donc il est galoisien de groupe de Galois G .

Si x, y sont deux points d'orbites distinctes, on considère la réunion K de deux voisinages compacts disjoints de ces points. Comme l'action est libre $K \setminus \bigcup_{g \neq 1} g(K)$ contient $\{x, y\}$ et comme elle est proprement discontinue, il s'agit encore de la réunion disjointe de voisinages de x et y . Par conséquent X/G est séparé.

Réciproquement, si X/G est séparé et la projection $p : X \rightarrow X/G$ est un revêtement, alors pour tout $G(x)$, il existe un ouvert $G(U) \subset X/G$ tel que $p^{-1}(G(U))$ est homéomorphe à $G(U) \times G$. Par conséquent, l'action est libre. De plus, X/G étant séparé, si x et y

sont d'orbites distinctes, il existe deux ouverts disjoints U et V qui les contiennent. Par conséquent, pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $U \times V \ni (x, y)$ tel que $g(U) \cap V \neq \emptyset$ pour au plus un élément $g \in G$.

Soit $K \subset X$ un compact. On recouvre $K \times K$ par un nombre fini d'ouverts $U \times V$ vérifiant la propriété ci-dessus. Par suite, l'action est proprement discontinue. ■

EXERCICE 3.8. — On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par

$$g_n(x, y) = (2^n x, y/2^n).$$

- (1) Montrer que cette action est errante.
- (2) Montrer que le quotient n'est pas séparé.

COROLLAIRE 3.9. — Soit X un espace séparé connexe localement connexes par arcs, localement compact et localement simplement connexe. Il admet un revêtement universel $\tilde{X}$ et le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ opère proprement discontinûment et librement sur $\tilde{X}$.

3.2. Actions géométriques et quasi-isométries

On suppose dorénavant que X est un espace métrique. On dit que X est propre si, pour tout $x_0 \in X$, la fonction $x \in X \mapsto d(x_0, x)$ est propre, autrement dit les boules fermées de rayon fini sont compactes, ou encore, les fermés bornés sont compacts.

Si X, Y sont deux espaces métriques, une application $f : X \rightarrow Y$ est un *plongement isométrique* si pour tous $x, x' \in X$, $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$; on dira que f est une *isométrie* si f est un plongement isométrique surjectif.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow X$ un plongement isométrique. On dit que f , ou $f(I)$, est une *géodésique* si $I = \mathbb{R}$, un *rayon* (géodésique) si $I = \mathbb{R}_+$ et un *segment* (géodésique) si I est un intervalle compact.

Un segment géodésique d'extrémités x et y sera noté $[x, y]$, même s'il n'est pas unique.

On dit que X est géodésique si toute paire de points $\{x, y\}$ est jointe par un segment géodésique.

EXERCICE 3.10. — Soit X un espace géodésique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'espace X est propre.
- (2) L'espace X est localement compact et complet.

Montrer que cette équivalence n'est plus vraie si on ne suppose plus X géodésique.

PROPOSITION 3.11. — Soit X un espace métrique propre, et supposons que G opère par isométries et que son action est proprement discontinue.

- (1) Le stabilisateur de tout point est fini.

- (2) Pour tout $x \in X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(B(x, \varepsilon)) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ si et seulement si $g \in \text{stab}(x)$.
- (3) On note $d(G(x), G(y)) = \inf\{|x - g(y)|, g \in G\}$. Alors d est une distance sur X/G compatible avec la topologie quotient. La projection $p : X \rightarrow X/G$ est une isométrie locale si et seulement si l'action de G est libre.

DÉMONSTRATION.

- (1) Le stabilisateur d'un point est fini en appliquant la propre discontinuité à ce singleton.
- (2) Soit $x \in X$; soit $r > 0$, l'ensemble des $g \in G$ tel que $g(\overline{B(x, r)}) \cap \overline{B(x, r)} \neq \emptyset$ est fini. En particulier, $B(x, r) \setminus (G \setminus \text{stab}(x))(\overline{B(x, r)})$ est donc un voisinage de x qui contient une boule $B(x, \varepsilon)$.
- (3) Puisque l'action est proprement discontinue, pour tous x, y de X , le minimum de $d(x, g(y))$ est atteint pour un nombre fini de G . En particulier, $d(x, g(y)) = 0$ si et seulement si x et y sont dans la même orbite. Par ailleurs, si on se donne x, y et z des points d'orbites distinctes, et g_1 et g_2 qui nous donne le minimum de $d(x, g_1(y))$ et $d(g_1(y), g_2(z))$, alors

$$d(G(x), G(z)) \leq d(x, g_2(z)) \leq d(x, g_1(y)) + d(g_1(y), g_2(z))$$

donc on a bien défini une distance sur X/G .

Si Ω est un ouvert de X/G , on considère un point x de classe dans Ω . Il existe un ouvert U tel que $g(U) \cap g'(U) = \emptyset$ dès que $g \neq g'$. En prenant un disque assez petit, alors on montre que $G(U)$ contient une boule pour la distance d . Réciproquement, si D est une boule de X/G de rayon suffisamment petit, alors son antécédent est une réunion de boules en bijection avec l'orbite de son centre.

■

DÉFINITION 3.12 (Action géométrique). — Un groupe G opère géométriquement sur un espace métrique propre X si

- (1) chaque élément opère par isométrie ;
- (2) l'action est proprement discontinue ;
- (3) l'action est cocompacte.

Par exemple, si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G , on peut considérer le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(g, g') \in G \times G$ définit une arête si $g^{-1}g' \in S$. En munissant $\mathcal{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, on obtient la *métrique des mots associée à S* . Elle fait de $\mathcal{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action géométrique sur $\mathcal{G}$.

EXERCICE 3.13. — Soit $G = \mathfrak{a}_5$.

- (1) Vérifier que les permutations $a_1 = (12345)$ et $a_2 = (421)$ engendrent G . Montrer que $a_1 a_2 a_1 a_2 = 1$.
- (2) Tracer son graphe de Cayley. On pourra tracer les arêtes associées à a_2 bien plus petites que celles associées à a_1 . A quoi ressemble-t-il ?
- (3) En utilisant les revêtements, montrer que G est simple.

Le lemme de Švarc-Milnor montre que la relation d'équivalence naturelle des groupes qui opèrent géométriquement est donnée par la notion de quasi-isométrie, introduite sous cette forme par G. Margulis [Mar].

DÉFINITION 3.14 (Quasi-isométrie). — Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un plongement (λ, c) -quasi-isométrique si, pour tous $x, x' \in X$, on a

$$(3.1) \quad \frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c.$$

On dit que f est une (λ, c) -quasi-isométrie s'il existe $g : Y \rightarrow X$ qui vérifie aussi (3.1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$.

EXERCICE 3.15. — Montrer que $f : X \rightarrow Y$ est une quasi-isométrie si et seulement si f est un plongement quasi-isométrique et si $f(X)$ est coborné, c.à.d. s'il existe une constante $c > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq c$.

EXERCICE 3.16. — Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont quasi-isométriques.

EXERCICE 3.17. — Montrer que la relation « être quasi-isométrique » définit une relation d'équivalence sur les espaces métriques.

EXERCICE 3.18. — Montrer que pour que deux espaces métriques X et Y soient quasi-isométriques, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$ cobornés et une quasi-isométrie entre X' et Y' .

On commence par une proposition qui montre que toutes les actions sur les graphes de Cayley localement finis sont semblables.

PROPOSITION 3.19. — Soit G un groupe de type fini. Si X et X' sont deux graphes de Cayley associés à deux systèmes de générateurs finis, alors X et X' sont quasi-isométriques.

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_k\}$ et $\mathcal{S}' = \{g'_1, \dots, g'_m\}$ les systèmes de générateurs de X et X' . Nous montrons que $\text{Id} : (G, d_{\mathcal{S}}) \rightarrow (G, d_{\mathcal{S}'})$ est bi-Lipschitz.

On note $\ell(g_i)$ la longueur de g_i exprimée dans $\mathcal{S}'$ et $\ell(g'_i)$ la longueur de g'_i exprimée dans $\mathcal{S}$. Soient $\ell = \max\{\ell(g_i), g_i \in \mathcal{S}\}$ et $\ell' = \max\{\ell(g'_i), g'_i \in \mathcal{S}'\}$.

On considère l'application $\text{Id} : (G, d_{\mathcal{S}}) \rightarrow (G, d_{\mathcal{S}'})$. On a $d(g_1, g_2) = d(\text{Id}, g_2 g_1^{-1})$, et $d'(g_1, g_2) = d'(\text{Id}, g_2 g_1^{-1})$. Si $g_2 g_1^{-1}$ est de longueur m dans X , alors $g_2 g_1^{-1}$ sera de longueur au plus $\ell \cdot m$, et si $g_2 g_1^{-1}$ est de longueur m' dans X' , alors $g_2 g_1^{-1}$ sera de longueur au plus $\ell' \cdot m'$, donc Id est une $(\max\{\ell, \ell'\}, 0)$ -quasi-isométrie. ■

LEMME 3.20 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X . Alors G est de type fini et X est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G .

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

DÉMONSTRATION. Soit $K \subset X$ un compact tel que $G(K) = X$, et prenons $w \in X$ et $D > 0$ pour que $K \subset B(w, D/3)$. On note

$$S = \{g \in G, g(B(w, D)) \cap B(w, D) \neq \emptyset\}.$$

Puisque X est propre et l'action est proprement discontinue, S est fini (et non vide, puisque $1 \in S$). Nous allons montrer que S engendre G .

Soit $g \in G$, et considérons un segment $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma([0, 1]) = [w, g(w)]$. On se donne une subdivision $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[0, 1]$ telle que $t_0 = 0$, $t_n = 1$ et $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j+1})| = D/3$, pour $j < n - 1$. Pour chaque $0 < j < n$, il existe $g_j \in G$ tel que $|\gamma(t_j) - g_j(w)| \leq D/3$; on pose $g_0 = \text{Id}$ et $g_n = g$. Du coup,

$$|g_j(w) - g_{j+1}(w)| \leq |\gamma(t_j) - g_j(w)| + |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j+1})| + |\gamma(t_{j+1}) - g_{j+1}(w)| < D.$$

Par conséquent $|(g_j^{-1} \circ g_{j+1})(w) - w| < D$ et $(g_j^{-1} \circ g_{j+1}) \in S$. En particulier,

$$g = g_0 \circ (g_0^{-1} \circ g_1) \dots (g_{n-1}^{-1} \circ g_n)$$

donc G est engendré par S . De plus, $|g|_S \leq n$ et

$$\begin{aligned} |w - g(w)| &= \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j+1})| \\ &\geq \sum_{j=0}^{n-2} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j+1})| \\ &\geq \frac{D}{3}(n-1) \\ &\geq \frac{D}{3}|g|_S - \frac{D}{3}. \end{aligned}$$

Si on note $M = \max\{|g(w) - w|, g \in S\}$, alors, pour tout $g \in G$, on a

$$|g(w) - w| \leq |g|_S \cdot M$$

donc

$$g \mapsto g(w)$$

est une quasi-isométrie de $(G, |\cdot|_S)$ sur $G(w)$. Par définition de D , on a $X \subset G(B(w, D))$, donc on a bien une quasi-isométrie sur X . ■

EXERCICE 3.21. — On suppose que G opère sur un espace connexe X , et qu'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $G(U) = X$. Montrer que

$$S = \{g \in G, g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

engendre G .

3.3. Actions sur un espace hyperbolique

3.3.1. *Variétés hyperboliques.* Si (M, g) est une variété compacte et connexe, on considère son revêtement universel $p : X \rightarrow M$ et G son groupe de Galois isomorphe à $\pi_1(M, x_0)$, $x_0 \in M$. Comme p est un homéomorphisme local, on peut munir X d'une structure de variété riemannienne de sorte que p devienne une isométrie locale. Pour cette structure, G devient un sous-groupe d'isométries qui opère géométriquement sur X .

DÉFINITION 3.22 (Variété hyperbolique). — Une variété hyperbolique M est une variété dont le revêtement universel est isométrique à $\mathbb{H}^n$. Autrement dit, M s'écrit $\mathbb{H}^n/G$ où G est un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ qui opère librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^n$ et qui s'identifie au groupe fondamental de M .

3.3.2. *Domaine fondamental d'une action.*

DÉFINITION 3.23 (Domaine fondamental). — Soit G un groupe opérant sur un espace métrique X par isométries. Un domaine fondamental de l'action de G est un ouvert $D \subset X$ tel que, pour tout $x \in X$, $G(x) \cap D$ est vide ou un singleton et $G(\overline{D}) = X$.

PROPOSITION 3.24. — On suppose que G opère proprement discontinûment sur $\mathbb{H}^n$. Alors il existe un domaine fondamental convexe.

DÉMONSTRATION. Soit $w \in \mathbb{H}^n$ de stabilisateur trivial. Si $g \neq \text{Id}$, on note $D_g = \{x \in \mathbb{H}^n, d(x, w) < d(x, g(w))\}$, $B_g = \partial D_g$ et D l'intersection des D_g , $g \neq \text{Id}$. Cet ensemble est bien défini et convexe puisque $\text{stab}(w) = \{\text{Id}\}$.

On remarque que puisque X est géodésique, $d(w, B_g) = (1/2)d(w, g(w))$, donc seul un nombre fini de B_g , $g \in G \setminus \{\text{Id}\}$ peut intersecter un compact donné, puisque l'action est proprement discontinue.

Soit $z \in \overline{D}$, et K un disque fermé centré en z . Il s'ensuit qu'on a un nombre fini de B_g qui intersectent K . Donc, ou bien, on peut rétrécir K pour que $K \subset D$, montrant que D est ouvert, ou bien z est contenu dans un nombre fini de B_g .

Pour chaque orbite, on prend un point z qui minimise la distance à w . Cela définit un ensemble complet F de représentants de $\mathbb{H}^n/G$, et cet ensemble contient D . Supposons maintenant que le point z choisi ne soit pas dans D . On affirme qu'aucun B_g ne peut intersecter le segment $[w, z]$. En effet, cela impliquerait que $d(w, z) > d(g(w), z) = d(w, g^{-1}(z))$, donc z n'aurait pas été choisi. Du coup, on a $F \subset \overline{D}$.

■

3.3.3. *Quasi-isométries de l'espace hyperbolique.* Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un plongement quasi-isométrique. Une propriété fondamentale des espaces hyperboliques est la suivante, attribué à M. Morse :

THÉORÈME 3.25 (Lemme de poursuite). — *Pour tout (λ, c) , il existe une constante $H = H(\lambda, c)$ telle que toute (λ, c) -quasigéodésique est à distance au plus H d'une géodésique.*

On utilise ce lemme pour montrer

THÉORÈME 3.26 (Margulis). — *Une quasi-isométrie Φ de $\mathbb{H}^n$ se prolonge en transformation quasimöbius ϕ de $\mathbb{S}^{n-1}$. Autrement dit, il existe un homéomorphisme croissant $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(a, b, c, d) \in \partial^4 \mathbb{H}^n$, on ait*

$$[\phi(a) : \phi(b) : \phi(c) : \phi(d)] \leq \eta([a : b : c : d]) .$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, le lemme de Morse nous définit une extension bijective ϕ de Φ comme suit : si r est un rayon géodésique, alors $\Phi(r)$ est un quasirayon, qui est à distance bornée d'un véritable rayon r' . La classe de r' ne dépend que de la classe de r , et on obtient ainsi $\phi : \partial \mathbb{H}^n \rightarrow \partial \mathbb{H}^n$.

SCHOLIE 3.27. — *Il existe une constante C telle que, si $\xi, \xi', \zeta \in \partial \mathbb{H}^n$ alors*

$$d_{\mathbb{H}^n}(p(\phi(\xi), \phi(\xi'), \phi(\zeta)), \Phi(p(\xi, \xi', \zeta))) \leq C .$$

Démonstration. — Le point p est à distance au plus $\delta = \log(1 + \sqrt{2})$ des géodésiques (ξ, ζ) et (ξ', ζ) . Par conséquent, $\Phi(p)$ est à distance au plus $\lambda\delta + c + H$ des géodésiques $(\phi(\xi), \phi(\zeta))$ et $(\phi(\xi'), \phi(\zeta))$, et à distance H de $(\phi(\xi), \phi(\xi'))$. Du coup, si $q \in (\phi(\xi), \phi(\xi'))$ est le point le plus proche de $\phi(p)$, il ne peut être trop loin de $p(\phi(\xi), \phi(\xi'), \phi(\zeta))$. $\square$

Soit $(a, b, c, d) \in \partial^4 \mathbb{H}^n$; on note $p = p(a, c, b)$, $q = p(a, c, d)$, $p_\phi = p(\phi(a), \phi(c), \phi(b))$ et $q_\phi = p(\phi(a), \phi(c), \phi(d))$.

$$\begin{aligned} |\log[\phi(a) : \phi(b) : \phi(c) : \phi(d)]| &= d(p_\phi, q_\phi) \\ &\leq d(p_\phi, \Phi(p)) + d(\Phi(p), \Phi(q)) + d(\Phi(q), q_\phi) \\ &\leq d(\Phi(p), \Phi(q)) + 2C \\ &\leq \lambda d(p, q) + 2C + c \\ &\leq \lambda |\log[a : b : c : d]| + 2C + c . \end{aligned}$$

En travaillant un peu, on peut enlever les valeurs absolues. ■

On a aussi une réciproque :

THÉORÈME 3.28 (P. Tukia, [Tuk]). — *Une transformation quasimöbius de $\mathbb{S}^{n-1}$ se prolonge en une quasi-isométrie de $\mathbb{H}^n$.*

3.3.4. *Exemple de surfaces hyperboliques.* On regarde [dR].

THÉORÈME 3.29. — *Une surface compacte de genre $g \geq 2$ admet une structure riemannienne de sorte que son revêtement universel est $\mathbb{H}^2$.*

DÉMONSTRATION. Soient $g \geq 2$ et Σ une surface de genre g . On la découpe en un $4g$ -gone dont les côtés sont étiquetés par des générateurs de son groupe fondamental (avec la présentation $S = a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ qui vérifie la relation $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$).

Les étapes sont les suivantes :

- (1) On construit un $(4g)$ -gone P régulier dans $\mathbb{H}^2$ tel que l'angle à chaque sommet fait un angle $\pi/(2g)$. Pour cela, on part du modèle du disque, et on trace partant de l'origine $(4g)$ -rayons R_k , $k \in \mathbb{Z}/(4g)\mathbb{Z}$, dont les angles entre deux consécutifs font $\pi/(2g)$. À chaque $t > 0$, on fixe un point $z_k(t) \in R_k$ à distance t de l'origine. Cela définit des triangles isocèles $\Delta_k(t)$ de sommets l'origine, $z_k(t)$ et $z_{k+1}(t)$. Notons $A(t)$ leur aire commune. Elle varie continûment, par la formule de Gauss-Bonnet, entre $A(0) = 0$ et $A(\infty) = \pi(1 - 1/(2g))$. Par suite, on peut trouver t pour que $A(t) = \pi(1 - 1/g)$. Comme les triangles sont isocèles, l'angle aux points $z_k(t)$ est de $\pi/(4g)$, et pour le polygone obtenu en réunissant tous les triangles, on obtient un angle de $\pi/(2g)$.
- (2) On étiquette chaque côté par l'élément du groupe fondamental correspondant et on définit une isométrie T_c , $c \in S$, qui transforme un côté dans celui qui lui correspond. Cela induit une relation d'équivalence $\sim$ sur P . Les points intérieurs à P ont leur classe triviale, les points des arêtes sont des paires, et tous les sommets de P forment une seule classe.
- (3) Le quotient $P/\sim$ est homéomorphe à Σ , et est muni d'une structure riemannienne qui rend Σ complète. Pour les points intérieurs, P peut servir de carte. Si z est sur une arête étiquetée c , alors la réunion d'un voisinage de D de z dans P et d'un voisinage D' de $T_c(z)$ forme une carte au voisinage d'un tel point. Pour un sommet, on utilise le fait que la somme des angles aux sommets est exactement 2π . En composant par les T_c , $c \in S$, on construit un petit voisinage d'un sommet dans $\mathbb{H}^2$.

La surface est complète puisque compacte.

- (4) Notons G le sous-groupe d'isométries de $\mathbb{H}^2$ engendré par les transformations T_c , $c \in S$, que l'on munit de la topologie discrète. On construit $X = P \times G$ que l'on munit de la relation d'équivalence $\simeq : (z, g) \simeq (z', g')$ si $g'g^{-1} \in S \cup \{\text{Id}\}$ et $(g^{-1}g')^{\pm 1}(z) = z'$. On note $\hat{X} = X/\simeq$. Le groupe G opère sur $\hat{X}$ par $g' \cdot (z, g) = (z, g'g)$.
- (5) La projection $(z, g) \mapsto z$ induit un revêtement $\hat{X} \rightarrow \Sigma$ de groupe de revêtement G c.à.d. $\hat{X}/G$ est homéomorphe à Σ . De plus $\hat{X}$ est muni d'une structure riemannienne complète.

