

# Cours éclair sur les équations différentielles

Peter Haïssinsky

November 24, 2004

Ces notes sont en cours d'élaboration. Tout commentaire sur le contenu sera apprécié.

## Contents

<b>1</b>	<b>Equations du premier ordre sur la droite réelle</b>	<b>6</b>
1.1	Résolution par quadrature . . . . .	6
1.1.1	Equations à variables séparables . . . . .	7
1.1.2	Equations linéaires du premier ordre . . . . .	7
1.1.3	Autres méthodes de résolution . . . . .	9
1.1.4	Résumé . . . . .	12
1.1.5	Equations classiques . . . . .	13
1.2	Méthodes qualitatives . . . . .	14
1.3	Méthodes numériques . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Systèmes d'équations différentielles</b>	<b>26</b>
2.1	Systèmes linéaires à coefficients constants . . . . .	30
2.2	Méthodes qualitatives pour les systèmes planaires autonomes . . . . .	35
2.2.1	Etude locale . . . . .	35
2.2.2	Etude globale . . . . .	43
<b>A</b>	<b>Théorème de Cauchy-Peano</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Théorème de Frobenius</b>	<b>53</b>

Soient  $(E, |\cdot|)$  un espace de Banach défini sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert qui contient 0.

**Définition.** Une équation différentielle du  $n^{\text{ième}}$  ordre est une équation qui fait intervenir les dérivées au plus  $n^{\text{ième}}$  de fonctions inconnues. On supposera que l'équation est donnée sous la forme

$$\frac{d^n}{dt^n}u(t) = X(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)),$$

où  $X : I \times E^n \rightarrow E$  est une fonction continue et  $u : I \rightarrow E$  est une fonction inconnue que l'on cherche de classe  $C^n(I)$ .

**Première réduction.** Étant donnée une telle équation différentielle, on peut toujours se ramener à une équation du premier ordre de la manière suivante : on pose  $x_0(t) = u(t)$ ,  $x_1(t) = u'(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1}(t) = u^{(n-1)}(t)$ ,  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  et on note  $\tilde{X} : I \times E^n \rightarrow E^n$  définie par

$$\tilde{X}(t, x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, X(t, x_0, \dots, x_{n-1})).$$

Résoudre l'équation différentielle du  $n^{\text{ième}}$  ordre donnée par  $X$  revient à résoudre l'équation différentielle du premier ordre donnée par  $\tilde{X}$ .

**Exemple.**  $u^{(3)} = u' + u - t^2$  devient

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_0 + x_1 - t^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 + x_1 - t^2 \end{pmatrix}.$$

Du coup, on se contentera, sauf mention contraire, d'étudier les équations du premier ordre. L'application  $X$  est alors un *champ de vecteurs* : à tout point  $(t, x)$ , on associe le vecteur  $(1, X(t, x))$  qui correspond à la tangente d'une solution qui passe par  $(t, x)$ .

**Remarque.** Une équation différentielle n'est pas toujours donnée sous la forme ci-dessus. Il s'agit donc dans un premier temps de noter pour quelles valeurs de  $t$  et de  $x \in E$  l'équation est bien définie pour se ramener au cas ci-dessus. Dans un second temps, il faudra vérifier que les solutions obtenues correspondent bien au problème original.

L'objet de ce cours est de donner une introduction à la théorie qualitative des équations différentielles vues comme systèmes dynamiques. On conclut cette introduction par des théorèmes fondamentaux qui nous permettront de travailler sans arrière pensée (théorèmes d'existence et d'unicité de solutions, de dépendance continue des solutions et d'explosion). La première partie est consacrée aux équations différentielles définies sur  $\mathbb{R}$  : on commence par passer en revue les techniques standards de calcul explicite des solutions. Puis, on propose des méthodes qualitatives de résolution. Le dernier paragraphe décrit brièvement des méthodes de calculs approchés de solutions (Euler et Runge-Kutta essentiellement). La seconde partie traite des équations différentielles en dimension supérieure, et essentiellement dans  $\mathbb{R}^2$ . C'est l'occasion d'introduire la notion de flot, et d'étudier sa régularité en fonction de celle du champ de vecteurs. Dans un premier temps, on montre comment résoudre les équations linéaires à coefficients constants, et on en profite pour donner la classification des équations différentielles linéaires et homogènes de  $\mathbb{R}^2$ . Dans un second temps, on s'attaque à l'étude qualitative des équations différentielles non linéaires de  $\mathbb{R}^2$ . Les énoncés et les démonstrations s'en trouvent simplifier. Cette étude est basée sur celle de conjugaison. Elle comprend une étude locale (boîte à flot, étude des points d'équilibre hyperboliques), et globale (intégrales premières, ensemble  $\omega$ -limites, attracteurs, application de premier retour de Poincaré). On