- (6) L'application $X \rightarrow \mathbb{H}^2$ définie par $(z, g) \mapsto g(z)$ induit une isométrie locale $f : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{H}^2$, donc un revêtement sur son image. Comme $\widehat{X}$ est complet, f est surjective, et f est une isométrie car $\mathbb{H}^2$ est simplement connexe.

■

4. FLOT GÉODÉSIQUE

On s'appuie sur [Bou1, Bou2]. Pour le point de vue riemannien, on renvoie à [GHL, dC, TF].

4.1. Flot géodésique sur une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. On se place dans le fibré unitaire tangent T^1M qui est l'ensemble des (x, v) avec $x \in M$, $v \in T_xM$ de norme 1. Si g est une isométrie, on pose $g \cdot (x, v) = (g(x), T_x g(v))$.

On définit le flot géodésique

$$\Phi : \mathbb{R} \times T^1M \rightarrow T^1M$$

comme suit. A chacun des points (x, v) , on associe la géodésique locale γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. On pose, lorsque c'est bien défini,

$$\Phi(t, x, v) = \Phi_t(x, v) = (\gamma(t), \gamma'(t)).$$

EXERCICE 4.1. — (1) Montrer que $\Phi_{t+t'} = \Phi_t \circ \Phi_{t'}$.

(2) Montrer que si g est une isométrie, alors $\Phi_t \circ g = g \circ \Phi_t$.

4.2. Version macroscopique

On considère maintenant $\mathbb{H}^n$. Notons $G\mathbb{H}^n$ l'ensemble des géodésiques paramétrées $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ que l'on munit de la distance

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_{G\mathbb{H}^n} = \int_{\mathbb{R}} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

On définit le flot géodésique sur $G\mathbb{H}^n$ par $\Phi_s(\gamma(t)) = \gamma(t + s)$.

EXERCICE 4.2. — Montrer que le groupe d'isométries opère sur $G\mathbb{H}^n$ par isométries, et que son action commute avec celle du flot géodésique.

EXERCICE 4.3. — Montrer que si G opère proprement discontinûment par isométries sur $\mathbb{H}^n$, il en est de même de son action sur $G\mathbb{H}^n$.

EXERCICE 4.4. — Montrer que l'application $\gamma \in G\mathbb{H}^n \mapsto \gamma(0) \in \mathbb{H}^n$ est une quasi-isométrie.

4.3. Paramétrage de Hopf

Chaque géodésique γ dans $\mathbb{H}^n$ a deux points limites à l'infini que l'on note $\gamma(-\infty)$ et $\gamma(+\infty)$. On se fixe un point base $w \in \mathbb{H}^n$, et on définit

$$H : G\mathbb{H}^n \rightarrow \partial^2\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$$

par

$$H(\gamma) = (\gamma(-\infty), \gamma(+\infty), \beta_{\gamma(+\infty)}(w, \gamma(0))).$$

EXERCICE 4.5. — *Montrer que H est un homéomorphisme (il suffit de montrer que H est continue, bijective et propre).*

Dans cet espace, le flot géodésique devient

$$\Phi_t(\xi, \xi', s) = (\xi, \xi', s + t).$$

4.4. Ergodicité du flot géodésique

4.4.1. *Mesures invariantes.* On se fixe ici une variété riemannienne (M, g) . On suppose pour simplifier que le flot est complet.

Soit μ une mesure borélienne σ -finie sur T^1M , On dit qu'elle est invariante sous le flot géodésique si, pour tout borélien $A \subset T^1M$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(A) = \mu(\Phi_t(A)).$$

4.4.2. *Flot géodésique et mesure de Lebesgue.* Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Si g est une transformation de Möbius de $\mathbb{S}^{n-1}$ et E est borélien, alors la formule de changement de variables donne

$$\lambda(g(E)) = \int_E |g'|^{n-1} d\lambda.$$

On définit la mesure μ sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ ainsi : si $E \subset \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ est borélien, on pose

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}}.$$

On constate que μ est une mesure de Radon sur $\partial^2\mathbb{S}^{n-1}$.

Le lemme suivant est dû à D. Sullivan [Sul].

LEMME 4.6. — La mesure μ est invariante sous l'action du groupe de Möbius. Réciproquement, si $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est un homéomorphisme tel que $f^*\mu = c \cdot \mu$, où $c > 0$ est une constante, alors f est une transformation de Möbius.

DÉMONSTRATION. Soit g une transformation de Möbius. On considère un borélien $A \times B$; on a

$$\begin{aligned}
\mu(g(A \times B)) &= \int_{g(A) \times g(B)} \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}} \\
&= \int_{A \times B} \frac{|g'(x)|^{n-1} |g'(y)|^{n-1} d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|g(x) - g(y)|_e^{2(n-1)}} \\
&= \int_{A \times B} \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}} \\
&= \mu(A \times B)
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'exercice 2.13.

Donc l'action du groupe de Möbius préserve μ .

Soit maintenant f une transformation telle que $f^*\mu = c\mu$. Cela signifie que $f^*\lambda$ est absolument continue par rapport à λ . Il existe une fonction borélienne positive h telle que $d(f^*\lambda) = h d\lambda$. Du coup,

$$d(f^*\mu) = \frac{h(x)h(y)d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|f(x) - f(y)|_e^{2(n-1)}}$$

donc, si $f^*\mu = c \cdot \mu$, on obtient

$$c|f(x) - f(y)|_e^{2(n-1)} = h(x)h(y)|x - y|_e^{2(n-1)}$$

presque partout ; mais, en gardant y fixe, on constate que h doit être continue. Par suite, si x_1, x_2, x_3 et x_4 sont quatre points distincts, alors

$$\begin{aligned}
[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]^{2(n-1)} &= \frac{c|f(x_1) - f(x_2)|_e^{2(n-1)} c|f(x_3) - f(x_4)|_e^{2(n-1)}}{c|f(x_1) - f(x_3)|_e^{2(n-1)} c|f(x_2) - f(x_4)|_e^{2(n-1)}} \\
&= \frac{h(x_1)h(x_2)|x_1 - x_2|_e^{2(n-1)} h(x_3)h(x_4)|x_3 - x_4|_e^{2(n-1)}}{h(x_1)h(x_3)|x_1 - x_3|_e^{2(n-1)} h(x_2)h(x_4)|x_2 - x_4|_e^{2(n-1)}} \\
&= [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]^{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

donc f est une transformation de Möbius. ■

Sur l'espace du flot géodésique $G\mathbb{H}^n$, on considère la mesure $m = H^*(d\mu \otimes dt)$ via le paramétrage de Hopf. Cette mesure est une mesure de Radon invariante par le flot géodésique (car la mesure de Lebesgue est invariante par translations) et par l'action des isométries de $\mathbb{H}^n$ (car μ l'est).

On se donne un groupe G qui opère librement et géométriquement sur $\mathbb{H}^n$. Notons $\mathcal{D}$ un domaine fondamental (relativement compact) de cette action. La restriction de la mesure m à $T^1\mathcal{D}$ définit une mesure m_G sur $G\mathbb{H}^n/G$, invariante par l'action du flot géodésique et de masse finie.

THÉORÈME 4.7 (E. Hopf [Hop]). — *Le flot géodésique est ergodique sur $(G\mathbb{H}^n/G, m_G)$. Autrement dit, tout ensemble borélien de $G\mathbb{H}^n/G$ invariant par le flot géodésique est de mesure nulle, ou son complémentaire l'est.*

COROLLAIRE 4.8. — *L'action de G sur $(\partial^2\mathbb{H}^n, \mu)$ est ergodique.*

DÉMONSTRATION. Si A invariant par G avec $\mu(A) > 0$, alors $A \times \mathbb{R}$ est G -invariant, de mesure positive et invariant par le flot géodésique. Pour chaque point $p = (\xi, \xi', t)$ de $A \times \mathbb{R}$, on peut trouver $g \in G$ tel que $g(p) \in \mathcal{D}$. En passant au quotient, on obtient un ensemble de mesure positive et invariant par le flot : son complémentaire est de mesure nulle d'après le théorème de Hopf. Par suite, le complémentaire de $A \times \mathbb{R}$ est de mesure nulle, et le complémentaire de A aussi. ■

On peut consulter [Kai] pour plus de propriétés dans le cadre de la courbure de négative.

B. ACTIONS SUR LES MESURES DE RADON

B.1. Mesures de Radon

Soit X un espace métrique localement compact. Une mesure de Radon μ est une mesure borélienne positive qui donne une masse finie aux compacts. Elle induit une forme linéaire continue sur les fonctions continues à support compact :

$$\varphi \mapsto \langle \mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu.$$

Le théorème de représentation de Riesz affirme la réciproque : toute forme linéaire continue sur les fonctions continues à support compact d'un espace localement compact provient de cette construction. De plus, la mesure est régulière au sens où, pour tout borélien A , $\mu(A)$ est l'infimum des $\mu(U)$ où U parcourt les ouverts contenant A et est le supremum des $\mu(K)$ où K parcourt les compacts contenus dans A .

On remarque que les fonctions continues sont denses dans $L^1(\mu)$ par convergence dominée et régularité de la mesure.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre deux espaces topologiques localement compacts, et si φ est continue, on pose $f^*\varphi = \varphi \circ f$ et on définit la mesure image $f_*\mu$ d'une mesure μ de X par dualité en posant

$$\langle f_*\mu, \psi \rangle = \langle \mu, f^*\psi \rangle = \int \psi \circ f d\mu$$

pour toute fonction ψ continue à support compact sur Y .

Si $A \subset Y$ est borélien, on a $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Si f est un homéomorphisme, on peut aussi définir $f_*\varphi = \varphi \circ f^{-1}$ et $\langle f^*\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f_*\varphi \rangle$.

Soient μ et ν deux mesures de Radon sur X . On dit que ν est absolument continue par rapport à μ que l'on note $\nu \ll \mu$ si, pour tout borélien A , $\mu(A) = 0$ entraîne $\nu(A) = 0$.

On dit que μ et ν sont étrangères que l'on note $\mu \perp \nu$, s'il existe un borélien A tel que $\mu(A) = \nu(X \setminus A) = 0$.

Le théorème de Radon-Nikodym affirme que si μ et ν sont deux mesures de Radon sur X , alors il existe $h \in L^1(\mu)$ et une mesure ν_s étrangère à μ telle que, pour toute fonction continue φ à support compact,

$$\int \varphi d\nu = \int \varphi h d\mu + \int \varphi d\nu_s.$$

Cette décomposition est unique, et le premier terme correspond à la partie de ν absolument continue par rapport à μ . En général, on note $h = \frac{d\nu}{d\mu}$ et on l'appelle la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ .

B.2. Mesures invariantes

On suppose X localement compact, et $f : X \rightarrow X$ continue. Une mesure de Radon μ est invariante par f si $f_*\mu = \mu$, autrement dit si $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien A .

Si G est un groupe, on dit que μ est invariante si elle est invariante pour tous les éléments de G .

On dit qu'une mesure μ est ergodique si, pour tout borélien invariant A par f ou G , $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$. De manière équivalente, toute fonction $\varphi \in L^1$ telle que $f^*\varphi = \varphi$, ou telle que $g^*\varphi = \varphi$ pour tout $g \in G$, est constante pp. En effet, on note pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 0$,

$$A_{n,k} = \left\{ \frac{n}{2^k} \leq \varphi < \frac{n+1}{2^k} \right\}.$$

Chacun de ces ensembles est invariant, donc il existe un unique n_k tel que $A_{n_k,k}$ soit de mesure non nulle pour chaque k . L'intersection sur k de ces ensembles est un ensemble de mesure pleine, et donc φ est constante. Réciproquement, on approxime la fonction indicatrice d'un borélien par des fonctions continues et on applique le théorème de convergence dominée.

Deux mesures invariantes et ergodiques sont ou bien proportionnelles ou bien étrangères. On montre cette assertion dans le cas d'un groupe dénombrable. Écrivons $\nu = h\mu + \nu_s$ où μ et ν sont ergodiques et invariantes par G . Soit A un borélien tel que $\mu(A) = 0$ mais $\nu_s(A) > 0$. L'ensemble $E = G(A)$ est invariant (on utilise ici que G est dénombrable pour dire que E est borélien) : on a $\mu(E) = 0$ et $\nu(E) > 0$ donc $\nu(X \setminus E) = 0$: il vient que

$\mu \perp \nu$. Sinon, $\nu_s = 0$. Pour tout $g \in G$ et φ continue,

$$\begin{aligned} \int \varphi \cdot h \circ g d\mu &= \int (\varphi \circ g^{-1}) \circ g \cdot h \circ g d\mu \\ &= \langle g_*\mu, (\varphi \circ g^{-1})h \rangle \\ &= \langle \mu, (\varphi \circ g^{-1})h \rangle \\ &= \langle \nu, (\varphi \circ g^{-1}) \rangle \\ &= \langle g_*\nu, (\varphi \circ g^{-1}) \rangle \\ &= \int \varphi \cdot h d\mu. \end{aligned}$$

cela implique $h = h \circ g$ pour μ -presque tout point et tout $g \in G$. Donc $h = cste$ par ergodicité.

5. GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

Dans un espace métrique, on écrira la distance entre deux points x et y en notation polonaise $|x - y|$. Si $B = (x_B, r_B)$ est une boule et $\lambda > 0$, alors λB désigne la boule concentrique $B(x_B, \lambda r_B)$ de rayon multiplié par λ .

Un espace métrique mesuré (X, μ) est dit Q -Ahlfors régulier si μ est une mesure de Radon, et si, pour tout $R \in [0, \text{diam } X]$ et tout $x \in X$, on a $\mu(\overline{B(x, R)}) \asymp R^Q$.

5.1. Applications quasisymétriques et variantes

On peut consulter [Väil, Hei, HK].

5.1.1. *Homéomorphismes quasisymétriques.* Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ une application. Etant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on dit que f est η -quasisymétrique si pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq td(x, z)$, on ait $d'(fx, fy) \leq \eta(t)d'(fx, fz)$. On dira tout simplement que f est quasisymétrique s'il existe η telle que la relation ci-dessus soit vraie.

Si f est un homéomorphisme η -quasisymétrique alors f^{-1} est η' -quasisymétrique avec $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$.

LEMME 5.1. — Si f est L -bi-Lipschitz alors f est quasisymétrique avec $\eta(t) = L^2t$.

DÉMONSTRATION.

$$\frac{d'(f(x), f(y))}{d'(f(x), f(z))} \leq L^2 \frac{d'(x, y)}{d'(x, z)}.$$

■

LEMME 5.2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application η -quasisymétrique. Si $A \subset B$ avec $\text{diam } B < \infty$, alors $\text{diam } f(B) < \infty$ et

$$\frac{1}{2\eta \left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } A} \right)} \leq \frac{\text{diam } f(A)}{\text{diam } f(B)} \leq \eta \left(2 \frac{\text{diam } A}{\text{diam } B} \right).$$

DÉMONSTRATION. Soient (b_n) et (b'_n) deux suites de B telles que $|b_n - b'_n| \geq (1/2)\text{diam } B$ et $\lim |b_n - b'_n| = \text{diam } B$. Pour tout $b \in B$, on a $|b - b_1| \leq \text{diam } B \leq 2|b_1 - b'_1|$. Par suite $|f(b) - f(b_1)| \leq \eta(2)|f(b_1) - f(b'_1)|$ et $\text{diam } f(B) < \infty$.

Soit maintenant $a \in A$; on $|b_n - b'_n| \leq |b_n - a| + |a - b'_n|$, donc on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, on ait $|b_n - a| \geq |b'_n - a|$. Du coup, pour tout $x \in A$, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq \eta \left(\frac{|x - a|}{|a - b_n|} \right) |f(a) - f(b_n)| \leq \eta \left(2 \frac{\text{diam } A}{\text{diam } B} \right) \text{diam } f(B).$$

En appliquant cet argument à f^{-1} , on obtient l'autre inégalité. ■

THÉORÈME 5.3. — Soient (X, x_0) , (Y, y_0) , deux espaces métriques propres marqués, $\mathcal{F}$ la famille d'applications quasiymétriques $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et telles qu'il existe un point $x'_0 \neq x_0$ et une constante $M < \infty$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $(1/M) \leq |f(x_0) - f(x'_0)| \leq M$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille compacte.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Quitte à échanger les rôles de x_0 et x'_0 , on peut supposer que $|x - x_0| \geq (1/2)|x_0 - x'_0|$. Soit $x' \in X$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq \eta \left(\frac{|x - x'|}{|x - x_0|} \right) |f(x_0) - f(x)| \\ &\leq \eta \left(\frac{|x - x'|}{|x - x_0|} \right) \eta \left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x'_0|} \right) |f(x_0) - f(x'_0)| \\ &\leq \eta \left(\frac{2|x - x'|}{|x'_0 - x_0|} \right) \eta \left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x'_0|} \right) M \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur toute boule bornée $B(x_0, R)$.

Par un procédé diagonale et le théorème d'Ascoli, on peut montrer que de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers une application continue f non constante. Il vient par passage à la limite que f est aussi η -quasisymétrique, et injective. ■

5.1.2. *Applications quasimöbius.* Une application $f : X \rightarrow X'$ est η -quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux disjoints, on a

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \cdot \frac{|f(b) - f(d)|}{|f(c) - f(d)|} \leq \eta \left(\frac{|a - b|}{|a - c|} \cdot \frac{|c - d|}{|b - d|} \right).$$

LEMME 5.4. — Soit X un espace métrique. Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points distincts de X , on définit

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \frac{\min\{|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|\}}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}.$$

Alors

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1, x_2, x_3, x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$$

où

$$\eta_0(t) = t + \sqrt{t^2 + t} \quad \text{and} \quad \eta_1(t) = t(2 + t).$$

DÉMONSTRATION. On suppose que $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$; il vient

$$\begin{cases} |x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_4| + |x_4 - x_3| \leq 2|x_4 - x_3| + |x_2 - x_4| ; \\ |x_2 - x_4| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_3| + |x_3 - x_4| \leq 2|x_4 - x_3| + |x_1 - x_3|. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \max\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} &\leq 2|x_4 - x_3| + \min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} \\ &\leq \left(2 + \frac{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}{|x_3 - x_4|}\right) |x_3 - x_4| \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle}\right) |x_3 - x_4|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_4] &\geq \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle}\right)^{-1} \frac{|x_1 - x_2|}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}} \\ &\geq \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

En inversant la fonction de $\langle x_j \rangle$, on obtient

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4]).$$

On note que

$$\eta_0(t) \leq 3 \max\{t, \sqrt{t}\}.$$

En permutant les points, on a

$$[x_1, x_3, x_2, x_4] \geq \langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle}\right)^{-1}$$

et en passant à l'inverse, on trouve

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle).$$

■

Ce lemme signifie que l'on peut remplacer le birapport par cette nouvelle notion quantitativement, *a priori* plus intuitive.

5.1.3. *Applications quasiconformes.* Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Notons

$$\begin{aligned} L_f(x, r) &= \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)|, \\ \ell_f(x, r) &= \inf_{|x-y| \geq r} |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

On dit que f est *quasiconforme* s'il existe une constante H telle que, pour tout $x \in X$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L_f(x, r)}{\ell_f(x, r)} \leq H.$$

Si f est η -quasisymétrique, en posant $H = \eta(1)$, on obtient $L_f(x, r) \leq H \ell_f(x, r)$.

5.1.4. *Liens entre ces notions.*

THÉORÈME 5.5. — (i) *Une application quasimöbius est quasiconforme.*

(ii) *Une application quasisymétrique est quasimöbius.*

(iii) *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quasimöbius. Si X et Y sont non bornés, alors f est quasisymétrique si et seulement si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Si X et Y sont bornés et si, pour trois points $z_1, z_2, z_3 \in X$, on a $|z_i - z_j| \geq \text{diam } X / \lambda$ et $|f(z_i) - f(z_j)| \geq \text{diam } Y / \lambda$ pour un $\lambda > 0$, alors f est η -quasisymétrique, où η ne dépend que de λ et du contrôle de la distorsion des birapports.*

DÉMONSTRATION. Voir le Théorème 3.2, le Théorème 3.10 et le Théorème 3.12 de l'article [Väi2] de J. Väisälä.

(i) En utilisant $\langle \cdot \rangle$, on voit tout de suite qu'une application quasimöbius est quasiconforme dès que trois points sont assez proches les uns des autres.

(ii) Montrons que si f est η -quasisymétrique, alors

$$\langle f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4) \rangle \leq \eta(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle).$$

Supposons $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$. On a $\min\{|f(x_1) - f(x_2)|, |f(x_3) - f(x_4)|\} \leq |f(x_1) - f(x_2)|$. D'autre part, on note

$$\min\{|f(x_1) - f(x_3)|, |f(x_2) - f(x_4)|\} = |f(x_i) - f(x_j)|$$

où on peut choisir $i \in \{1, 2\}$.

Du coup,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_i) - f(x_j)|} &\leq \eta \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_i - x_j|} \right) \\ &\leq \eta \left(\frac{|x_1 - x_2|}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}} \right) \\ &\leq \eta(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle). \end{aligned}$$

Le Lemme 5.4 permet de conclure.

(iii) Si X et Y sont non bornés, alors f ne peut être quasisymétrique que si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini d'après le Lemme 5.2. Dans ce cas, on fait tendre x_4 vers l'infini et on obtient que f est η -quasisymétrique.

Sinon, pour tout $x \in X$, il existe z_i, z_j tels que $|z_i - x| \geq \text{diam } X/2\lambda$ et $|z_j - x| \geq \text{diam } X/2\lambda$. De même, il existe z_k, z_m tels que $|f(z_k) - f(x)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$ et $|f(z_m) - f(x)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$.

Soient x_1, x_2, x_3 . On choisit z_i de sorte que $|z_i - x_2| \geq \text{diam } X/2\lambda$ et $|f(z_i) - f(x_3)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$.

Du coup,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_3)|} &\leq \frac{|f(x_2) - f(z_i)|}{|f(x_3) - f(z_i)|} \eta([x_1, x_2, x_3, z_i]) \\ &\leq 2\lambda\eta \left(2\lambda \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|} \right). \end{aligned}$$

■

EXERCICE 5.6. — Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soient $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de distorsion, $\lambda > 0$, et trois points $z_1, z_2, z_3 \in X$ tels que $|z_i - z_j| \geq \text{diam } X/\lambda$. Montrer que l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow Y$ qui sont η -quasimöbius et qui vérifient $|f(z_i) - f(z_j)| \geq \text{diam } Y/\lambda$ est compacte.

5.2. Modules de courbes

Un principe de L. Ahlfors et A. Beurling exprime que tout invariant conforme est une fonction du module d'une famille de courbes bien choisies. Nous en verrons plusieurs illustrations.

5.2.1. *Courbes rectifiables.* On peut consulter [Väi1, Chap. 1].

DÉFINITION 5.7. — Soient $a < b$ deux réels (finis). On dit qu'une application $f : [a, b] \rightarrow X$ est absolument continue (AC) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq b$ tel que $\sum |b_i - a_i| < \delta$, on ait $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow X$ est de variation bornée (VB) s'il existe $M < \infty$ telle que

$\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq M$ pour toute subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. On note $\text{Var}(f, [a, b])$ le plus petit M , et on l'appelle la variation de f . On définit enfin, pour une fonction de VB, la fonction croissante $s_f(t) = \text{Var}(f, [a, t])$.

PROPOSITION 5.8. — Une application $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement si il existe $h \in L^1(a, b)$ telle que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(t) dt.$$

En ce cas, f est dérivable presque partout, et sa dérivée coïncide avec h . De plus, la formule d'intégration par parties est vraie si f, g sont AC.

Une courbe γ dans (X, d) est une application continue d'un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ dans X . On peut, comme dans les espaces euclidiens, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{0 \leq j < n} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de I telles que $[t_0, t_n] = I$. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable*.

PROPOSITION 5.9. — Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ rectifiable, alors il existe un chemin AC $\gamma_s : [0, s_\gamma(b)] \rightarrow X$ tel que $\gamma = \gamma_s \circ s_\gamma$.

Dans ce cas, on dit que γ est paramétré par la longueur d'arc $\gamma_s : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow X$.

Pour toute fonction borélienne $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$, on définit

$$\int_\gamma \rho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s(t) dt.$$

EXERCICE 5.10. — Soient $\gamma : I \rightarrow X$ une courbe rectifiable, et $f : X \rightarrow Y$ une application entre espaces métriques. On suppose qu'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$d(f(\gamma(t)), f(\gamma(t'))) \leq \int_{\gamma|_{[t, t']}} g$$

pour tout $[t, t'] \subset I$. Montrer que $f \circ \gamma$ est absolument continue.

5.2.2. Modules.

DÉFINITION 5.11 (Module de familles de courbes). — Soient (X, μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $p \geq 1$ un réel. On définit le p -module de Γ par

$$\text{mod}_p \Gamma = \inf \int_X \rho^p d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques (dites admissibles) $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_\gamma \rho ds \geq 1$.

Il suffit en général de se restreindre aux familles de courbes suivantes.

DÉFINITION 5.12 (Condensateurs et capacités). — Si X est un espace topologique, un condensateur est défini par une paire de continua disjoints $\{E, F\}$. On note $\Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui joignent E et F . On définit la p -capacité du condensateur par

$$\text{cap}_p(E, F) = \text{mod}_p(E, F) = \text{mod}_p \Gamma(E, F).$$

Donnons quelques propriétés élémentaires du module.

PROPOSITION 5.13. — On a les propriétés suivantes :

- (1) $\text{mod}_p(\emptyset) = 0$;
- (2) si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\text{mod}_p \Gamma_1 \leq \text{mod}_p \Gamma_2$;
- (3) si Γ_1 et Γ_2 sont deux familles de courbes telles que toute courbe γ_1 dans Γ_1 possède une sous-courbe $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors $\text{mod}_p \Gamma_1 \leq \text{mod}_p \Gamma_2$.
- (4) Si $(\Gamma_n)_n$ est une suite de familles de courbes, alors $\text{mod}_p \cup \Gamma_n \leq \sum \text{mod}_p(\Gamma_n)$.
- (5) Si Γ n'a pas de courbes rectifiables et si chaque courbe est dans une boule fixée (de rayon bornée), alors $\text{mod}_p \Gamma = 0$.

Les modules mod_p définissent donc une famille de mesures extérieures sur les familles de courbes. D'après ci-dessus, le module d'une famille de courbes ne dépend que de ses courbes rectifiables, et si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est de module nul, alors $\text{mod}_p \Gamma = \text{mod}_p \Gamma \setminus \Gamma_0$.

On note Γ_{rect} la famille des courbes rectifiables sur X . Il vient $\text{mod}_p(\Gamma) = \text{mod}_p(\Gamma \cap \Gamma_{\text{rect}})$.

DÉMONSTRATION.

- (1) La condition d'admissibilité est toujours vérifiée.
- (2) Si ρ est admissible pour Γ_2 , elle est admissible pour Γ_1 .
- (3) Si ρ est admissible pour Γ_2 , elle est admissible pour Γ_1 .
- (4) Soit $\varepsilon > 0$; pour chaque n , on considère une métrique admissible ρ_n telle que $\int \rho^p \leq \text{mod}_p \Gamma_n + \varepsilon/2^n$. On note

$$\rho = \left(\sum \rho_n^p \right)^{1/p}.$$

Si $\gamma \in \Gamma_k$, alors

$$\ell_\rho(\gamma) \geq \int_\gamma \rho_k \geq 1.$$

D'autre part,

$$\int \rho^p = \sum \int \rho_n^p \leq \sum \text{mod}_p \Gamma_n + 2\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient le résultat voulu.

- (5) Soit B la boule qui contient toutes les courbes. Pour chaque $n \geq 1$, on considère $\rho_n = (1/n)\chi_B$ qui est admissible puisqu'aucune courbe n'est rectifiable. On a bien $\int \rho_n^p \rightarrow 0$. ■

5.2.3. *Module nul.*

PROPOSITION 5.14. — *On a $\text{mod}_p \Gamma = 0$ si et seulement si il existe $\rho \in L^p$ telle que $\int_\gamma \rho = \infty$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$.*

DÉMONSTRATION. Si $\text{mod}_p \Gamma = 0$, il existe une suite (ρ_n) telle que $\int \rho_n^p \leq 1/2^n$. On pose

$$\rho = \left(\sum (n \rho_n)^p \right)^{1/p}.$$

Pour chaque courbe $\gamma \in \Gamma$ et chaque n , on a $\ell_\rho(\gamma) \geq n \ell_{\rho_n}(\gamma) \geq n$. D'autre part

$$\int \rho^p \leq \sum n^p / 2^n < \infty.$$

■

On dira qu'une propriété est vraie pour p -presque toute courbe si elle n'est pas vérifiée sur une famille de courbes de p -module nul.

EXERCICE 5.15. — *Soit (X, μ) un espace mesuré. Si $A \subset X$, on considère Γ_A^+ l'ensemble des courbes rectifiables telles que $\int_\gamma \chi_A > 0$. Montrer que si $\mu(A) = 0$ alors $\text{mod}_p \Gamma_A^+ = 0$.*

LEMME 5.16. — *Soit Γ une famille de courbes. Si (ρ_n) est une suite de métriques admissibles qui converge dans L^p vers ρ , alors*

$$\int_\gamma \rho \geq 1$$

pour p -presque toute courbe.

DÉMONSTRATION. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\int |\rho_n - \rho|^p \leq 1/2^{(p+1)n}.$$

On note Γ_ε l'ensemble des courbes de Γ telles que

$$\int_\gamma |\rho_n - \rho| \not\rightarrow 0,$$

et Γ_n celles qui vérifient

$$\int_\gamma |\rho_n - \rho| \geq 1/2^n.$$

Du coup, on a, pour tout $k \geq 1$, $\Gamma_\varepsilon \subset \cup_{n \geq k} \Gamma_n$. En effet, si $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$, il existe $m \geq 1$ et n_0 tels que, pour tout $n \geq n_0$ assez grand, on ait

$$\int_\gamma |\rho_n - \rho| \geq \frac{1}{2^m}.$$

Par suite, $\gamma \in \Gamma_n$ si $n \geq m + n_0$.

Il vient

$$\text{mod}_p \Gamma_n \leq \text{mod}_p(\Gamma_n, |\rho_n - \rho|) \leq \frac{1/2^{(p+1)n}}{(1/2)^{np}} = 1/2^n,$$

du coup

$$\text{mod}_p \Gamma_{\mathcal{E}} \leq \sum_{n \geq k+1} \text{mod}_p \Gamma_n \leq 1/2^k$$

pour tout $k \geq 1$. Par conséquent, $\text{mod}_p \Gamma_{\mathcal{E}} = 0$. D'autre part, pour toute courbe $\gamma \notin \Gamma_{\mathcal{E}}$, on a

$$\int_{\gamma} \rho \geq \int_{\gamma} \rho_n - \int_{\gamma} |\rho_n - \rho| \geq 1 - \int_{\gamma} |\rho_n - \rho|$$

et quand n tend vers l'infini on obtient

$$\int_{\gamma} \rho \geq 1$$

pour p -presque toute courbe de Γ . ■

5.2.4. *Métriques optimales.* Une métrique est dite optimale si elle réalise le module d'une famille de courbes.

PROPOSITION 5.17 (critère de Beurling). — *Soient $p > 1$ et Γ une famille de courbes. Une métrique ρ est p -extrémale s'il existe une sous-famille $\Gamma_0 \subset \Gamma$ telle que*

- (1) *pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, $\ell_{\rho}(\gamma) = L_{\rho}(\Gamma)$;*
- (2) *si $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ est L^p -intégrable et vérifie $\int_{\gamma} h \geq 0$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_0$, alors on a $\int h \rho^{p-1} \geq 0$.*

De plus, cette métrique est unique à normalisation près.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \mathcal{M}_p$ que l'on suppose normalisée pour que $L_{\sigma}(\Gamma) = L_{\rho}(\Gamma)$. Du coup, $\ell_{\sigma}(\gamma) \geq L_{\rho}(\Gamma) = \ell_{\rho}(\gamma)$ pour toute $\gamma \in \Gamma_0$ d'après (1). En posant $h = \sigma - \rho$, on obtient par (2)

$$\int (\sigma - \rho) \rho^{p-1} \geq 0$$

soit

$$\int \rho^p \leq \int \sigma \rho^{p-1} \leq \left(\int \sigma^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int \rho^p \right)^{1-1/p}$$

par l'inégalité de Hölder. Du coup, on a $\text{mod}_p(\Gamma, \rho) \leq \text{mod}_p(\Gamma, \sigma)$. Le cas d'égalité se produit lorsque l'inégalité de Hölder est une égalité, donc si σ^p et $(\rho^{p-1})^{p/(p-1)}$ sont proportionnelles, soit si $\sigma = \rho$ presque partout d'après leurs normalisations. ■

PROPOSITION 5.18. — *Soit $A \subset \mathbb{C}$ la couronne $\{r \leq |z| \leq R\}$, $0 < r < R$. On note Γ_s (resp. Γ_t) la famille des courbes rectifiables qui séparent $E = \{|z| = r\}$ et $F = \{|z| = R\}$ (resp. qui joignent E à F). On a*

$$\frac{1}{\text{mod}_2 \Gamma_t} = \text{mod}_2 \Gamma_s = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}.$$

DÉMONSTRATION. On considère Γ_t . On note

$$\rho(z) = \frac{1}{|z|} \chi_A(z).$$

Il s'agit bien d'une métrique admissible. Soit Γ_0 la famille des rayons $[r, R]e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Nous allons appliquer le critère de Beurling.

Pour chaque courbe $\gamma \in \Gamma_t$, on a

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt \geq \left| \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \right| \geq |\log |\gamma(\ell(\gamma))/\gamma(0)|| = \log(R/r).$$

De plus, pour un rayon $\gamma \in \Gamma_0$, on obtient

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_r^R \frac{1}{s} ds = \log(R/r).$$

Donc $\ell_\rho(\gamma) = L(\Gamma_t, \rho)$.

Supposons maintenant que $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\int_\gamma h \geq 0$ pour tout rayon. Alors on a, en coordonnées polaires et par le théorème de Fubini,

$$\int_A \frac{h(z)}{|z|} |z| |dz| d\theta \geq \int_0^{2\pi} \left(\int_r^R h(se^{i\theta}) ds \right) d\theta.$$

Or, on a $\int_r^R h(se^{i\theta}) ds \geq 0$ par hypothèses donc

$$\int_A \frac{h(z)}{|z|} s ds d\theta \geq 0.$$

La Proposition 5.17 implique

$$\text{mod } \Gamma_t = \frac{1}{\log^2(R/r)} \int_A \frac{1}{s^2} s ds d\theta = \frac{2\pi}{\log(R/r)}.$$

Passons à Γ_s avec la même métrique. On définit maintenant Γ'_0 comme la famille des cercles concentriques centrés en 0.

Pour chaque courbe $\gamma \in \Gamma_s$, on écrit $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Il vient

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|} dt \geq \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{|\theta'(t)|}{r(t)} r(t) dt \geq \left| \int_0^{2\pi} \theta' d\theta \right| = 2\pi.$$

De plus, pour un cercle concentrique $\gamma \in \Gamma'_0$, on obtient

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\theta = 2\pi.$$

Donc $\ell_\rho(\gamma) = L(\Gamma_s, \rho)$.

Supposons maintenant que $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\int_\gamma h \geq 0$ sur tout cercle. Alors on a, en coordonnées polaires et par le théorème de Fubini,

$$\int_A \frac{h(z)}{|z|} |z| |dz| d\theta \geq \int_r^R \left(\int_0^{2\pi} h(se^{i\theta}) d\theta \right) ds.$$

Or, on a $\int_0^{2\pi} h(se^{i\theta}) d\theta \geq 0$ par hypothèses donc

$$\int_A \frac{h(z)}{|z|} s ds d\theta \geq 0.$$

La Proposition 5.17 et le calcul précédent impliquent ainsi

$$\text{mod } \Gamma_s = \frac{2\pi \log(R/r)}{(2\pi)^2} = \frac{\log(R/r)}{2\pi}.$$

■

PROPOSITION 5.19. — Soient Γ une famille de courbes dans un espace métrique propre mesuré (X, μ) et $p > 1$. Il existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de p -module nul et une métrique optimale pour $\text{mod}_p(\Gamma \setminus \Gamma_0)$.

DÉMONSTRATION. Soit (ρ_n) une suite de métriques admissibles pour Γ telles que $\int \rho_n^p$ tende vers $\text{mod}_p \Gamma$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, on peut supposer que ρ_n tend faiblement dans L^p vers une fonction ρ . Le lemme de Mazur implique que l'on peut former une combinaison convexe $(\hat{\rho}_n)_n$ telle que $(\hat{\rho}_n)$ tend vers ρ dans L^p . D'après le Lemme 5.16, on a $\int_\gamma \rho \geq 1$ pour p -presque toute courbe. ■

5.2.5. *Estimations de la capacité dans un espace régulier.* On donne deux estimations.

LEMME 5.20. — Si (X, μ) est Q -Ahlfors régulier, $x \in X$ et $\ell < L < \text{diam } X$ avec $L \geq 2\ell$, alors

$$\text{mod}_Q(B(x, \ell), X \setminus B(x, L)) \lesssim (1/\log L/\ell)^{Q-1}$$

DÉMONSTRATION. Posons $\rho(y) = (1/\text{dist}(x, y))\chi_{B(x, L) \setminus B(x, \ell)}(y)$. Alors, pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_t$ qui joint $B(x, \ell)$ à $X \setminus B(x, L)$, on a

$$\int_\gamma \rho ds \geq \int_\ell^L \frac{dt}{t} = \log L/\ell$$

Soit k le plus petit entier tel que $2^{k+1}\ell \geq L$. Alors, en découpant en couronnes diadiques centrées en x et en utilisant la régularité de X , on a

$$\begin{aligned} \int_X \rho^Q d\mu &\lesssim \sum_{j=0}^k \frac{\mu(B(x, 2^{j+1}\ell))}{(2^j\ell)^Q} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^k \frac{(2^{j+1}\ell)^Q}{(2^j\ell)^Q} \\ &\lesssim \log L/\ell. \end{aligned}$$

On en déduit l'estimation promise. ■

PROPOSITION 5.21. — Soit (X, μ) un espace métrique mesuré propre tel que $\mu(X) < \infty$. Soit (E_n, F_n) une suite de condensateurs qui tend pour la topologie de Hausdorff vers un condensateur (E, F) . Pour tout $p > 1$, on a

$$\limsup \operatorname{mod}_p(E_n, F_n) \leq \operatorname{mod}_p(E, F).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$; par le théorème de Vitali-Carathéodory, il existe une fonction semi-continue inférieurement telle que, pour toute courbe $\gamma \in \Gamma(E, F)$, on a

$$\int_{\gamma} \rho \geq 1$$

et

$$\int \rho^p d\mu \leq \operatorname{mod}_p(E, F) + \varepsilon.$$

Comme $\mu(X)$ est finie, on peut aussi supposer qu'il existe $m > 0$ telle que $\rho \geq m$ partout.

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$(5.1) \quad \liminf \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(E_n, F_n)} \int_{\gamma} \rho \right) \geq 1.$$

En effet, on aura

$$\begin{aligned} \limsup \operatorname{mod}_p(E_n, F_n) &\leq \frac{\int \rho^p d\mu}{\liminf \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(E_n, F_n)} \int_{\gamma} \rho \right)^p} \\ &\leq \int \rho^p d\mu \\ &\leq \operatorname{mod}_p(E, F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La constante ε étant arbitraire, on pourra conclure.

Si (5.1) n'est pas vraie, il existe $\delta > 0$, une sous-suite (n_k) et une courbe $\gamma_k \in \Gamma(E_{n_k}, F_{n_k})$ telles que

$$\int_{\gamma_k} \rho \leq 1 - \delta.$$

On en déduit que $\ell(\gamma_k) \leq M = (1 - \delta)/m$. Par conséquent, on peut paramétrer γ_k par longueur d'arc sur $[0, \ell(\gamma_k)]$ et le prolonger sur $[\ell(\gamma_k), M]$ de manière constante. Du coup, ces courbes sont 1-lipschitziennes, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elles convergent vers une courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma(E, F)$.

On peut supposer que $\ell(\gamma_k)$ tend vers M . On note que pour tout $t < M$, la semi-continuité de ρ implique que $\liminf \rho \circ \gamma_k(t) \geq \rho \circ \gamma(t)$. Du coup, on a, en se fixant

$\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \liminf \int_0^{\ell(\gamma_k)} \rho \circ \gamma_k &\geq \liminf \int_0^{M-\alpha} \rho \circ \gamma_k \\ &\geq \int_0^{M-\alpha} \liminf \rho \circ \gamma_k \\ &\geq \int_0^{M-\alpha} \rho \circ \gamma \end{aligned}$$

où on a aussi utilisé le lemme de Fatou. La constante α étant arbitraire, il vient

$$\liminf \int_{\gamma_k} \rho \geq \int_0^M \rho \circ \gamma.$$

Ecrivons maintenant $\gamma = \gamma_s \circ s_\gamma$. On a $s'_\gamma \leq 1$ presque partout car (γ_k) est uniformément 1-lipschitzienne, donc

$$\begin{aligned} \int_0^M \rho \circ \gamma &\geq \int_0^M (\rho \circ \gamma_s \circ s_\gamma) s'_\gamma \\ &= \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s \\ &= \int_\gamma \rho \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

En rassemblant ces estimées, on aboutit à la contradiction recherchée

$$1 \leq \liminf \int_{\gamma_k} \rho \leq 1 - \delta.$$

■

5.3. Espaces de Sobolev

On suit [BKR]. Nous allons présenter les espaces de Sobolev basés sur la notion de gradient supérieur selon N. Shanmugalingam [Sha].