conclut cette partie par le théorème de Poincaré-Bendixson. Deux appendices complètent ce cours. Le premier est consacré au théorème de Cauchy-Peano qui assure l'existence de solutions d'une équation différentielle lorsque le champ de vecteurs n'est supposé que continu. Le second est sur le théorème de Frobenius, que l'on peut voir comme une généralisation naturelle des équations différentielles en dimension supérieure.

**Le problème de Cauchy : existence et unicité.** On considère une fonction continue  $X : I \times E \rightarrow E$  et on cherche toutes les fonctions  $x : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $x' = X(x, t)$ .

La première question qui se pose est bien sûr celle de l'existence d'une solution. On verra aussi que celle de l'unicité joue un rôle très important dans la suite. Le théorème suivant apporte une réponse satisfaisante à ces deux questions.

**Théorème de Cauchy-Lipschitz.** *On suppose que  $X$  vérifie la condition de Lipschitz suivante : il existe une constante  $L \geq 0$  telle que, pour tout  $x, y \in E$ , pour tout  $t \in I$ ,  $|X(t, x) - X(t, y)| \leq L \cdot |x - y|$ . Alors, étant donné  $u_0 \in E$ , il existe une unique solution  $u \in \mathcal{C}^1(I, E)$  de  $x' = X(t, x)$  telle que  $u(0) = u_0$ .*

**Remarque.** En général, on montre qu'une condition de Lipschitz plus faible est satisfaite :

- CONDITION LOCALE. on a la condition seulement sur un voisinage de  $u_0$  ; alors la solution existe et est unique sur un intervalle  $J \subset I$  ;
- CONDITION SEMI-GLOBALE. on a la condition sur tout borné i.e., pour tout  $r > 0$ , il existe une constante  $L = L(r) > 0$  telle que si  $x, y \in E$  vérifient  $|x - u_0| < r$  et  $|y - u_0| < r$ , alors  $|X(t, x) - X(t, y)| \leq L \cdot |x - y|$  ; en ce cas, on a une unique solution ou bien sur tout  $I$ , ou bien sur un sous-intervalle.

En particulier, une solution locale existe toujours dès que  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz que nous proposons utilise la méthode d'approximations successives de E. Picard, et s'appuie sur le théorème du point fixe suivant.

**Théorème du point fixe.** *Soient  $(F, d)$  un espace métrique complet et  $f : F \rightarrow F$  une application strictement contractante i.e., il existe  $0 \leq k < 1$  telle que, pour tout  $x, y \in F$ ,  $d(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ . Alors il existe un unique point fixe  $x_0$  i.e.,  $f(x_0) = x_0$ .*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ. Considérons l'espace  $\mathcal{F}$  des fonctions continues  $u : I \rightarrow E$  muni de la norme uniforme, ce qui en fait un espace de Banach.

On montre dans un premier temps l'existence d'une unique solution sur un intervalle  $[0, \tau]$  avec  $L \cdot \tau < 1$ . Pour cela, on considère l'application  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  définie par

$$T(u)(t) = u_0 + \int_0^t X(s, u(s)) ds.$$

Comme  $T(u)$  est une primitive d'une fonction continue,  $T(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de dérivée  $X(t, u(t))$ . Donc si  $u$  est un point fixe de  $T$ , alors  $u$  satisfait notre équation différentielle. Montrons donc que  $T$  est contractante : on se fixe  $t \in [0, \tau]$  et  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ . Alors

$$|T(u_1)(t) - T(u_2)(t)| = \left| \int_0^t (X(s, u_1(s)) - X(s, u_2(s))) ds \right| \leq \int_0^t |X(s, u_1(s)) - X(s, u_2(s))| ds ;$$

par la condition de Lipschitz, on a

$$|T(u_1)(t) - T(u_2)(t)| \leq L \cdot \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \leq L \cdot \tau \cdot \sup_{[0, \tau]} |u_1 - u_2|.$$

On vient donc de montrer l'existence et l'unicité d'une solution sur  $[0, \tau]$ . Comme  $u(\tau) = \int_0^\tau X(s, u(s)) ds$  est bien définie, on peut maintenant résoudre l'équation sur  $[\tau, 2\tau]$  avec  $u(\tau)$  comme condition initiale, et ainsi de suite. De même, on peut résoudre l'équation dans  $[-\tau, 0]$  et de proche en proche sur tout  $I$ .