Définition. Soient $U \subset X$ un ouvert et $u : U \rightarrow Y$ une application mesurable entre espaces métriques. Un *gradient supérieur* g de u est une application mesurable $g : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute courbe rectifiable $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$, on ait

$$|u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))| \leq \int_\gamma g.$$

On parlera de *gradient supérieur p -faible* si $g \in L^p_{loc}(U)$ et si l'inégalité ci-dessus est valide pour p -presque toute courbe. Notons que si g est un gradient p -faible, alors la Proposition 5.14 nous construit une suite de gradients supérieurs (g_n) qui converge dans L^p vers g par convergence dominée.

Remarque. Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $|\nabla u|$ est un gradient supérieur de u .

DÉFINITION 5.22 (Espaces de Sobolev). — Soient (X, x_0, μ) un espace mesuré pointé et Y un espace métrique. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions continues $f : X \rightarrow Y$ qui admettent un gradient supérieur p -faible et telles que la fonction $u : x \mapsto d_Y(f(x), f(x_0))$ soit L^p -intégrable.

EXERCICE 5.23. — Montrer que si $f \in W_{loc}^{1,p}(X, Y)$, alors f est absolument continue sur p -presque toute courbe.

EXERCICE 5.24. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in L^p(U)$ est une application qui admet un gradient supérieur p -faible $g \in L^p(U)$, $p \geq 1$.

- (1) Soit $R = [a, b] \times [c, d] \subset U$. Montrer que pour presque tout $y \in [c, d]$, $u|_{[a,b] \times \{y\}}$ est AC.
- (2) En déduire que u admet des dérivées partielles en presque tout point.
- (3) Montrer que ces dérivées partielles coïncident avec les dérivées au sens des distributions.
- (4) Conclure u appartient à la classe $W^{1,p}(U)$.

THÉORÈME 5.25. — Un homéomorphisme quasiconforme $f : X \rightarrow Y$ entre espaces métriques Q -Ahlfors-réguliers appartient à $W_{loc}^{1,Q}(X, Y)$.

Nous commençons par un lemme de recouvrement et en tirons des conséquences.

LEMME 5.26. — Soit X un espace métrique précompact et $\mathcal{B}$ une collection de boules fermées $B(x, r(x))$ centrées en chaque point de X et de rayon uniformément borné. Alors il existe une famille finie ou dénombrable de boules $B_j = B(x_j, r_j) \in \mathcal{B}$ recouvrant X avec les propriétés suivantes.

- (1) On a $B(x_i, r_i/3) \cap B(x_j, r_j/3) = \emptyset$ dès que $i \neq j$.
- (2) Si $i \neq j$, alors ou bien $x_i \notin B_j$ et $B_j \setminus B_i \neq \emptyset$, ou bien $x_j \notin B_i$ et $B_i \setminus B_j \neq \emptyset$.

Démonstration. — Soit M le supremum des rayons, et posons

$$X_k = \{x \in X, (3/4)^k M < r_x \leq (3/4)^{k-1} M\}.$$

On construit un ensemble fini X_1 par récurrence comme suit. Prenons $x_1^1 \in X_1$, puis $x_2^1 \in X \setminus B(x_1^1, r_1^1)$. Si $B(x_1^1, r_1^1) \subset B(x_2^1, r_2^1)$, on oublie x_1^1 . Si $x_1^1, \dots, x_j^1 \in X_1$ sont construits vérifiant (2) alors on choisit $x_{j+1}^1 \notin \cup_{1 \leq i \leq j} B_i^1$. On oublie tous les points x_i^1 , $i \leq j$ tels que $B(x_i^1, r_i^1) \subset B(x_{j+1}^1, r_{j+1}^1)$. Du coup, ce nouvel ensemble vérifie aussi (2).

Si $i > j$, alors puisque $x_i^1 \notin B_j^1$, on a $r_i^1/3 + r_j^1/3 \leq (7/9)r_j^1 \leq (7/9)|x_i^1 - x_j^1|$; d'où $(1/3)B_i^1 \cap (1/3)B_j^1 = \emptyset$. Ceci implique en particulier que cette procédure nous fournit un sous-ensemble fini de X_1 par précompacité. Notons J_1 cet ensemble fini de points.

Nous construisons maintenant des sous-ensembles finis $J_k = \{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\}$ de X_k tels que

$$x_{j+1}^k \notin (\cup_{l < k} \cup_{i \in J_l} B_i^l) \cup (\cup_{i \leq j} B_i^k)$$

et tels que (2) soit vérifiée pour chaque J_k .

Par construction, $X \subset \cup_{k \geq 1} \cup_{j \in J_k} B_j^k$, et (1) est vraie. Soit $k < l$, et prenons x_j^k et x_i^l . Par construction, $x_i^l \notin B_j^k$, et

$$|x_j^k - x_i^l| \geq r_j^k > \left(\frac{3}{4}\right)^k M \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{k-l+1} r_i \geq r_i.$$

Ceci implique (2). □

LEMME 5.27. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme où X et Y sont des espaces métriques avec X précompact. Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules vérifiant les conclusions du Lemme 5.26 et tel que, pour chaque $B(x, r(x)) \in \mathcal{B}$, $L_f(x, r(x)) \leq H\ell_f(x, r(x))$. Alors

$$B\left(f(x), \frac{\text{diam } f(B)}{60H^2}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\text{diam } f(B')}{60H^2}\right)$$

pour toutes boules $B = B(x, r(x))$ et $B' = B(x', r(x'))$ dans $\mathcal{B}$ avec $x \neq x'$.

Démonstration. — On peut supposer $x' \notin B$. Puisque

$$B\left(f(x), \frac{\text{diam } f(B)}{2H}\right) \subset f(B)$$

on a

$$(5.2) \quad |f(x') - f(x)| \geq \frac{\text{diam } f(B)}{2H}$$

Si on a aussi

$$|f(x') - f(x)| > \frac{\text{diam } f(B')}{3H},$$

alors l'inégalité triangulaire implique

$$B\left(f(x), \frac{\text{diam } f(B)}{10H}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\text{diam } f(B')}{10H}\right) = \emptyset.$$

Sinon, prenons $z \in B \setminus B'$; il vient

$$|f(z) - f(x)| + |f(x) - f(x')| \geq |f(z) - f(x')| \geq \frac{\text{diam } f(B')}{2H}$$

de sorte que

$$\text{diam } f(B) + \frac{\text{diam } f(B')}{3H} \geq \frac{\text{diam } f(B')}{2H}.$$

Par conséquent

$$(5.3) \quad \text{diam } f(B) \geq \frac{\text{diam } f(B')}{6H}.$$

Par (5.2) et (5.3), on obtient

$$|f(x) - f(x')| \geq \frac{\text{diam } f(B)}{2H} \geq \frac{\text{diam } f(B')}{12H^2}.$$

Donc on a

$$B\left(f(x), \frac{\text{diam } f(B)}{60H^2}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\text{diam } f(B')}{60H^2}\right) = \emptyset.$$

□

Nous utiliserons dans la suite le lemme suivant dû à J. Strömberg et A. Torchinsky [ST] dans l'espace euclidien :

LEMME 5.28. — Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules dans un espace Ahlfors-régulier X . On associe à chaque boule B un réel $a_B > 0$. Soit $\lambda > 1$ et $p \geq 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{B \in \mathcal{B}} a_B \chi_{\lambda B} \right\|_{L^p} \leq C \cdot \left\| \sum_{B \in \mathcal{B}} a_B \chi_B \right\|_{L^p}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.25. Il suffit de trouver, dans chaque boule fermée de rayon finie $\widehat{B}$, une fonction borélienne $\rho \in L^Q(\widehat{B})$ telle que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leq \int_{\gamma} \rho$$

pour Q -presque toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Pour chaque $n \geq 1$, on note Γ_n la famille de courbes γ dans $\widehat{B}$ telles que $\text{diam } \gamma > (1/n)$. Nous allons construire un gradient supérieur pour ces courbes qui sera L^Q -intégrable.

Si $x \in \widehat{B}$, on considère un rayon $r_x \in]0, 1/2n[$ tel que $L_f(x, r_x) \leq 2H\ell_f(x, r_x)$.

On applique le Lemme 5.26 aux boules $\{B(x, r_x)\}$ et on désigne par $\mathcal{B}$ le nouveau recouvrement de $\widehat{B}$.

Posons

$$\rho_n = 2 \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{L_f(x_i, r_i)}{r_i} \chi_{2B_i}.$$

Si $\gamma \in \Gamma_n$, alors

$$\int_{\gamma} \rho_n \geq 2 \sum_{B_i \cap \gamma \neq \emptyset} L_f(x_i, r_i) \geq \sum \text{diam } f(B_i) \geq |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))|$$

puisque $\{f(B_i)\}$ recouvre $f(\gamma)$.

Le Lemme 5.28 implique

$$\int \rho_n^Q \lesssim \int \sum \frac{L_f(x_i, r_i)^Q}{r_i^Q} \chi_{(1/3)B_i}.$$

Il vient de la régularité de X que

$$\int \rho_n^Q \lesssim \sum_{B \in \mathcal{B}} L_f(x_i, r_i)^Q.$$

Mais

$$L_f(x_i, r_i)^Q \asymp \mu_Y(B(f(x_i), \text{diam } B(f(x_i), L_f(x_i, r_i)/120H^2)))$$

et puisque ces boules sont deux à deux disjointes, on peut conclure

$$\int \rho_n^Q \lesssim \mu_Y(f((1 + 1/n)\widehat{B})) < \infty.$$

Nous avons prouvé que, pour chaque $n \geq 1$, pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_n$, on a $\int_\gamma \rho_n \geq |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))|$. De plus, il existe une constante $M < \infty$ telle que $\|\rho_n\|_{L^Q} \leq M$ pour tout $n \geq 1$.

Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite (ρ_{n_k}) qui converge dans la topologie faible-* de L^Q vers une fonction borélienne ρ . On déduit du lemme de Mazur que l'on a convergence d'une combinaison convexe $(\widehat{\rho}_k)$ de (ρ_{n_k}) vers ρ dans L^Q .

Observons que si $\gamma \in \Gamma_n$, alors, pour tout k assez grand, $\int_\gamma \widehat{\rho}_k \geq |f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))|$.

Le Lemme 5.16 implique

$$\int_\gamma \rho \geq |f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))|$$

pour Q -presque toute courbe de $\cup \Gamma_n$. ■

COROLLAIRE 5.29. — *Sous les hypothèses du Théorème 5.25 il existe une constante K telle que*

$$L_f(x)^Q \leq K \mu_f(x)$$

presque partout, où μ_f est la dérivée volumique de f .

DÉMONSTRATION. On remarque que

$$B(f(x), L_f(x, r)/(2H)) \subset B(f(x), \ell_f(x, r)) \subset f(B(x, r)).$$

Donc

$$L_f(x, r)^Q \lesssim \mu_Y(f(B(x, r)))$$

et par le théorème de différentiation de Lebesgue, on en déduit que $L_f^Q \lesssim \mu_f$ presque partout. ■

On définit l'application

$$g_f(x) = H \limsup_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\mu_Y(f(B(x, r)))}{\mu_X(B(x, r))} \right)^{1/Q}$$

Cette application est aussi clairement borélienne.

PROPOSITION 5.30. — *Si f est quasiconforme alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'application Cg_f soit un gradient supérieur Q -faible associé à f .*

DÉMONSTRATION. Comme $f \in W_{loc}^{1,Q}(X, Y)$, f est AC sur Q -presque toute courbe. On peut donc supposer que $\gamma : [0, L] \rightarrow X$ est un chemin rectifiable paramétré par longueur d'arc et que $f|_\gamma$ est AC.

Pour tout $z \in \gamma$, il existe $r_z > 0$ arbitrairement petit tel que

$$f(B(z, r_z)) \subset B(f(z), L_f(z, r_z)) \subset B(f(z), 2H\ell_f(z, r_z)).$$

Du coup, si $\gamma(t) = z$ alors

$$\text{diam}(f \circ \gamma)([t - r_z, t + r_z]) \leq 4H\ell_f(z, r_z) \lesssim H\mu_Y(f(B(z, r_z)))^{1/Q}.$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour $j \in \mathbb{Z}$, on considère

$$E_j = \{t \in]0, L[, 2^{j-1} < g_f(\gamma(t)) \leq 2^j\}.$$

Pour $t \in E_j$, on peut trouver r_z assez petit pour que

$$\frac{\mu_Y(f(B(z, r_z)))^{1/Q}}{r_z} \lesssim g_f(z),$$

donc,

$$\text{diam}(f \circ \gamma)(]t - r_z, t + r_z[) \lesssim 2^j r_z.$$

Soit $U_j \supset E_j$ un ouvert tel que $\ell(U_j) \leq \ell(E_j) + \varepsilon/2^{2|j|}$. On peut s'arranger pour que $]t - r_z, t + r_z[\subset U_j$ pour chaque $t \in E_j$. On extrait un sous-recouvrement $(I_{i,j})$ par la Proposition C.1 ; on peut même s'arranger pour qu'un point x n'appartienne au plus qu'à deux tels intervalles. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_i \text{diam } f(\gamma(I_{i,j})) &\lesssim 2^j \sum_i r_{z_i} \\ &\lesssim 2^j \ell(U_j) \\ &\lesssim 2^j \ell(E_j) + \varepsilon/2^{|j|} \\ &\lesssim \int_{\gamma|E_j} g_f + \varepsilon/2^{|j|}. \end{aligned}$$

Soit F les points pour lesquels $g_f \circ \gamma = 0$. On montre que $\ell(f(F)) = 0$ en utilisant les estimations ci-dessus. Soit G les points pour lesquels $g_f \circ \gamma$ est infini. Si $\ell(G) > 0$, alors on a bien l'inégalité recherchée. Sinon, $\ell(G) = 0$ et par continuité absolue, on a aussi $\ell(f(G)) = 0$.

Comme $(I_{i,j})_{i,j}$ recouvre $[0, L]$ à un ensemble nul près, il vient en rassemblant nos différentes estimées

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \lesssim \int_{\gamma} g_f.$$

■

PROPOSITION 5.31. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme quasiconforme entre deux espaces métriques propres Q -Ahlfors réguliers, alors*

$$\text{mod}_Q \Gamma \lesssim \text{mod}_Q f(\Gamma).$$

DÉMONSTRATION. Si σ est admissible pour $f(\Gamma)$, on pose

$$\rho = \sigma \circ f \cdot g_f.$$

Comme f est absolument continue sur presque toute courbe, on a

$$\int_{\gamma} \rho = \int_{\gamma} \sigma \circ f \cdot g_f \geq \int_{f(\gamma)} \sigma \geq 1.$$

Par ailleurs,

$$\int \rho^Q = \int (\sigma \circ f)^Q g_f^Q \asymp \int (\sigma \circ f)^Q \mu_f \leq \int \sigma^Q.$$

■

5.4. Espaces de Loewner

J. Heinonen et P. Koskela ont développé une théorie des homéomorphismes quasiconformes dans certains espaces métriques mesurés, qualifiés de Loewner, dans lesquels les propriétés locales deviennent globales [HK]. On définit ici une classe un peu plus restrictive d'espaces de Loewner (en imposant la condition (2)). Si (E, F) est un condensateur, sa *distance relative* $\Delta(E, F)$ se définit par la formule

$$\Delta(E, F) = \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}.$$

EXERCICE 5.32. — Soit η un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe deux homéomorphismes $\eta_{\pm}$ de $\mathbb{R}_+$ tels que, pour tout homéomorphisme η -quasimöbius f et tout condensateur (E, F) , on a

$$\eta_-(\Delta(E, F)) \leq \Delta(f(E), f(F)) \leq \eta_+(\Delta(E, F)).$$

DÉFINITION 5.33 (Espace loewnesque). — Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est un espace loewnesque s'il est connexe par arcs et s'il existe une dimension $Q > 1$ telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(1) CONDITION DE LOEWNER. Il existe une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour chaque condensateur (E, F) ,

$$\text{mod}_Q(E, F) \geq \psi(\Delta(E, F)).$$

(2) AHLFORS-RÉGULARITÉ. (X, d, μ) est Q -Ahlfors-régulier, c'est-à-dire que pour toute boule $B(R)$ de rayon $R \in]0, \text{diam } X]$, on a $\mu(B(R)) \asymp R^Q$.

Le point (2) permet d'obtenir des bornes supérieures sur les Q -modules à l'instar du Lemme 5.20. Le point (1) impose des bornes inférieures.

C. Loewner a démontré que la capacité d'un condensateur non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est toujours non nulle [Loe]. Cette propriété implique ensuite la condition qualifiée de Loewner ci-dessus.

REMARQUE 5.34. — En général, on montre qu'un espace Q -régulier est loewnesque en montrant qu'il vérifie une inégalité de type "Poincaré". N'en faisant pas un usage explicite dans ces notes, on peut consulter [HK, Hei] et les références qui s'y trouvent.

Les inégalités de Poincaré servent aussi de point de départ à J. Cheeger pour élaborer un calcul différentiel dans des espaces métriques [Che].

5.4.1. *Propriétés géométriques.* Le lemme suivant indique qu'un espace de Loewner a beaucoup de courbes rectifiables.

LEMME 5.35. — Si X est Q -loewnesque, alors il existe $c > 0$ et $m > 0$ telles que, pour toute boule B ,

$$\text{mod}_Q\{\gamma \subset B, \text{diam } \gamma \geq c \text{diam } B\} \geq m.$$

DÉMONSTRATION. On se fixe une boule B de rayon $r \leq \text{diam } X/2$ et de centre $x \in X$, et une constante $\lambda \in]0, 1[$ que l'on déterminera plus tard.

On se donne un point y à distance $\lambda r/2$ de x , et on considère une courbe qui les relie. On en extrait deux continua E et F contenant respectivement x et y et de diamètre $\lambda r/8$. Par conséquent, $\Delta(E, F) \leq (\lambda r/2)/(\lambda r/8) = 4$.

SCHOLIE 5.36. — Soient X un espace Q -loewnesque, $x \in X$, $r \in]0, \text{diam } X[$, $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1/2[$ et (E, F) un condensateur tels que $\text{diam } E, \text{diam } F \geq \lambda_1 r$, $E, F \subset B(x, r)$ et $\text{dist}(E, F) \leq \lambda_2 r$. Il existe $C = C(\lambda_2/\lambda_1, X) < \infty$ telle que la famille $\Gamma(E, F, B(x, Cr))$ des courbes $\Gamma(E, F)$ contenue dans $B(x, Cr)$ soit de Q -module supérieur à $(1/2)\psi(\lambda_2/\lambda_1)$.

Démonstration. — On se fixe $C > 1$ que l'on déterminera plus tard. Observons que $\Delta(E, F) \leq \lambda_2 r/(\lambda_1 r) = \lambda_2/\lambda_1$. On écrit $\Gamma(E, F) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 consiste en les courbes contenues dans $B(x, Cr)$, et Γ_2 les autres. On considère l'ensemble Γ'_2 des sous-courbes de Γ_2 qui relient $(E \cup F)$ à $X \setminus B(x, Cr)$. On a donc, par le Lemme 5.20,

$$\text{mod}_Q \Gamma_2 \leq \text{mod}_Q \Gamma'_2 \lesssim (\log C)^{1-Q}.$$

Si on choisit C assez grand alors on aura $\text{mod}_Q \Gamma'_2 \leq (1/2)\psi(\lambda_2/\lambda_1)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_2/\lambda_1) &\leq \text{mod}_Q \Gamma \\ &\leq \text{mod}_Q \Gamma_1 + \text{mod}_Q \Gamma'_2 \\ &\leq \text{mod}_Q \Gamma_1 + (1/2)\psi(\lambda_2/\lambda_1) \end{aligned}$$

d'où $\text{mod}_Q \Gamma_1 \geq (1/2)\psi(\lambda_2/\lambda_1)$. □

On choisit $\lambda = (1/C)$ et $c = (\lambda/4)$, où C est définie ci-dessus pour $\lambda_1 = (1/2)$ et $\lambda_2 = (1/8)$. On a $\Gamma(E, F, B) \subset \{\gamma \subset B, \text{diam } \gamma \geq c \text{diam } B\}$, donc

$$(1/2)\psi(4) \leq \text{mod}_Q \Gamma(E, F, B) \leq \text{mod}_Q\{\gamma \subset B, \text{diam } \gamma \geq c \text{diam } B\}.$$

■

Notons qu'un espace loewnesque a de bonnes propriétés de connexité. Nous en donnons deux.

PROPOSITION 5.37. — Un espace de Loewner X est quasiconvexe, au sens qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que, pour tous $x, y \in X$, il existe une courbe γ qui les relie telle que $\ell(\gamma) \leq C \cdot |x - y|$.

DÉMONSTRATION. Soient $x_1, y_1 \in X$ et notons $r_1 = |x_1 - y_1|$. On construit un continuum E_1 joignant x_1 à $X \setminus B(x_1, r_1/4)$ dans $\overline{B(x_1, r_1/4)}$, et F_1 de manière analogue pour y_1 . D'après la Scholie 5.36, on a

$$\text{mod}_Q \Gamma(E_1, F_1, B(x_1, Cr_1)) \geq \frac{1}{2} \psi(4).$$

En testant sur $\rho = \chi_{B(x_1, Cr_1)}$, on trouve qu'il existe une courbe $\gamma_1 \subset B(x_1, Cr_1)$ qui relie E_1 à F_1 telle que

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_1) &\leq \left(\frac{2\mu_X(B(x_1, Cr_1))}{\psi(4)} \right)^{1/Q} \\ &\leq \kappa \cdot r_1 \end{aligned}$$

pour une constante $\kappa < \infty$.

On choisit maintenant $x_2 \in \gamma_1 \cap E_1$, et on écrit $r_2 = |x_1 - x_2| \leq r_1/4$. Prenons $E_2 \subset E_1$ joignant x_1 à $X \setminus B(x_1, r_2/4)$ dans $\overline{B(x_1, r_2/4)}$ et $E'_2 \subset (\gamma_1 \cap \overline{B(x_2, r_2/4)})$ contenant x_2 et de diamètre au moins $r_2/4$. On obtient par le même argument une courbe γ_2 de longueur au plus κr_2 . De proche en proche, on construit γ_k qui relie (γ_{k-1}) à E_k de longueur au plus $\kappa r/4^k$, où E_k contient x_1 et est de diamètre au plus $r/4^{k+1}$. On peut alors extraire une courbe γ_x de $\cup \gamma_k$ de longueur au plus $\kappa r \sum (1/4^n)$. On procède de même avec y , pour obtenir γ_y . La concaténation de γ_x et γ_y nous donne la courbe recherchée. ■

La propriété suivante est cruciale pour construire des condensateurs.

DÉFINITION 5.38 (Connexité locale linéaire). — *Un espace métrique X est linéairement localement connexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, on ait :*

- (1) *tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;*
- (2) *tout couple de points dans $X \setminus \overline{B(x, r)}$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \overline{B(x, (1/C)r)}$.*

EXERCICE 5.39. — *Montrer qu'un espace loewnesque est linéairement localement connexe.*

5.4.2. *Transformations quasiconformes.* Les espaces de Loewner ont été définis pour trouver le bon contexte pour que le théorème suivant soit vrai. Donnons d'abord la définition d'un homéomorphisme géométriquement quasiconforme.

DÉFINITION 5.40 (Homéomorphisme quasiconforme). — *On dit qu'un homéomorphisme $f : X \rightarrow X'$ entre espace de dimension Q est géométriquement quasiconforme s'il existe une constante K telle que, pour toute famille de courbes Γ de X ,*

$$\frac{1}{K} \text{mod}_Q \Gamma \leq \text{mod}_Q f(\Gamma) \leq K \text{mod}_Q \Gamma.$$

THÉORÈME 5.41. — *Soient X un espace Q -loewnesque compact, $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme sur un espace Q -régulier linéairement localement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *f est quasismétrique,*

- (2) f est quasimöbius,
- (3) f est géométriquement quasiconforme,
- (4) f est métriquement quasiconforme.

Si l'une de ces propriétés est satisfaite, alors f est absolument continu et absolument continu sur Q -presque toute courbe de X , et Y est loewnesque.

Ce théorème synthétise plusieurs résultats, voir [HK, HKST, Tys1, Tys2]. Le Théorème 5.5 donne $((1) \Leftrightarrow (2)) \Rightarrow (4)$; la Proposition 5.31 montre $(1) \Rightarrow (4)$; par le Théorème 5.25, ces applications sont absolument continus sur Q -presque toute courbe. Le Théorème 5.42 ci-dessous montre l'absolue continuité.

THÉORÈME 5.42. — Soient X, Y Q -réguliers avec X loewnesque. Si $f : X \rightarrow Y$ est quasisymétrique, alors f est absolument continue.

DÉMONSTRATION. Soit E un ensemble borélien borné de X . On recouvre E par des boules $(B_j)_j$ qui vérifient les conclusions de la Proposition C.1. Par le Lemme 5.35, il existe, pour chaque j , une courbe $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow (1/5)B_j$ telle que $\text{diam } \gamma_j \geq |\gamma_j(1) - \gamma_j(0)| \gtrsim \text{diam } B_j$ et

$$\left(\int_{\gamma_j} g_f \right)^Q \lesssim \int_{(1/5)B_j} \mu_f.$$

Pour établir ce fait, il suffit de tester le module avec $\rho = g_f$ qui est admissible par la Proposition 5.30, en remarquant que $g_f = \mu_f^{1/Q}$ presque partout par le théorème de différentiation de Lebesgue.

Par quasisymétrie, on a $|f(\gamma_j(1)) - f(\gamma_j(0))| \gtrsim \text{diam } f(B_j)$. De plus, comme g_f est un gradient supérieur, on a aussi

$$|f(\gamma_j(1)) - f(\gamma_j(0))| \lesssim \int_{\gamma_j} g_f$$

de sorte que

$$\text{diam } f(B_j)^Q \lesssim \int_{(1/5)B_j} \mu_f.$$

En utilisant le fait que ces boules sont deux à deux disjointes, il vient

$$\sum \text{diam } f(B_j)^Q \lesssim \sum \int_{(1/5)B_j} \mu_f \lesssim \int_{\cup B_j} \mu_f.$$

Donc $\mu_Y(f(E)) \lesssim \int_E \mu_f$. ■

REMARQUE 5.43. — Les transformations quasisymétriques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne sont pas absolument continues en général. En effet, si μ est doublante sur $\mathbb{R}$ et étangère à la mesure de Lebesgue, alors $f(x) = \text{sg}(x)\mu([0, x])$ est quasisymétrique et non absolument continue.

5.5. Théorème de Liouville

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liouville suivant P. Tukia et J. Väisälä [TV].

THÉORÈME 5.44 (de Liouville). — *Une transformation conforme de $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, est une transformation de Möbius.*

Nous allons en fait établir un résultat plus général. Disons qu'un homéomorphisme de $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, est 1-quasiconforme s'il préserve le n -module des condensateurs. Nous allons montrer qu'un tel homéomorphisme est toujours une transformation de Möbius.

PROPOSITION 5.45. — *Soit $f : M \rightarrow M'$ un difféomorphisme conforme entre deux variétés riemanniennes de dimension $Q > 1$. Si Γ est une famille de courbes sur M et $f(\Gamma)$ désigne la famille $\{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, alors*

$$\text{mod}_Q \Gamma = \text{mod}_Q f(\Gamma).$$

En particulier, un difféomorphisme conforme est 1-quasiconforme.

DÉMONSTRATION. Si ρ' est une métrique admissible pour $f(\Gamma)$, on définit

$$\rho = \rho' \circ f \cdot \|Df\|.$$

On obtient par changement de variables et du fait que le jacobien d'une transformation conforme est la puissance Q -ième de la norme de sa dérivée :

$$\text{mod}_Q \Gamma \leq \int_M \rho^Q = \int_{M'} (\rho')^Q$$

donc $\text{mod}_Q \Gamma \leq \text{mod}_Q f(\Gamma)$ et on conclut par symétrie. ■

On établit quelques propriétés intermédiaires.

PROPOSITION 5.46. — *L'ensemble $\mathcal{F}$ des transformations 1-quasiconformes de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, telles que $f(0) = 0$ et $f(e_1) = e_1$ est uniformément équicontinu et toute limite est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION. On travaille sur la sphère $\widehat{\mathbb{R}}^n$ munie de la métrique sphérique, qui en fait un espace de Loewner. Notons ψ le contrôle donnée par la condition de Loewner.

Notons $F_0 = [e_1, \infty]$, $F_1 = [0, \infty]$ avec $e_1 \notin F_1$, et $F_\infty = [0, e_1]$. Il existe $\delta_0 > 0$ telle que, pour tout $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, $\max\{\text{dist}(x, F_j), j = 0, 1, \infty\} \geq \delta_0$. On désignera par F_x un continuum qui maximise cette distance. Par suite, si $r \leq \delta_0/2$, alors $\Delta(B(x, r), F_x) \geq \delta_0/(4r)$. Il vient $\text{mod}_n(B(x, r), F_x) \lesssim (\log \delta_0/(4r))^{1-n}$.

Si maintenant $f \in \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} \psi(\Delta(f(B(x, r)), f(F_x))) &\leq \text{mod}_n(f(B(x, r)), f(F_x)) \\ &\leq \text{mod}_n(B(x, r), F_x) \\ &\lesssim (\log \delta_0/(4r))^{1-n} \end{aligned}$$

Or

$$\Delta(f(B(x, r)), f(F_x)) \leq \frac{\pi}{\text{diam } f(B(x, r))}$$

dès que r est assez petit, donc

$$\text{diam } f(B(x, r)) \leq \frac{\pi}{\psi^{-1}(\kappa(\log \delta_0/(4r))^{1-n})}$$

pour une constante κ donnée. Ceci établit l'équicontinuité.

Soient (f_k) une suite de $\mathcal{F}$ qui tend vers une application f . Montrons d'abord que si $x \notin \{0, e_1, \infty\}$, alors $f(x) \notin \{0, e_1, \infty\}$. On construit deux continua disjoints $E \supset \{x, 0\}$, et $F \supset \{e_1, \infty\}$. On a essentiellement

$$\begin{aligned} \psi \left(\frac{\text{dist}(f_k(x), \{e_1, \infty\})}{d(f_k(x), 0)} \right) &\leq \psi(\Delta(f_k(E), f_k(F))) \\ &\leq \text{mod}_n(f_k(E), f_k(F)) \\ &\leq \text{mod}_n(E, F) < \infty \end{aligned}$$

donc $f(x) \notin \{e_1, \infty\}$. En permutant les rôles, on montre aussi $f(x) \neq 0$.

Supposons maintenant qu'il existe x, y tels que $f(x) = f(y)$. En appliquant le même argument avec un condensateur (E, F) , où $\{x, 0\} \subset E$ et $\{y, \infty\} \subset F$, on montre que $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective et c'est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE 5.47. — *L'ensemble $\mathcal{F}$ des transformations 1-quasiconformes de $\mathbb{R}^n$ telles que $f(0) = 0$ et $f(e_1) = e_1$ est un groupe compact.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\mathcal{F}$ est un groupe. Il nous reste à montrer qu'il est fermé. D'après la Proposition 5.46, il suffit de montrer que si $(f_k) \subset \mathcal{F}$ tend vers f et (E, F) est un condensateur, alors $\text{mod}_n(f(E), f(F)) \geq \text{mod}_n(E, F)$. On aura l'autre inégalité en considérant la suite des homéomorphismes réciproques (f_k^{-1}) .

La Proposition 5.21 montre justement que

$$\text{mod}_n(f(E), f(F)) \geq \limsup \text{mod}_n(f_k(E), f_k(F)) = \text{mod}_n(E, F).$$

■

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Liouville :

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.44. La Proposition 5.45 implique que tout difféomorphisme conforme est 1-quasiconforme. D'après le Théorème A.7, il suffit de montrer que ces applications préservent les sphères.

Notons $B = B(0, 1)$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ le semi-groupe des transformations 1-quasiconformes g telles que $g(B) \supset B$. Pour tout homéomorphisme 1-quasiconforme f , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in]0, \pi[$, il existe des transformations de Möbius φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1(B) = B(x, r)$ et $(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1) \in \mathcal{F}'$.

Il suffit donc de montrer que $f(B) = B$ pour tout $f \in \mathcal{F}'$. On procède par l'absurde. Puisque $\mathcal{F}$ est compact (Corollaire 5.47), $\mathcal{F}'$ l'est aussi. Donc il existe $h \in \mathcal{F}'$ telle que

$$\lambda(h(\overline{B})) = \sup_{f \in \mathcal{F}'} \lambda(f(\overline{B}))$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Si $\lambda(h(\overline{B})) > \lambda(\overline{B})$, alors $\overline{B}$ est un sous-ensemble strict de $h(\overline{B})$, par conséquent $h(\overline{B})$ est aussi un sous-ensemble strict de $(h \circ h)(\overline{B})$. Mais alors,

$$\lambda((h \circ h)(\overline{B})) > \lambda(h(\overline{B})),$$

ce qui contredit la définition de h puisque $(h \circ h) \in \mathcal{F}'$. ■

C. THÉORÈMES DE RECOUVREMENTS ET APPLICATIONS

On énonce deux théorèmes de recouvrements classiques, et on donne en application le théorème de différentiation de Lebesgue. Une référence est [Hei, Chapitre 1].

PROPOSITION C.1 (recouvrement de type 5r). — *Soit X un espace métrique. Etant donnée une famille de boules $\mathcal{B}$ de rayon uniformément borné, il existe une sous-famille $\mathcal{B}'$ de boules deux à deux disjointes telle que*

$$\cup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \cup_{B \in \mathcal{B}'} 5B.$$

On dit qu'une mesure positive localement finie μ satisfait une condition de doublement du volume s'il existe une constante C telle que, pour toute boule B , $\mu(2B) \leq C\mu(B)$.

PROPOSITION C.2 (recouvrement de Vitali). — *Soit X un espace métrique munie d'une mesure doublante μ . Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules centrées en tout point d'un sous-ensemble $A \subset X$ et telle que, pour tout $x \in A$, $\inf\{r, B(x, r) \in \mathcal{B}\} = 0$. Il existe une sous-famille $\mathcal{B}'$ de boules deux à deux disjointes telle que*

$$\mu(A \setminus \cup_{B \in \mathcal{B}'} B) = 0.$$

La Proposition C.2 permet d'établir

THÉORÈME C.3 (Théorème de différentiation de Lebesgue). — *Soit (X, μ) un espace doublant. Pour toute fonction borélienne $f \in L^1(\mu)$, pour μ -presque tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f d\mu = f(x).$$

Si $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ est un homéomorphisme entre espaces mesurés, on peut définir la mesure $f^*\nu$ sur X en $(f^*\nu)(A) = \nu(f(A))$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$ telles que $f^*\nu = \nu_a + \nu_s$.

DÉFINITION C.4 (dérivée volumique). — *La dérivée volumique de f est*

$$\mu_f = \frac{d\nu_a}{d\mu}.$$

On a donc $\nu(f(A)) \geq \int_A \mu_f$ pour tout borélien $A \subset X$. Si μ est une mesure doublante, alors, le théorème de différentiation de Lebesgue implique que pour μ -presque tout $x \in X$, on a

$$\mu_f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(f(B(x, r)))}{\mu(B(x, r))}.$$

Si f est absolument continu *i.e.*, si $\nu_s = 0$, alors

$$\nu(f(A)) = \int_A \mu_f$$

pour tout borélien $A \subset X$, et on a la formule de changement de variables

$$\int_Y \varphi d\nu = \int_X (\varphi \circ f) \mu_f d\mu,$$

pour toute fonction borélienne $\varphi \in L^1(\nu)$.

D. QUELQUES RAPPELS

THÉORÈME D.1 (Vitali-Carathéodory). — *Soit (X, μ) un espace topologique muni d'une mesure borélienne positive. Pour tout $f \in L^1(\mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction semi-continue inférieurement $u \geq f$ telle que*

$$\int f d\mu \geq \int u d\mu - \varepsilon.$$

Voir [Rud, Thm 2.24].

THÉORÈME D.2 (Mazur). — *Soit X un espace linéaire normé. Supposons qu'il existe une suite (x_n) de X qui converge faiblement vers $x \in X$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $n(k)$ et une combinaison linéaire convexe*

$$\widehat{x}_n = \sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_j^n x_{n+j}$$

($\alpha_1^n, \dots, \alpha_{n(k)}^n \geq 0$ vérifient $\sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_j^n = 1$), tels que

$$\lim \|x - \widehat{x}_n\| = 0.$$

Voir [Yos, Thm 2, p.120].

6. THÉORÈME DE MOSTOW

L'objet de ce chapitre est de présenter la démonstration du théorème suivant [Mos, Mar, Sul].

THÉORÈME 6.1 (G. D. Mostow). — *Soient M_1 et M_2 deux variétés compactes hyperboliques de dimension au moins 3. Si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes, alors les variétés sont isométriques.*

Pour $j = 1, 2$, on considère un sous-groupe d'isométries G_j tels que $\mathbb{H}^{n_j}/G_j \simeq M_j$. Le groupe G_j opère donc géométriquement sur $\mathbb{H}^{n_j}$. D'après le lemme de Švarc-Milnor, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n_j}$ est quasi-isométrique à l'orbite d'un point $G_j(w_j)$.

Notons $h : G_1 \rightarrow G_2$ un isomorphisme. On définit $\phi : G_1(w_1) \rightarrow G_2(w_2)$ par $\phi(g(w_1)) = h(g)(w_2)$. On obtient ainsi une quasi-isométrie équivariante $\Phi : \mathbb{H}^{n_1} \rightarrow \mathbb{H}^{n_2}$. Par conséquent, le Théorème 3.26 montre que Φ se prolonge en un homéomorphisme quasimöbius $\varphi : \mathbb{S}^{n_1-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n_2-1}$ équivariant.

On en déduit en particulier que $n_1 = n_2 = n$.

Puisque $n \geq 3$, le Théorème 5.42 implique que φ est absolument continu. Notons λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}^{n-1}$ et μ la mesure sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ définie par

$$d\mu(x, y) = \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}}.$$

Par suite, il existe une fonction intégrable h telle que $d(\varphi^*\lambda) = h d\lambda$. Donc les mesures μ et $\varphi^*\mu$ sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ sont dans la même classe. Étant ergodiques (Théorème de Hopf), on en déduit qu'elles sont proportionnelles. Par le Lemme 4.6, on conclut que φ est de Möbius. Comme φ est une transformation de Möbius qui commute avec G_1 et G_2 , φ se prolonge en une isométrie hyperbolique équivariante par la Proposition A.8, et passe donc au quotient en une isométrie. ■

EXERCICE 6.2. — *Montrer que si $n = 2$, alors ou bien φ est totalement singulier, ou bien φ est une homographie.*

7. ESPACES CAT(-1)

Nous nous référons ici essentiellement à [BH, GdlH, Bou1, Bou2].

7.1. Triangle de comparaison

Soit X un espace métrique géodésique.

Rappelons qu'un triangle Δ est la donnée de trois points a, b, c et de trois segments géodésiques qui les relient deux à deux. On lui associe un *triangle de comparaison* $\overline{\Delta} = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ sur $\mathbb{H}^2$, bien défini à isométries près de $\mathbb{H}^2$, dont la longueur des côtés ont même

longueur que ceux de Δ . Son existence découle essentiellement de l'inégalité triangulaire. En effet, si on place $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans $\mathbb{H}^2$ à distance $d_X(a, b)$, et que l'on considère le cercle centré en $\bar{a}$ de rayon $d_X(a, c)$, alors un point courant z de ce cercle aura sa distance à $\bar{b}$ qui variera entre $d_X(a, b) + d_X(a, c)$ et $|d_X(a, b) - d_X(a, c)|$; or cet intervalle contient $d_X(b, c)$ par l'inégalité triangulaire donc le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence de $\bar{c}$ à distance $d_X(a, c)$ de $\bar{a}$ et $d_X(b, c)$ de $\bar{b}$. On définit aussi l'angle comparaison $\angle_a(b, c)$ comme étant l'angle correspondant de $\bar{\Delta}$ (en $\bar{a}$).

On considère enfin l'application $f_\Delta : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ dont la restriction à chaque côté est une isométrie et telle que $f(a, b, c) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

DÉFINITION 7.1. — (1) On dit que Δ satisfait le théorème de comparaison d'Aleksandroff si f_Δ est une dilatation.

(2) On dit que X est un espace CAT(-1) si tout triangle de X vérifie le théorème de comparaison d'Aleksandroff.

Les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, sont des exemples d'espaces CAT(-1). Plus généralement, les variétés riemanniennes simplement connexes de courbure sectionnelle majorée par (-1) .

EXERCICE 7.2. — Soit X un espace CAT(-1). Etablir les propriétés suivantes.