Dans le cas local, on procède comme suit. On se fixe  $\varepsilon > 0$  pour que  $X$  soit  $L$ -Lipschitz sur  $B = \{x, |x - u_0| \leq \varepsilon\}$ . On note  $M = \sup |X(t, x)|$  quand  $x \in B$  et  $t$  varie dans un intervalle compact  $J' \subset I$  qui contient 0.  $M$  est bien finie car

$$|X(t, x)| \leq |X(t, x) - X(t, u_0)| + |X(t, u_0)| \leq L \cdot \varepsilon + |X(t, u_0)|,$$

et l'application  $t \in J' \mapsto |X(t, u_0)|$  est continue, donc atteint ses bornes sur  $J'$  qui est compact.

Notons  $J = J' \cap [-\varepsilon/(2M), \varepsilon/(2M)]$  et  $\mathcal{F}_B$  l'ensemble des fonctions continues de  $J$  dans  $B$ . Cet espace est fermé dans  $\mathcal{F}$  donc complet. Si on montre que  $T(\mathcal{F}_B) \subset \mathcal{F}_B$ , la démonstration précédente produira l'existence et l'unicité locale. Soit  $u \in \mathcal{F}_B$ , on a

$$|T(u)(t) - u_0| \leq \int_0^t |X(s, u(s))| ds \leq M \cdot |t| \leq \varepsilon.$$

Donc  $T(u) \in \mathcal{F}_B$ . ■

**Conséquences de l'unicité.** Supposons que  $X$  vérifie la condition de Lipschitz semi-globale. Si  $u_1 : I_1 \rightarrow E$  et  $u_2 : I_2 \rightarrow E$  sont des solutions de la même équation différentielle et qu'il existe un  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  tel que  $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ , alors  $u_1 = u_2$  sur  $I_1 \cap I_2$  par un argument de connexité, et on peut définir une solution  $u : I_1 \cup I_2 \rightarrow E$ . Étant donnée une condition initiale du type  $x(0) = x_0$ , on regarde la réunion  $I_{max}$  des intervalles  $I$  qui contiennent 0 et tels qu'il existe une solution  $u_I : I \rightarrow E$  de  $x' = X(t, x)$  telle que  $u_I(0) = x_0$ . Il existe donc une unique *solution maximale*  $u_{max} : I_{max} \rightarrow E$  telle que  $u_{max}(0) = x_0$  et telle que toute autre solution  $u : I \rightarrow E$  vérifie  $I \subset I_{max}$ . La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz montre que  $I_{max}$  est un ouvert. On a de plus

**Théorème de l'explosion.** *Soit  $X$  un champ Lipschitz sur tout borné et soit  $u$  une solution maximale. Si  $I_{max} = ]\alpha, \beta[$  et si  $\beta < +\infty$  alors  $u$  n'est pas bornée au voisinage de  $\beta$ . Par conséquent, si l'image de  $u$  est contenue dans un ensemble borné, alors  $I_{max} = \mathbb{R}$ .*

*En particulier, si  $\dim E < \infty$  et si  $\beta < \infty$ , alors  $u$  sort de tout compact i.e., pour tout  $K \subset E$ , il existe  $t$  arbitrairement proche de  $\beta$  tel que  $u(t) \notin K$ . Par conséquent, s'il existe un compact  $K$  tel que  $u(I_{max}) \subset K$ , alors  $I_{max} = \mathbb{R}$ .*

Autrement dit, une orbite part à l'infini en temps ou dans l'espace.

**DÉMONSTRATION.** On observe que toute solution  $u$  définie sur un intervalle  $[0, t_0[$  et vérifiant  $\sup_{[0, t_0[} |u| < \infty$  se prolonge à un voisinage de  $[0, t_0]$ . En effet, notons  $r = \sup_{[0, t_0[} |u|$ ; on a

$$|X(t, u(t)) - X(t, u(0))| \leq L(r) \cdot |u(t) - u(0)| \leq L(r) \cdot (r + |u_0|).$$

Par ailleurs,  $t \mapsto |X(t, u_0)|$  est continue et donc bornée sur  $[0, t_0]$ . Il en résulte que  $|X(t, u(t))| \leq C$  pour une certaine constante  $C > 0$ .