- (1) Par deux points passe un unique segment géodésique.
- (2) Soit Δ un triangle hyperbolique. La distance d'un point x aux deux côtés opposés est borné par $\log(1 + \sqrt{2})$.
- (3) Soient r_1, r_2 deux rayons géodésiques. Ou bien r_1 et r_2 sont asymptotes et il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} d_X(r_1(t + u), r_2(t)) = 0$; sinon $d_X((r_1(t), r_2(t))) \gtrsim t$.
- (4) Il existe $\delta_0 > 0$ telle que, pour tous $w, x, y \in X$, on ait

$$|d(w, [x, y]) - (x|y)_w| \leq \delta_0.$$

- (5) L'espace X est hyperbolique au sens de Gromov i.e., il existe $\delta > 0$ telle que, pour tous $x, y, z, w \in X$, on ait

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta.$$

7.2. Compactification

On reprend les mêmes idées que pour les espaces hyperboliques. Les démonstrations identiques ne seront pas répétées. On suppose dorénavant que X est un espace propre. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rayons de X sur lequel on met la relation d'équivalence $r \sim r'$ si $d_H(r, r') < \infty$. On désigne $\mathcal{R}/\sim$ par ∂X . Si $w \in X$ est fixé, on note $\mathcal{R}_w$ les rayons issus de w .

EXERCICE 7.3. — On a une bijection naturelle entre $\mathcal{R}/\sim$ et $\mathcal{R}_w$

On munit $X \cup \partial X$ de la topologie suivante. On identifie X aux segments issus de w . Un système de voisinages de $x \in X$ est donné par les boules (de rayon fini). Si $r_0 \in \mathcal{R}$, on écrit $V_{r_0}(R, \varepsilon)$ l'ensemble des rayons r de $X \cup \partial X$ tel que $d(r_0(R), r(R)) \leq \varepsilon$. Une base de voisinages d'un point $\xi \in \partial X$ est donnée par la famille $V_{r_0}(R, \varepsilon)$, où r_0 représente ξ et $R, \varepsilon > 0$.

Si $\xi \in \partial X$, on dit que r aboutit en ξ si r représente ξ .

EXERCICE 7.4. — *Montrer que ∂X est compact si X est propre.*

EXERCICE 7.5. — *On reprend les notations de l'Exercice 2.3. Montrer que si X est un espace de type $CAT(-1)$, alors $\partial_G X$ est homéomorphe à ∂X .*

EXERCICE 7.6. — *Soit X un espace propre de type $CAT(-1)$. On se donne deux rayons r_+ et r_- non équivalents. Montrer qu'il existe une géodésique γ asymptote à r_+ en $+\infty$ et à r_- en $-\infty$, unique au paramétrage près. On dit que X a la propriété de visibilité.*

7.2.1. *Angle de comparaison à l'infini.* On se donne $\xi, \zeta \in \partial X$ et $w \in X$. On considère deux rayons r et r' issus de w qui tendent vers ξ et ζ respectivement. Soit r_0 un rayon de $\mathbb{H}^2$. Pour tout $t > 0$, on considère le triangle de comparaison de $\{w, r(t), r'(t)\}$, où r est représenté par r_0 . Puisqu'il vérifie le théorème de comparaison, on a $\angle_w(r(t), r'(t)) \geq \angle_w(r(t'), r'(t'))$ pour tout $t' \leq t$. Donc

$$\angle_w(\xi, \zeta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_w(r(t), r'(t))$$

existe et définit l'angle de comparaison à l'infini de $\{w, \xi, \zeta\}$.

7.2.2. *Fonctions de Busemann.* Soit r un rayon. On considère

$$b_r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(r(t), x) - t.$$

Cette fonction est bien définie puisque, si $t \geq t'$, alors

$$d(r(t), x) - t - d(r(t'), x) + t' \leq d(r(t), r(t')) - |t' - t| \leq 0$$

donc $t \mapsto d(r(t), x) - t$ est décroissante, et minorée par $-d(r(0), x)$.

DÉFINITION 7.7 (Fonction de Busemann, horosphères). — *Si $\xi \in \partial X$ et $x, y \in X$, on définit*

$$\beta_\xi(x, y) = b_r(x) - b_r(y)$$

où r aboutit en ξ (cette limite est indépendante du rayon car ils sont tous asymptotes). Les lignes de niveaux $\{b_r(x) = L\}$ sont les horosphères.

On a les propriétés suivantes, dont la démonstration s'établit comme dans le cas hyperbolique.

PROPOSITION 7.8. — *On a les propriétés suivantes :*

$$(1) \beta_\xi(x, y) = -\beta_\xi(y, x).$$

$$(2) \quad \beta_\xi(x, y) = \beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y).$$

$$(3) \quad |\beta_\xi(x, y)| \leq d(x, y), \text{ avec égalité si et seulement si } x, y, \xi \text{ sont alignés.}$$

PROPOSITION 7.9. — *L'application $(X \cup \partial X) \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y)$ est continue.*

7.2.3. *Produit de Gromov à l'infini.* On montre que le produit de Gromov se prolonge continûment à l'infini dans le cadre CAT(-1) aussi.

PROPOSITION 7.10. — *Soit $w \in X$, $\xi, \zeta \in \partial X$ et γ la géodésique entre ξ et ζ , cf. Exercice 7.6. On a*

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\xi, \zeta)} (x|y)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w, p) + \beta_\zeta(w, p))$$

où $p \in \gamma$. La limite est indépendante de p et on la note $(\xi|\zeta)_w$. De plus, si x, y sont dans X , alors

$$(7.1) \quad (\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y = \frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y)).$$

PROPOSITION 7.11 (Distance visuelle). — *Pour tous $x \in X$, $\xi, \zeta \in \partial X$, on a*

$$\sin \frac{1}{2} \angle_x(\xi, \zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$

et cela définit une distance d_x sur ∂X . Les angles de comparaison définissent aussi une distance. De plus, si $x, y \in X$ et $\xi, \zeta \in \partial X$, alors

$$d_y(\xi, \zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x, y) + \beta_\zeta(x, y))} d_x(\xi, \zeta).$$

Nous aurons besoin du fait suivant :

LEMME 7.12. — Si $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ et $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 < 1$, alors $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$.

Démonstration. — À θ_1 fixé, l'application $\theta_2 \mapsto \sin \theta_1 + \sin \theta_2$ est strictement croissante de $\sin \theta_1$ à $\sin \theta_1 + 1$; donc il existe $m \leq \pi/2$, tel que $\theta_2 < m$ équivaut à $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 < 1$; or

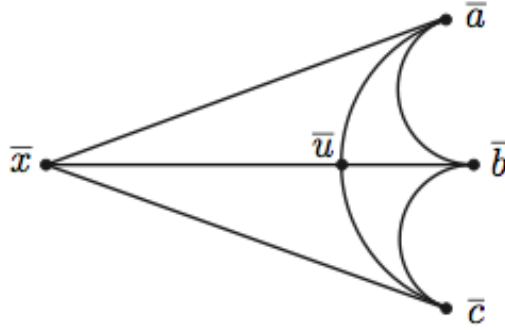
$$\sin \theta_1 + \sin(\pi/2 - \theta_1) = \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \geq \sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 = 1$$

donc $m \leq \pi/2 - \theta_1$. □

Si $x \in X$ et $a, b \in (X \cup \partial X)$, on pose

$$s_x(a, b) = \sin \frac{1}{2} \angle_x(a, b).$$

LEMME 7.13. — Les fonctions s_x et $\angle_x(\cdot, \cdot)$ définissent une distance sur $\{a \in X, |a - x| = t\}$ pour tout $t > 0$.



DÉMONSTRATION. Seule l'inégalité triangulaire requiert une démonstration. On considère a, b, c sur la sphère centrée en x et de rayon $t > 0$.

On peut supposer que $s_x(a, b) + s_x(b, c) < 1$. Cela implique que $\angle_x(a, b) + \angle_x(b, c) < \pi$.

Prenons des triangles de comparaison $\{\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}\}$ et $\{\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}\}$ de sorte que la géodésique $(\bar{x}, \bar{b})$ sépare $\bar{a}$ de $\bar{c}$.

Par hypothèses, on a

$$\angle_{\bar{x}}(\bar{a}, \bar{b}) + \angle_{\bar{x}}(\bar{b}, \bar{c}) < \pi$$

et $|\bar{x} - \bar{a}| = |\bar{x} - \bar{b}| = |\bar{x} - \bar{c}| = t$. Donc le segment $[\bar{a}, \bar{c}]$ coupe $[\bar{x}, \bar{b}]$ en un unique point $\bar{u}$. On note $u \in [x, b]$ le point correspondant. L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent

$$\begin{aligned} |a - c| &\leq |a - u| + |u - c| \\ &\leq |\bar{a} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{c}| \\ &= |\bar{a} - \bar{c}|. \end{aligned}$$

En utilisant la loi hyperbolique du cosinus dans $\mathbb{H}^2$, il vient

$$\begin{aligned} s_x(a, c) &= \left(\frac{1 - \cos \angle_x(a, c)}{2} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{ch}^2 t - \text{ch} |a - c|}{2 \text{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\text{ch} |a - c| - 1}{2 \text{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\text{ch} |\bar{a} - \bar{c}| - 1}{2 \text{sh}^2 t} \right)^{1/2} \\ &= \sin \frac{1}{2} \angle_{\bar{x}}(\bar{a}, \bar{c}). \end{aligned}$$

Mais puisque $\angle_{\bar{x}}(\bar{a}, \bar{c}) = \angle_{\bar{x}}(\bar{a}, \bar{b}) + \angle_{\bar{x}}(\bar{b}, \bar{c})$ et $\sin(\alpha + \beta) \leq \sin \alpha + \sin \beta$ pour $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, on obtient

$$s_x(a, c) \leq \sin \frac{1}{2} \angle_{\bar{x}}(\bar{a}, \bar{b}) + \sin \frac{1}{2} \angle_{\bar{x}}(\bar{b}, \bar{c})$$

soit

$$s_x(a, c) \leq s_x(a, b) + s_x(b, c) .$$

■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.11. Les mêmes calculs que pour la Proposition 2.8 montrent

$$\sin \frac{1}{2} \angle_x(\xi, \zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$

et la dépendance au point base provient de (7.1). L'inégalité triangulaire découle du lemme. ■

7.2.4. *Vue hyperbolique du birapport.* Si $k \geq 1$, on désigne par $\partial^k X$ l'ensemble des k -uplets ordonnés de points deux à deux distincts de ∂X .

On définit $p : \partial^3 X \rightarrow X$ comme suit. Étant donnés (ξ, ξ', ζ) , on considère l'unique point p de (ξ, ξ') tel que $(\xi|\zeta)_p = (\xi'|\zeta)_p$.

EXERCICE 7.14. — *Montrer que p est bien définie.*

PROPOSITION 7.15. — *Si $(\xi, \xi', \zeta, \zeta') \in \partial^4 X$, l'expression*

$$\frac{d_x(\xi, \xi')d_x(\zeta, \zeta')}{d_x(\xi, \zeta')d_x(\xi', \zeta)}$$

ne dépend pas de $x \in \mathbb{H}^n$ et on la note $[\xi, \xi', \zeta', \zeta]$. De plus,

$$\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta] = \frac{1}{2}(\beta_\zeta(p(\zeta, \xi, \zeta'), p(\xi, \zeta, \xi')) - \beta_\xi(p(\zeta, \xi, \zeta'), p(\xi, \zeta, \xi')))$$

et

$$|\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta]| = d_X(p(\xi, \zeta, \xi'), p(\zeta, \xi, \zeta')) .$$

EXERCICE 7.16. — *Montrer qu'il existe une constante C telle que*

$$d_X((\xi, \xi'), (\zeta, \zeta')) - C \leq \max\{0, \log[\xi, \xi', \zeta', \zeta]\} \leq d_X((\xi, \xi'), (\zeta, \zeta')) + C .$$

7.2.5. *Action des isométries.* Le groupe des isométries préserve la relation d'équivalence $\sim$, donc opère sur ∂X .

PROPOSITION 7.17. — *Si g est une isométrie alors*

(1) *g préserve les birapports.*

(2) *g est conforme au sens que*

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi} \frac{d_x(g(\xi), g(\zeta))}{d_x(\xi, \zeta)} = e^{\beta_\xi(x, g^{-1}(x))} .$$

On pose $|g'(\xi)|_x = e^{\beta_\xi(x, g^{-1}(x))}$.

EXERCICE 7.18. — *Montrer que si g est une isométrie, alors*

$$|g'(\xi)|_x |g'(\zeta)|_x = \left(\frac{d_x(g(\xi), g(\zeta))}{d_x(\xi, \zeta)} \right)^2 .$$

7.3. Le bord comme espace mesuré

Soit (X, w) un espace géodésique propre CAT(-1) pointé, et soit G un groupe qui agit géométriquement sur X .

THÉORÈME 7.19. — *On suppose que G est non élémentaire i.e., ∂X contient au moins 3 points. On a*

$$v = \limsup \frac{1}{R} \log |\{G(w) \cap B(w, R)\}| = \dim(\partial X, d_w).$$

Soit ρ la mesure de Hausdorff dans la dimension v ;

(i) ρ est Ahlfors-régulière de dimension v .

(ii) ρ est une mesure G -conforme i.e., pour tout $g \in G$, $\rho \ll g^* \rho \ll \rho$ et

$$\frac{dg^* \rho}{d\rho}(\xi) = |g'(\xi)|_w^v \rho - p.p. ;$$

(iii) L'action de G est ergodique pour ρ .

De plus, deux mesures G -conformes sont proportionnelles.

La démonstration de ce théorème est basée sur l'article de M. Coornaert [Coo].

7.3.1. *Propriétés des mesures G -conformes d'ordre α .* On commence par quelques remarques qui viennent de la définition.

REMARQUE 7.20. — (1) Une mesure ρ est G -conforme de dimension α si et seulement si pour tout $\xi \in \partial X$, pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de ξ tel que pour tout borélien $A \subset V$, on ait

$$\rho(g(A)) \asymp |g'(\xi)|_w^\alpha \rho(A).$$

Ceci découle du fait que les fonctions de Busemann sont continues.

(2) Si $\mathcal{H}_\alpha$ est une mesure de Hausdorff telle que $0 < \mathcal{H}_\alpha(\partial X) < \infty$, alors $\mathcal{H}_\alpha$ est Isom(X)-conforme dans la dimension.

Démonstration. — Soient $g \in \text{Isom}(X)$, $a \in \partial X$, $\varepsilon > 0$ et V un voisinage de a tel que pour $b, c \in V$, on ait

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \frac{d_w(g(b), g(c))}{|g'(a)|_w d_w(b, c)} \leq (1 + \varepsilon).$$

Donc, pour tout $E \subset V$,

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \frac{\text{diam } gE}{|g'(a)|_w \text{diam } E} \leq 1 + \varepsilon;$$

Soit $A \subset V$ un borélien, et soit $\eta > 0$; il existe $t > 0$ et un recouvrement (U_i) de $g(A)$ de taille au plus t tel que $\mathcal{H}_\alpha^t(gA) \geq \sum \text{diam } U_i^\alpha - \eta$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha^{(1+\varepsilon)|g'(a)|_w^{-1}t}(A) &\leq \sum (\text{diam } g^{-1}(U_i))^\alpha \\ &\leq (1+\varepsilon)^\alpha |g'(a)|_w^{-\alpha} \sum \text{diam } U_i^\alpha \\ &\leq (1+\varepsilon)^\alpha |g'(a)|_w^{-\alpha} (\mathcal{H}_\alpha^t(gA) + \eta). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_\alpha(A) \leq (1+\varepsilon)^\alpha |g'(a)|_w^{-\alpha} \mathcal{H}_\alpha(gA)$.

Si (U_i) est un recouvrement de A de taille t tel que

$$\mathcal{H}_\alpha^t(A) \geq \sum \text{diam } U_i^\alpha - \eta,$$

alors $\mathcal{H}_\alpha^{(1+\varepsilon)|g'(a)|_w^t}(gA) \leq (1+\varepsilon)^\alpha |g'(a)|_w^\alpha (\mathcal{H}_\alpha^t(A) + \eta)$. Donc $g^* \mathcal{H}_\alpha$ est dans la même classe que $\mathcal{H}_\alpha$ et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_\alpha(g(B(a, r)))}{\mathcal{H}_\alpha(B(a, r))} = |g'(a)|_w^\alpha.$$

□

- (3) Si ρ est G -conforme et $\rho(\partial X) > 0$ alors $\text{supp } \rho = \partial G$ car $\text{supp } \rho$ est G -invariant et G est non élémentaire donc $(G, \partial X)$ est minimale (voir Théorème E.12).

Les ombres et leurs propriétés sont définies dans l'appendice E.

LEMME 7.21 (de l'Ombre). — Si ρ est une mesure G -conforme de dimension α , alors il existe $C > 0$ et $R_0 \geq 0$ tels que pour tout $R \geq R_0$, pour tout $g \in G$,

$$(1/C)e^{-\alpha|w-g^{-1}w|} \leq \rho(\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) \leq Ce^{-\alpha|w-g^{-1}w|}e^{2\alpha R}.$$

COROLLAIRE 7.22. — Si ρ est G -conforme de dimension α , alors ρ est α -Ahlfors-régulière.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 7.22. Soient $a \in \partial X$ et $r > 0$; comme l'action de G est cocompacte, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, il existe $g \in G$ telle que $|gx - w| \leq C_0$. On choisit $R > C_0 + R_0$, où R_0 est la constante du lemme de l'ombre.

Pour tout $x \in [w, a[$, on a $\mathcal{U}_w(x, R) \subset B(a, C \exp[R - |w - x|])$ d'après le Lemme E.8. On considère $x_- \in [w, a[$ tel que $r = C \exp[R - |w - x_-|]$. Soit $g_- \in G$ tel que $|x_- - w_-| \leq C_0$ avec $w_- = g_-^{-1}w$ (cf. ci-dessus), donc $B(w_-, R - C_0) \subset B(x_-, R)$ et

$$\rho(B(a, r)) \geq \rho(\mathcal{U}_w(w_-, R - C_0)) \geq (1/C)e^{-\alpha|w-w_-|} \geq (1/C)r^\alpha$$

car $|w - w_-| \leq |w - x_-| + C_0$ et $\mathcal{U}_w(w_-, R - C_0) \subset \mathcal{U}_w(x_-, R)$.

De même, pour tout $x \in [w, a[$, on a $\mathcal{U}_w(x, R) \supset B(a, (1/C) \exp -|w - x|)$ d'après le Lemme E.9. On considère $x_+ \in [w, a[$ tel que $r = (1/C) \exp -|w - x_+|$. Soit $g_+ \in G$ tel que $|x_+ - w_+| \leq C_0$ avec $w_+ = g_+^{-1}w$, donc $B(w_+, R + C_0) \supset B(x_+, R)$ et

$$\rho(B(a, r)) \leq \rho(\mathcal{U}_w(w_+, R + C_0)) \lesssim e^{-\alpha|w-w_+|} \lesssim r^\alpha$$

car $|w - w_-| \geq |w - x_-| - C_0$ et $\mathcal{U}_w(w_+, R + C_0) \supset \mathcal{U}_w(x_+, R)$.

Donc ρ est α -Ahlfors-régulière. ■

Pour le lemme de l'ombre, on montre deux lemmes :

LEMME 7.23. — Pour tout $\eta > 0$, il existe $R_0 \geq 0$ telle que pour tout $R \geq R_0$, pour tout $g \in G$,

$$\text{diam} (\partial X \setminus g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) < \eta.$$

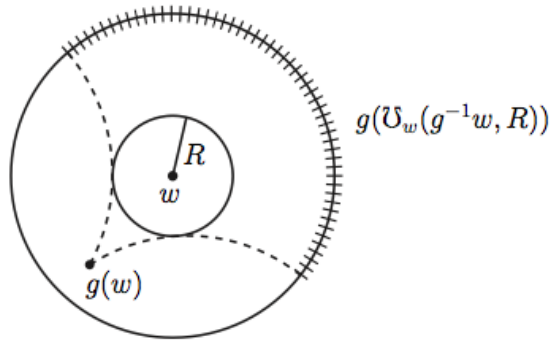
DÉMONSTRATION. Par définition, on a $g\mathcal{U}_w(x, R) = \mathcal{U}_{gw}(gx, R)$ pour tout $x \in X$, et en particulier, $g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R) = \mathcal{U}_{gw}(w, R)$. Donc, si $\xi \notin g\mathcal{U}_w(w, R)$, alors

$$(\xi|gw)_w = d(w, [\xi, gw]) + O(\delta) \geq R + O(\delta).$$

Soient $a, b \notin g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)$; il vient

$$\begin{aligned} (a|b)_w &\geq \min\{(a|g(w))_w, (g(w)|b)_w\} - \delta \\ &\geq R + O(\delta). \end{aligned}$$

D'où $d_w(a, b) \lesssim e^{-R}$.



Par suite, si R est assez grand, on a $d_w(a, b) < \eta$, soit $\text{diam} (\partial X \setminus g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) < \eta$. ■

LEMME 7.24. — Soient $x \in X$, $R > 0$ et $\xi \in \mathcal{U}_w(x, R)$. On a

$$|x - w| - 2R \leq \beta_\xi(w, x) \leq |x - w|.$$

DÉMONSTRATION. Seule la première inégalité requiert un argument. Prenons $y \in [w, \xi] \cap B(x, R)$; on a

$$\beta_\xi(w, x) = \beta_\xi(w, y) + \beta_\xi(y, x) = |w - y| + \beta_\xi(y, x).$$

Or, $|\beta_\xi(x, y)| \leq |x - y| \leq R$, donc

$$|w - x| \leq |w - y| + |y - x| \leq \beta_\xi(w, x) + \beta_\xi(x, y) + R \leq \beta_\xi(w, x) + 2R.$$

■

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.21 DE L'OMBRE. On note $M = \rho(\partial X)$ et $m = \max \rho(\{\xi\})$. On a $m < M$ car $\text{supp } \rho = \partial X$. Soit $m < m_0 < M$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $E \subset \partial X$ et $\text{diam } E < \eta$ alors $\rho(E) \leq m_0$.

D'après le Lemme 7.23, si R est assez grand, $M \geq \rho(g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) \geq M - m_0$. Mais ρ est G -conforme donc

$$\rho(g\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) = \int_{\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)} |g'(\xi)|_w^\alpha d\rho(\xi) = \int_{\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)} \exp\{\alpha\beta_\xi(w, g^{-1}(w))\} d\rho(\xi).$$

Le Lemme 7.24 implique que, pour tout $\xi \in \mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)$, on a

$$|w - g^{-1}w| - 2R \leq \beta_\xi(w, g^{-1}w) \leq |w - g^{-1}w|,$$

soit

$$e^{|w - g^{-1}w| - 2R} \leq e^{\beta_\xi(w, g^{-1}w)} \leq e^{|w - g^{-1}w|}.$$

Donc l'intégrale s'estime par

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)} \exp\{\alpha\beta_\xi(w, g^{-1}(w))\} d\rho(\xi) \leq e^{\alpha|w - g^{-1}w|} \rho(\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) \text{ et} \\ \int_{\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)} \exp\{\varepsilon\alpha\beta_\xi(w, g^{-1}(w))\} d\rho(\xi) \geq e^{\alpha(|w - g^{-1}w| - 2R)} \rho(\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)). \end{cases}$$

Comme notre intégrale est de l'ordre de 1, on obtient

$$e^{-\alpha|w - g^{-1}w|} \lesssim \rho(\mathcal{U}_w(g^{-1}w, R)) \lesssim e^{-\alpha|w - g^{-1}w|} e^{2\alpha R}.$$

■

PROPOSITION 7.25. — *Si ρ est G -conforme de dimension α , alors l'action de G est ergodique.*

DÉMONSTRATION. Soit $E \subset \partial X$ un borélien G -invariant tel que $\rho(E) > 0$. Alors la mesure $\nu : A \mapsto \rho(A \cap E)$ est aussi G -conforme de dimension α . D'après le Corollaire 7.22, $\nu \asymp \rho$ donc $\rho(\partial X \setminus E) = 0$. ■

Pour terminer la démonstration du théorème il suffit de construire une mesure G -conforme dans la bonne dimension.

7.3.2. *Construction d'une mesure G -conforme.* Pour $x \in X$, on note

$$N_x(R) = |\{g \in G, gx \in B(w, R)\}|$$

On définit le *taux de croissance logarithmique des boules* par

$$v = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log N_x(R).$$

REMARQUE 7.26. — Le fait que G agisse proprement de manière cocompacte implique que $v < \infty$. En effet, le lemme de Švarc-Milnor affirme que G est de type fini et que G est quasi-isométrique à X pour toute métrique provenant d'un système de générateurs fini. Supposons que G est engendré par k éléments et notons d_G la métrique des mots induite par cette présentation. Il vient

$$N_x(R) \leq C|B_G(Id, CR)| \leq Ck^{CR}$$

d'où $v \leq C \log k$.

THÉORÈME 7.27. — *Il existe une mesure ρ sur ∂X , telle que (X, d, ρ) est G -conforme de dimension v .*

DÉFINITION 7.28 (Séries de Poincaré). — *Soit $s > 0$, on note*

$$P_s(x) = \sum_{g \in G} e^{-s|w-gx|}.$$

LEMME 7.29. — Si $s > v$ alors $P_s(x)$ est convergente, et si $s < v$ alors $P_s(x)$ est divergente.

DÉMONSTRATION.

$$P_s(x) = \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{k-1 \leq |gx-w| < k} e^{-s|gx-w|} \right)$$

est de même nature que

$$\sum_{k \geq 1} [N_x(k) - N_x(k-1)] e^{-sk},$$

une quantité majorée par $\sum_{k \geq 1} N_x(k) e^{-sk}$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} N_x(k) e^{-sk} &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^k (N_x(j) - N_x(j-1)) \right) e^{-sk} \\ &= \sum_{j \geq 1} (N_x(j) - N_x(j-1)) \sum_{k \geq j} e^{-sk} \\ &= \frac{\sum_{j \geq 1} (N_x(j) - N_x(j-1)) e^{-sj}}{1 - e^{-s}}. \end{aligned}$$

Donc $P_s(x)$ est convergente si et seulement si $\sum N_x(k) e^{-sk}$ est convergente. Le critère de d'Alembert appliqué à cette dernière série permet de conclure. ■

Pour simplifier l'argument, nous allons supposer que $P_v(x)$ est divergente (ce qui est le cas).

On pose, pour $s > v$,

$$\rho_s = \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g \in G} e^{-s|gx-w|} \delta_{gx}.$$

Il s'agit d'une famille de mesures de probabilité sur $X \cup \partial X$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe $s_n \rightarrow v^+$ telle que ρ_{s_n} tend faiblement vers une mesure ρ . Par convergence monotone, $P_s(x)$ tend vers ∞ quand $s \rightarrow v^+$, donc $\text{supp } \rho \subset \partial X$ et $\text{supp } \rho = \partial X$ par minimalité.

Montrons que ρ est G -conforme de dimension v . Soient $g \in G$ et $a \in \partial X$; soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a dans $X \cup \partial X$ tel que, pour tout $x \in V$,

$$|\beta_a(w, g^{-1}w) - \{|x-w| - |gx-w|\}| \leq \varepsilon.$$

Soit $f : \partial X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de support dans V . On a

$$\rho_s(f) = \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g \in G} e^{-s|gx-w|} f(gx).$$

Soit maintenant $h \in G$. Alors

$$\begin{aligned} h^* \rho_s(f) &= \rho_s(f \circ h^{-1}) = \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g \in G} e^{-s|gx-w|} f(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g, gx \in hV} e^{-s|gx-w|} f(h^{-1}gx) \\ &= \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g, gx \in V} e^{-s|hgx-w|} f(gx) \\ &= \frac{1}{P_s(x)} \sum_{g, gx \in V} e^{-s|gx-w|} f(gx) \cdot e^{-s[|hgx-w| - |gx-w|]} \end{aligned}$$

Puisque $g(x) \in V$, on a

$$|hgx-w| - |gx-w| = \beta_a(w, h^{-1}w) + O(\varepsilon)$$

et donc

$$h^* \rho_s(f) = |h'(a)|_w^{s+O(\varepsilon)} \rho_s(f).$$

On prend $s = s_n \rightarrow v^+$, il en découle :

$$\frac{h^* \rho(f)}{\rho(f)} = |h'(a)|_w^{v+O(\varepsilon)}$$

et donc

$$\frac{dh^* \rho}{d\rho}(a) = |h'(a)|_w^v.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.19. Il existe une mesure G -conforme ρ de dimension v d'après le Théorème 7.27. Par suite, le Corollaire 7.22 implique que ρ est v -Ahlfors-régulière, et donc ρ est équivalente à $\mathcal{H}_v$ et $\dim \partial X = v < \infty$, car $v < \infty$, et $\dim \partial X = \dim_M \partial X = v$ d'après le Théorème F.4. On a $v > 0$, sinon on aurait $\rho(B) \asymp 1$ pour toutes les boules, ce qui contredit que ρ est une mesure de probabilité. De plus, $0 < \mathcal{H}_v(\partial X) < \infty$ implique que $\mathcal{H}_v$ est G -conforme de dimension v par la Remarque 7.20, (2). Le Corollaire 7.22 montre aussi que si ν est une autre mesure G -conforme on doit avoir $\dim \nu = v$ et $\nu \asymp \mathcal{H}_v$. Enfin, la mesure ρ est ergodique d'après la Proposition 7.25. ■

7.4. Flot géodésique

Notons GX l'ensemble des géodésiques paramétrées $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ que l'on munit de la distance

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_{GX} = \int_{\mathbb{R}} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \frac{e^{-|t|}}{2} dt.$$

On définit le flot géodésique sur GX par $\Phi_s(\gamma(t)) = \gamma(t + s)$.

EXERCICE 7.30. — *Montrer que le groupe d'isométries opère sur GX par isométries, et que son action commute avec celle du flot géodésique.*

EXERCICE 7.31. — *Montrer que si G opère proprement discontinûment par isométries sur X , il en est de même de son action sur GX .*

EXERCICE 7.32. — *Montrer que l'application $\gamma \in GX \mapsto \gamma(0) \in X$ est une quasi-isométrie.*

7.4.1. *Paramétrage de Hopf.* Chaque géodésique γ dans X a deux points limites à l'infini que l'on note $\gamma(-\infty)$ et $\gamma(+\infty)$. On se fixe un point base $w \in X$, et on définit

$$H : GX \rightarrow \partial^2 X \times \mathbb{R}$$

par

$$H(\gamma) = (\gamma(-\infty), \gamma(+\infty), \beta_{\gamma(+\infty)}(w, \gamma(0))).$$

EXERCICE 7.33. — *Montrer que H est un homéomorphisme (il suffit de montrer que H est continue, bijective et propre).*

Dans cet espace, le flot géodésique devient

$$\Phi_t(\xi, \xi', s) = (\xi, \xi', s + t).$$

7.4.2. *Ergodicité du flot géodésique.* Soit ρ la mesure de construite au paragraphe précédent. Si g est une transformation de Möbius et E est borélien, alors la formule de changement de variables donne

$$\rho(g(E)) = \int_E |g'|_x^v d\rho(x).$$

On définit la mesure μ sur $\partial^2 X$ ainsi : si $E \subset \partial^2 X$ est borélien, on pose

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\rho(x) \otimes d\rho(y)}{|x - y|^{2v}}.$$

On constate que μ est une mesure de Radon sur $\partial^2 X$.

LEMME 7.34. — La mesure μ est invariante sous l'action du groupe de Möbius. Réciproquement, si $f : \partial X \rightarrow \partial X$ est un homéomorphisme tel que $f^* \mu = c \cdot \mu$, où $c > 0$ est une constante, alors f est une transformation de Möbius.

Sur l'espace du flot géodésique GX , on considère la mesure $m = H^*(d\mu \otimes dt)$ via le paramétrage de Hopf. Cette mesure est une mesure de Radon invariante par le flot géodésique (car la mesure de Lebesgue est invariante par translations) et par l'action des isométries de X (car μ l'est).

On se donne un groupe G qui opère géométriquement sur X . La restriction de la mesure m à GX/G (considéré comme domaine fondamental de G sur GX) définit une mesure m_G sur GX/G , invariante par l'action du flot géodésique et de masse finie.

Le théorème de Hopf reste valable dans ce contexte et on obtient :

COROLLAIRE 7.35. — *L'action de G sur $(\partial^2 X, \mu)$ est ergodique.*

7.5. Espaces hyperboliques et espaces CAT(-1)

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 7.36 (M. Bourdon). — *Soit X un espace CAT(-1) propre et géodésiquement complet. S'il existe une transformation de Möbius $f : \partial \mathbb{H}^n \rightarrow \partial X$ alors X et $\mathbb{H}^n$ sont isométriques.*

Nous aurons ainsi tous les ingrédients pour montrer la généralisation suivante du théorème de Mostow dont la démonstration est mot pour mot par la même :

THÉORÈME 7.37 (M. Bourdon). — *Soit X un espace CAT(-1) propre et géodésiquement complet. On suppose que G est un groupe qui opère géométriquement sur $\mathbb{H}^n$, $n \geq 3$, et sur un espace X de type CAT(-1) propre, géodésiquement complet et d'entropie volumique $(n - 1)$. Alors X et $\mathbb{H}^n$ sont isométriques.*

Nous suivons [Bou2] de près en établissant d'abord quelques lemmes.

LEMME 7.38. — Soit $f : \partial\mathbb{H}^2 \rightarrow X$ un plongement de Möbius. On considère $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) \in \partial^4\mathbb{H}^2$ tel que les géodésiques (ξ_1, ξ_2) et (ζ_1, ζ_2) soient sécantes en un point w . Notons $(\xi'_1, \xi'_2, \zeta'_1, \zeta'_2) \in \partial^4 X$ l'image de $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2)$ par f . Alors les géodésiques (ξ'_1, ξ'_2) et (ζ'_1, ζ'_2) sont sécantes en un point x . De plus, on a pour tous $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\angle_x(\xi'_i, \zeta'_j) = \angle_w(\xi_i, \zeta_j).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in (\xi'_1, \xi'_2)$ tel que $\angle_x(\xi'_1, \zeta'_1) = \angle_x(\xi'_2, \zeta'_2)$. On note β cette valeur commune et on pose $\alpha = \angle_w(\xi_1, \zeta_1)$. On a, d'après la Proposition 7.11,

$$\begin{aligned} (7.2) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= [\xi_1, \zeta_1, \xi_2, \zeta_2] \\ &= [\xi'_1, \zeta'_1, \xi'_2, \zeta'_2] \\ &= \frac{d_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_2)}{d_x(\xi'_1, \xi'_2) \cdot d_x(\zeta'_1, \zeta'_2)} \\ &\geq d_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_2) \\ &= \sin^2 \frac{\beta}{2} = s_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot s_x(\xi'_2, \zeta'_2). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\begin{aligned} (7.3) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= [\xi_1, \zeta_2, \xi_2, \zeta_1] \\ &= [\xi'_1, \zeta'_2, \xi'_2, \zeta'_1] \\ &= \frac{d_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_1)}{d_x(\xi'_1, \xi'_2) \cdot d_x(\zeta'_1, \zeta'_2)} \\ &\geq d_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_1) \\ &= s_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot s_x(\xi'_2, \zeta'_1). \end{aligned}$$

Puisque $\angle_x(\cdot, \cdot)$ est une distance, il vient

$$(7.4) \quad \begin{cases} \angle_x(\xi'_1, \zeta'_2) \geq \pi - \beta, \\ \angle_x(\xi'_2, \zeta'_1) \geq \pi - \beta. \end{cases}$$

On obtient de (7.3), (7.4) puis (7.2)

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &\geq s_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot s_x(\xi'_2, \zeta'_1) \\ &\geq \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ &\geq \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Toutes ces inégalités deviennent donc des égalités, et on en déduit que pour tous $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\angle_x(\xi'_i, \zeta'_j) = \angle_w(\xi_i, \zeta_j)$$

et $d_x(\zeta'_1, \zeta'_2) = 1$. Ceci montre que $x \in (\zeta'_1, \zeta'_2)$. ■

LEMME 7.39. — Soient $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ six points deux à deux distincts et dans cet ordre, et désignons par des primes leurs images par f . Les géodésiques (ξ_1, ξ_2) , (η_1, η_2) et (ζ_1, ζ_2) sont concourantes si et seulement si les géodésiques (ξ'_1, ξ'_2) , (η'_1, η'_2) et (ζ'_1, ζ'_2) sont concourantes.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que les géodésiques (ξ'_1, ξ'_2) , (η'_1, η'_2) et (ζ'_1, ζ'_2) sont concourantes en x . Si les géodésiques (ξ_1, ξ_2) , (η_1, η_2) et (ζ_1, ζ_2) ne le sont pas, leurs points d'intersection sont les sommets d'un triangle. Par conséquent, le lemme 7.38 nous dit que la somme de ses angles intérieurs est

$$\angle_x(\xi'_1, \eta'_1) + \angle_x(\eta'_1, \zeta'_1) + \angle_x(\zeta'_1, \xi'_2) = \pi,$$

puisque $\angle_x(\cdot, \cdot)$ est une distance. Ceci contredit la formule de Gauss-Bonnet.

Réciproquement, si on fait courir η_1 de ξ_1 à ξ_2 , le point d'intersection de (η'_1, η'_2) avec (ξ'_1, ξ'_2) parcourt toute la géodésique (ξ'_1, ξ'_2) . Il existe donc un point η''_1 tel que (η''_1, η'_2) la coupe au même point que (ζ'_1, ζ'_2) . Mais alors leurs images réciproques sont concourantes dans $\mathbb{H}^2$, ce qui implique $\eta''_1 = \eta'_1$. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.36. On montre d'abord qu'un plongement de Möbius $f : \partial\mathbb{H}^2 \rightarrow \partial X$ s'étend en un plongement isométrique. Les lemmes 7.38 et 7.39 nous permettent de définir une transformation $F : \mathbb{H}^2 \rightarrow X$ qui envoie les géodésiques (ξ, ζ) sur les géodésiques $(f(\xi), f(\zeta))$.

La proposition 7.15 et le lemme 7.38 montrent alors que F est un plongement isométrique.

Pour en déduire le théorème, on considère les fibrations $p_{\mathbb{H}^n} : \partial^3\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ et $p_X : \partial^3X \rightarrow X$ dont les fibres sont les triplets qui s'envoient sur un point donné. Il suffit de montrer que la transformation $f : \partial^3\mathbb{H}^n \rightarrow \partial^3X$ préserve les fibres, ce qui impliquera l'existence d'une transformation $F : \mathbb{H}^n \rightarrow X$. De plus, les restrictions de F aux copies de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ étant isométriques d'après ci-dessus, on aura F isométrique. De plus, l'hypothèse que X est géodésiquement complet impliquera la surjectivité de F .

Si deux triplets sont dans une même fibre, alors ils définissent deux, trois ou quatre géodésiques concourantes. Chaque paire définit un plan, et donc leurs images sont aussi concourantes. Par conséquent, $f : \partial^3\mathbb{H}^n \rightarrow \partial^3X$ préserve les fibrations. ■

E. HYPERBOLICITÉ AU SENS DE M. GROMOV

On donne une brève introduction à la théorie des espaces et groupes hyperboliques au sens de M. Gromov, qui englobe celle des espaces CAT(-1). On se réfère à [GdlH, A *et al.*, BH, CDP] pour les démonstrations.

DÉFINITION E.1. — *Un espace métrique est δ -hyperbolique si pour tous w, x, y, z , on a*

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta.$$

Un triangle Δ est la donnée de trois points x, y, z et de trois segments géodésiques $[x, y]$, $[x, z]$ et $[y, z]$.

A un triangle, on associe un tripode T défini par trois extrémités $\bar{x}, \bar{y}$, et $\bar{z}$ et de centre c , tels que $|\bar{x} - c| = (y|z)_x$, $|\bar{y} - c| = (x|z)_y$ et $|\bar{z} - c| = (y|x)_z$. On constate que $|\bar{x} - \bar{y}| = |x - y|$, et de même pour les autres distances. Ainsi, il existe une application surjective $f_\Delta : \Delta \rightarrow T$ qui est une isométrie lorsqu'elle est restreinte à un segment. On appelle $f_\Delta^{-1}(c)$ le triple inscrit de Δ .

On dit qu'un triangle Δ est un triangle δ -fin si pour tout $u, v \in \Delta$, on a $|u - v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$.

LEMME E.2. — Si X est géodésique et δ -hyperbolique, alors les triangles sont 4δ -fins et

$$(x|y)_w \leq d(w, [x, y]) \leq (x|y)_w + 4\delta.$$

THÉORÈME E.3. — *Soit X un espace géodésique.*

- *Si tous les triangles sont δ -fins alors X est 2δ -hyperbolique.*
- *Si X est δ -hyperbolique, alors, dans tout triangle, la distance d'un point aux deux côtés opposés est plus petite que 4δ .*

On donne deux propriétés fondamentales de ces espaces.

DÉFINITION E.4. — *Un arbre métrique est un arbre simplicial muni d'une distance de longueur.*

Arbres approximatifs. Soient (X, w) un espace δ -hyperbolique et $k \geq 0$.

- (i) Si $|X| \leq 2^k + 2$, alors il existe un arbre métrique pointé fini T et $\phi : X \rightarrow T$ tels que :

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall x \in X, |\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|, \\ &\rightarrow \forall x, y \in X, |x - y| - 2k\delta \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

- (ii) S'il existe des sous-rayons $(X_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n \leq 2^k$ tel que $X = \cup X_i$, alors, en notant $c = \max\{|w - w_i|\}$, il existe un arbre réel pointé T et $\phi : X \rightarrow T$ tels que

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall x \in X, |\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|, \\ &\rightarrow \forall x, y \in X, |x - y| - 2(k + 1)\delta - 4c \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Ce résultat permet d'exploiter simplement l'hyperbolicité de X . Dans la suite, si A est un arbre approximatif d'un ensemble F , et $\phi : F \rightarrow A$ l'application donnée ci-dessus, on écrira $\bar{x} = \phi(x)$ pour tout $x \in F$.

THÉORÈME E.5 (Lemme de poursuite). — *Soit X un espace δ -hyperbolique géodésique propre. Pour tout (λ, c) , il existe une constante $H = H(\lambda, c, \delta)$ telle que toute (λ, c) -quasigéodésique est à distance au plus H d'une géodésique.*

E.1. Compactification

Soit X un espace δ -hyperbolique, géodésique et propre, et soit $w \in X$. On note $(\cdot|\cdot)_w = (\cdot|\cdot)$ lorsque cela ne prêterait pas à confusion.

Deux (quasi)-rayons r_1 et r_2 sont équivalents si $d_H(r_1, r_2) < \infty$. Une suite (x_n) tend vers l'infini si $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i|x_j) = \infty$; on dit que $(x_n) \sim (y_n)$ si $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i|y_j) = \infty$.

les identifications suivantes qui nous définissent un bord ensembliste de X :

$$\partial X = \{\text{rayons issus de } w\} / \sim = \{\text{quasirayons}\} / \sim = \{\text{suites qui tendent vers } \infty\} / \sim .$$

E.1.1. *Produit de Gromov au bord.* On pose

$$(a|b) = \sup_{x_i \rightarrow a, y_i \rightarrow b} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i|y_j)$$

Si $x_i \rightarrow a$ et $y_j \rightarrow b$ alors on a, d'après la Remarque 7.8 de [GdlH], $(a|b) - 2\delta \leq \liminf (x_i|y_j) \leq (a|b)$. Un système de voisinage pour $a \in \partial X$ est donné par $\{b \in \partial X, (a|b) \geq R\}$. Cela confère une topologie sur ∂X qui le rend compact (voir Chap. 7, § 2 de [GdlH]).

E.1.2. *Métriques visuelles au bord.* On note $\rho_\varepsilon(a, b) = \exp -\varepsilon(a|b)$. On a, pour $a, b, c \in \partial X$,

$$\rho_\varepsilon(a, c) \leq e^{\varepsilon\delta} \max\{\rho_\varepsilon(a, b), \rho_\varepsilon(b, c)\} .$$

PROPOSITION E.6. — Si $\varepsilon\delta \leq \log \sqrt{2}$ alors il existe une métrique complète d_ε telle que

$$e^{-2\delta\varepsilon} \rho_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(x, y) \leq \rho_\varepsilon(x, y) .$$

DÉFINITION E.7 (distance visuelle). — Une métrique d sur ∂X telle que $d(x, y) \asymp \rho_\varepsilon$ est une métrique visuelle issue de w et de paramètre $\varepsilon > 0$.

E.1.3. *Fonctions de Busemann.* Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$ et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ un rayon géodésique tel que $h(0) = y$ et $\lim_\infty h = a$. On définit $\beta_a(x, h) = \lim(|x - h(t)| - t)$, qui est bien défini par l'inégalité triangulaire, et

$$\beta_a(x, y) = \sup\{\beta_a(x, h), \text{ avec } h \text{ comme ci-dessus}\} .$$

Tout rayon est une bonne approximation : si t est assez grand alors

$$|\beta_a(x, y) - (|x - h(t)| - t)| \leq 40\delta .$$

De plus, β_a est presque un cocycle :

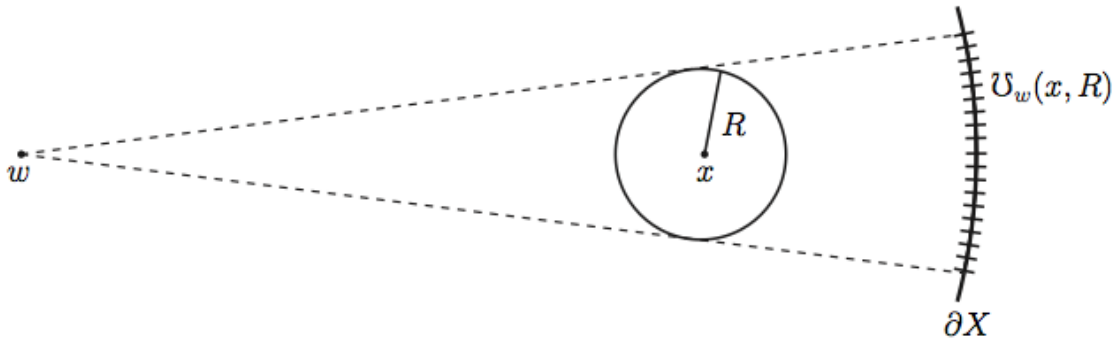
$$\begin{cases} |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, x)| \leq 120\delta \\ |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, z) + \beta_a(z, x)| \leq 200\delta \\ |\beta_a(x, y) - \beta_a(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| + 400\delta \end{cases}$$

Pour une démonstration, se référer au Lemme 8.1 et à la Proposition 8.2 de [GdlH].



E.1.4. *Ombre de boules.* Etant donnés $w, x \in X$ et $R > 0$, on note

$$\mathcal{U}_w(x, R) = \{a \in \partial X, [w, a] \cap B(x, R) \neq \emptyset\}.$$



Sur un arbre, on a $\mathcal{U}_w(x, R) = \{a, (a|x)_w > |x - w| - R\}$.

LEMME E.8. — On a $\text{diam } \mathcal{U}_w(x, R) \lesssim e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|x-w|}$.

DÉMONSTRATION. Soient $a, b \in \mathcal{U}_w(x, R)$, on considère $x_a, x_b \in B(x, R)$ tels que $x_a \in [w, a]$ et $x_b \in [w, b]$. On a $(a|b)_w \geq \min\{(a|x_a)_w, (x_a|x)_w, (b|x_b)_w, (x_b|x)_w\} - 2\delta$.

Or $(a|x_a)_w = |w - x_a| \geq |x - w| - R$, de même : $(b|x_b)_w \geq |x - w| - R$. De plus, $(x_a|x)_w = (1/2)(|x_a - w| + |x - w| - |x - x_a|) \geq |x - w| - R$ et $(x_b|x)_w \geq |x - w| - R$.

Du coup, $(a|b)_w \geq |x - w| - R - 2\delta$ et $d_{a,\varepsilon}(a, b) \leq e^{-\varepsilon(a|b)_w} \leq e^{2\delta} e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|w-x|}$. ■

LEMME E.9. — Soit $x \in X$; il existe $C, C' > 0$ telles que s'il existe un rayon géodésique r tel que $d(x, r) \leq K$ et si $R > K + C$ alors $\mathcal{U}_w(x, R)$ contient une boule de rayon $(1/C')e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|x-w|} e^{-2K\varepsilon}$.

DÉMONSTRATION. Soit a l'extrémité de r , et soit $c \in r$ tel que $|x - c| \leq K$. Alors $B(c, R - K) \subset B(x, R)$. Donc $\mathcal{U}_w(c, R - K) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. Si $(a|b)_w > |c - w| - (R - K) + C$ alors $b \in \mathcal{U}_w(c, R - K)$ via les arbres. Par suite $B(a, (1/C') \exp(\varepsilon(R - K) - \varepsilon|w - c|)) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. Or $|w - c| < |w - x| + K$ donc $B(a, (1/C') e^{-2K\varepsilon} \exp(\varepsilon(R - |w - c|))) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. ■

E.2. Quasi-isométries entre espaces hyperboliques

On utilise le lemme de poursuite et l'approximation par les arbres pour généraliser le théorème de Margulis.

THÉORÈME E.10. — *Une quasi-isométrie Φ entre deux espaces hyperboliques géodésiques se prolonge en transformation quasimöbius ϕ entre leurs bords.*

On a aussi une réciproque :

THÉORÈME E.11 (Paulin, [Pau]). — *Une transformation quasimöbius entre le bord de deux espaces hyperboliques qui admettent des actions géométriques se prolonge en une quasi-isométrie de ces espaces.*

E.3. Groupes hyperboliques

Un groupe hyperbolique est un groupe G qui opère géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique X . Le lemme de Švarc-Milnor implique que l'espace X importe peu (à quasi-isométrie près), et que son bord muni d'une métrique visuelle est bien défini à transformation quasimöbius près par le Théorème E.10 dès que X est non borné. On l'appelle le bord du groupe ∂G .

Le Théorème E.10 implique aussi que le groupe G opère par transformations uniformément quasimöbius sur son bord ∂G .

Si ∂X a au moins trois points, on considère le sous-ensemble Y des points $(a, b, c, x) \in \partial^3 X \times X$ tels que x soit un centre du triangle défini par $\{a, b, c\}$. Puisque les projections sont continues, propres et équivariantes, on en déduit que G opère proprement discontinûment sur les triples $\partial^3 X$. Par conséquent ∂X a une infinité de points puisque $G(x)$ n'est pas bornée.

THÉORÈME E.12. — *L'action d'un groupe hyperbolique sur son bord est minimale dès que son bord contient au moins trois points. Autrement dit, tout point du bord a une orbite dense.*

On a aussi

PROPOSITION E.13. — *Si G opère géométriquement sur un espace propre géodésique hyperbolique, alors il existe $R_0 > 0$ et $C \geq 1$ telles que, pour $w, x \in X$ et $R \geq R_0$, il existe $\xi \in \partial X$ tel que*

$$B(\xi, (1/C)e^{-|x-w|}) \leq \mathcal{U}_w(x, R) \leq B(\xi, Ce^{-|x-w|+2R}).$$

F. MESURES DE HAUSDORFF

Soient $s, t \geq 0$, on pose

$$\mathcal{H}_s^t(X) = \inf \left\{ \sum (\text{diam } U_i)^s, X \subset (\cup U_i), \text{diam } U_i \leq t \right\},$$

et on définit

$$\mathcal{H}_s(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{H}_s^t(X).$$

LEMME F.1. — Si $\mathcal{H}_s(X) < \infty$ alors pour tout $s' > s$, on a $\mathcal{H}_{s'}(X) = 0$.

Si $\mathcal{H}_s(X) > 0$ alors pour tout $s' < s$, on a $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$.

DÉMONSTRATION. Soient $t, \varepsilon > 0$ et (U_i) un recouvrement de taille t tel que

$$\left| \mathcal{H}_{s'}^t(X) - \sum (\text{diam } U_i)^{s'} \right| < \varepsilon.$$

On considère $s > s' \geq 0$. On a

$$\mathcal{H}_s^t(X) \leq \sum (\text{diam } U_i)^s \leq t^{s-s'} \sum (\text{diam } U_i)^{s'} \leq t^{s-s'} (\mathcal{H}_{s'}^t(X) + \varepsilon).$$

Par suite, si $\mathcal{H}_s(X) > 0$, on trouve que $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$, et si $\mathcal{H}_{s'}(X) < \infty$, alors $\mathcal{H}_s(X) = 0$. ■

Définition. La *dimension de Hausdorff* de X est le nombre $s \in [0, \infty]$ telle que pour tout $s' < s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$ et pour tout $s' > s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(X) = 0$.

Posons

$$\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) = \inf \left\{ \sum r_i^s, B_i = B(x_i, r_i), X \subset (\cup B_i), r_i \leq t \right\}.$$

LEMME F.2. — Pour tout $s > 0$, on a

$$2^{-s} \mathcal{H}_s(X) \leq \widehat{\mathcal{H}}_s(X) \leq \mathcal{H}_s(X).$$

Cela signifie que l'on peut estimer la dimension de Hausdorff de X en ne considérant des recouvrements que par des boules.

DÉMONSTRATION. Si (B_i) est un recouvrement par des boules de rayon au plus t , alors $\text{diam } B_i \leq 2t$. Donc, si $|\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) - \sum r_i^s| \leq \varepsilon$, alors $\mathcal{H}_s^{2t}(X) \leq 2^s \widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) + \varepsilon$, et $\mathcal{H}_s(X) \leq 2^s \widehat{\mathcal{H}}_s(X)$.

Réciproquement, on se fixe un recouvrement (U_i) de taille t telle que $|\mathcal{H}_s^t(X) - \sum (\text{diam } U_i)^s| \leq \varepsilon$. Pour chaque i , on considère $x_i \in U_i$, par suite $U_i \subset B(x_i, \text{diam } U_i) = B_i$. Donc $\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) \leq \mathcal{H}_s^t(X) + \varepsilon$ et $\widehat{\mathcal{H}}_s(X) \leq \mathcal{H}_s(X)$. ■

F.1. Dimension de Minkowski

Soit X un ensemble de diamètre borné. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε centrées sur X qu'il faut pour recouvrir X . On définit

$$\dim_M X = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

A $\varepsilon > 0$ fixé, on note aussi $P(\varepsilon)$ le nombre maximal de boules centrées sur X et de rayon ε qui soient deux à deux disjointes.

LEMME F.3. — On a

$$\dim X \leq \dim_M X = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log P(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION. On montre d'abord l'égalité : soit $\varepsilon > 0$, si $B_1, \dots, B_{N(\varepsilon)}$ est un recouvrement par des boules de rayon ε , alors la Proposition C.1 de recouvrement nous permet d'affirmer que $N(\varepsilon) \leq P(\varepsilon/5)$. De plus, si $B_1, \dots, B_{P(\varepsilon)}$ sont deux à deux disjointes, alors $(2B_i)$ recouvrent X , sinon le recouvrement ne serait pas maximal : il en découle que $N(2\varepsilon) \leq P(\varepsilon)$. Du coup,

$$\dim_M X = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log P(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

On suppose que $\dim_M X < \infty$. Soit $\eta > 0$, si ε est assez petit, alors $\log N(\varepsilon) \leq \log(1/\varepsilon)(\dim_M X + \eta)$. Notons $s = \dim_M X + \eta/2$; on considère un recouvrement par des boules (B_i) de taille ε . Par suite, on a

$$\widehat{\mathcal{H}}_s^\varepsilon(X) \leq N(\varepsilon)\varepsilon^s = \exp\{\log N(\varepsilon) - s \log(1/\varepsilon)\}.$$

Or, $\log N(\varepsilon) - s \log(1/\varepsilon) \leq (-\eta/2) \log 1/\varepsilon$, donc $\widehat{\mathcal{H}}_s^\varepsilon(X) \leq \varepsilon^{\eta/2}$ et $\dim X \leq s$. Par suite, $\dim X \leq \dim_M X$. ■

F.2. Ahlfors-régularité

THÉORÈME F.4. — Si (X, μ) est Q -Ahlfors-régulier alors $\dim_M X = \dim X = Q$ et $\mathcal{H}_Q \asymp \mu$.

DÉMONSTRATION. Soit $A \subset X$ un borélien borné.

On se fixe $t, \varepsilon > 0$ et un recouvrement par des boules (B_i) tel que $\sum r_{B_i}^Q \leq \widehat{\mathcal{H}}_Q^t(A) + \varepsilon$. On a

$$\mu(A) \leq \mu(\cup B_i) \leq \sum \mu(B_i) \lesssim \sum r_i^Q \lesssim \widehat{\mathcal{H}}_Q^t(A) + \varepsilon.$$

Par conséquent, $\mu(A) \lesssim \widehat{\mathcal{H}}_Q(A)$.

Réciproquement, on suppose que $\mu(A) < \infty$ et on se fixe $\varepsilon > 0$. Comme μ est régulière il existe un compact $K \subset A$, et un ouvert $U \supset A$ tels que $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. On considère $t < (1/2) \inf\{d(x, K), x \notin U\}$. Les boules $\{B(x, r/5)\}_{x \in K, r \leq t}$ recouvrent K , donc la Proposition C.1 implique qu'il existe un sous-recouvrement (B_i) tel que $(1/5)B_i \cap (1/5)B_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$.

Par suite,

$$\mathcal{H}_Q^t(K) \lesssim \sum r_i^Q \lesssim \sum (r_i/5)^Q \leq C \sum \mu(1/5)B_i.$$

Or

$$\sum \mu(1/5)B_i \leq \mu(\cup (1/5)B_i) \leq \mu(\cup B_i) \leq \mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Donc $\mathcal{H}_Q(K) \lesssim \mu(A)$, et $\mathcal{H}_Q(A) \lesssim \mu(A)$ car $\mathcal{H}_Q$ est aussi régulière.

En prenant $A = X \cap B(x_0, R)$, on obtient $\dim X = Q$.

Soit $\varepsilon > 0$; on considère $P(\varepsilon)$ boules deux à deux disjointes centrées sur X et de rayon ε . Alors

$$\mu(X) \geq \sum \mu(B_i) \gtrsim P(\varepsilon)\varepsilon^Q$$

donc

$$\log P(\varepsilon) \leq Q \log(1/\varepsilon) + O(1)$$

et $\dim_M X \leq Q$. ■

RÉFÉRENCES

- [A et al.] Juan Alonso et al. Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short, accessible sur <http://www.latp.univ-mrs.fr/~hamish/MSRInotes2004.pdf>.
- [BKR] Zoltán M. Balogh, Pekka Koskela, and Sari Rogovin. Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2007), 645–664.
- [Bou1] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace. *Enseign. Math. (2)* **41**(1995), 63–102.
- [Bou2] Marc Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83**(1996), 95–104.
- [BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [CFKP] James W. Cannon, William J. Floyd, Richard Kenyon, and Walter R. Parry. Hyperbolic geometry. In *Flavors of geometry*, pages 59–115. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. Accessible sur <http://www.msri.org/publications/books/Book31/>.
- [Che] Jeff Cheeger. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces. *Geom. Funct. Anal.* **9**(1999), 428–517.
- [Coo] Michel Coornaert. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.* **159**(1993), 241–270.
- [CDP] Michel Coornaert, Thomas Delzant, and Athanatase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov.*, volume 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Lecture Notes in Mathematics.
- [Cox] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1969 edition.
- [dR] Georges de Rham. Sur les polygones générateurs de groupes fuchsien. *Enseignement Math.* **17**(1971), 49–61.
- [dC] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

- [DD] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini, Paris, 2005. Seconde édition.
- [EO] Patrick Eberlein and Barrett O'Neill. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* **46**(1973), 45–109.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [Hat] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hei] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [HK] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* **181**(1998), 1–61.
- [HKST] Juha Heinonen, Pekka Koskela, Nageswari Shanmugalingam, and Jeremy T. Tyson. Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings. *J. Anal. Math.* **85**(2001), 87–139.
- [Hop] Eberhard Hopf. Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77**(1971), 863–877.
- [Kai] Vadim A. Kaimanovich. Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **455**(1994), 57–103.
- [Loe] Charles Loewner. On the conformal capacity in space. *J. Math. Mech.* **8**(1959), 411–414.
- [Mar] Gregory A. Margulis. The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group. *Soviet Math. Dokl.* **11**(1970), 722–723.
- [Mos] George D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **34**(1968), 53–104.
- [Pau] Frédéric Paulin. Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord. *J. London Math. Soc. (2)* **54**(1996), 50–74.
- [Rud] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.
- [Sha] Nageswari Shanmugalingam. Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana* **16**(2000), 243–279.
- [Spi] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

- [ST] Jan Olov Strömberg and Alberto Torchinsky. Weights, sharp maximal functions and Hardy spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **3**(1980), 1053–1056.
- [Sul] Dennis Sullivan. Discrete conformal groups and measurable dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 57–73.
- [Thu] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy, accessible sur <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [TF] V. V. Trofimov and A. T. Fomenko. Riemannian geometry. *J. Math. Sci. (New York)* **109**(2002), 1345–1501. Geometry, 8.
- [Tuk] Pekka Tukia. Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group. *Acta Math.* **154**(1985), 153–193.
- [TV] Pekka Tukia and Jussi Väisälä. A remark on 1-quasiconformal maps. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **10**(1985), 561–562.
- [Tys1] Jeremy Tyson. Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23**(1998), 525–548.
- [Tys2] Jeremy Tyson. Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces. *Conform. Geom. Dyn.* **5**(2001), 21–73 (electronic).
- [Väi1] Jussi Väisälä. *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229.
- [Väi2] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.
- [Yos] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123. Academic Press Inc., New York, 1965.

Peter Haïssinsky

LATP/CMI

Université de Provence

39, rue Frédéric Joliot-Curie

13453 Marseille cedex 13

France

Courriel : phaissin@cmi.univ-mrs.fr