Enfin,  $|u'(t)| \leq C$  pour  $0 \leq t < t_0$  ce qui implique  $|u(t) - u(s)| \leq C(t - s)$  pour  $0 \leq s \leq t < t_0$ . Cette continuité uniforme implique que  $u(t_0)$  est bien définie comme limite de  $u(t)$  pour  $t \rightarrow t_0^-$ . De même, la continuité de  $X$  implique l'existence de  $u'(t_0)$ . On peut maintenant appliquer la version locale du Théorème de Cauchy-Lipschitz avec  $u_0 = u(t_0)$  pour obtenir une solution sur un voisinage de  $[0, t_0]$ .

Ceci montre que  $\beta$  ne peut être fini si  $u$  est bornée. ■

**Remarque.** Il peut arriver que, selon la condition initiale, on ait unicité d'une solution locale, mais non d'une solution maximale, si le champ n'est pas lipschitzien partout.

**Dépendance par rapport aux conditions initiales et au champ de vecteurs.** Nous allons montrer que les solutions dépendent continûment par rapport aux données de l'équation différentielle. On commence par un lemme préliminaire :

**Lemme de Gronwall.** Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I$  contenant l'origine.

1. S'il existe deux constantes  $C > 0$  et  $K > 0$  telles que, pour tout  $t > 0$  dans  $I$ , on ait

$$g(t) \leq C + K \cdot \int_0^t g(s) ds,$$

alors, pour tout  $t > 0$  dans  $I$ , on a

$$g(t) \leq C \cdot \exp(K \cdot t).$$

2. S'il existe trois constantes  $C, C', K > 0$  telle que, pour  $t > 0$  dans  $I$ ,

$$g(t) \leq C + C' \cdot t + K \cdot \int_0^t g(s) ds,$$

alors, pour tout  $t > 0$  dans  $I$ , on a

$$g(t) \leq C \cdot \exp(K \cdot t) + (C'/K) \cdot (\exp(K \cdot t) - 1).$$

DÉMONSTRATION. 1. Posons  $G_1(t) = C + K \cdot \int_0^t g(s) ds$ . On a  $g(t) \leq G_1(t)$  par hypothèse. De plus,  $G_1$  est dérivable et sa dérivée vérifie  $G_1'(t) = K \cdot g(t) \leq K \cdot G_1(t)$ . Par suite  $G_1'(t)/G_1(t) \leq K$  donc  $\log G_1(t) \leq (K \cdot t) + C$  et

$$g(t) \leq G_1(t) \leq C \cdot \exp(K \cdot t),$$

pour  $t > 0$  dans  $I$ .

2. On pose  $G_2(t) = C + C' \cdot t + K \cdot \int_0^t g(s) ds$ . La fonction  $G_2$  est dérivable; il vient

$$G_2'(t) = C' + K \cdot g(t) \leq C' + K \cdot G_2(t) = C' + KC + K \cdot \int_0^t G_2(s) ds.$$

Comme  $G_2' > 0$ , on obtient d'après 1.

$$G_2'(t) \leq (C' + KC) \cdot \exp(K \cdot t)$$

pour  $t > 0$  dans  $I$ . En intégrant cette inégalité sur  $[0, t]$ , on obtient le lemme. ■

**Théorème de dépendance continue.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux champs de vecteurs  $L$ -lipchitziens définis sur  $I \times E$  tels que  $\sup |X_1 - X_2| \leq \varepsilon_X$ . Si  $u_1$  et  $u_2$  sont des solutions de  $x' = X_1(t, x)$  et de  $x' = X_2(t, x)$  telles que  $|u_1(0) - u_2(0)| \leq \varepsilon_0$ , alors, pour tout  $t \in I$ , on a

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \varepsilon_0 \cdot \exp(L \cdot |t|) + (\varepsilon_X/L) \cdot (\exp(L \cdot |t|) - 1).$$

DÉMONSTRATION. On écrit, pour tout  $t > 0$ ,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \left| u_1(0) + \int_0^t (X_1(s, u_1(s)) - X_1(s, u_2(s))) ds + \int_0^t (X_1(s, u_2(s)) - X_2(s, u_2(s))) ds - u_2(0) \right|.$$

Par suite,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(0) - u_2(0)| + \int_0^t |X_1(s, u_1(s)) - X_1(s, u_2(s))| ds + \int_0^t |X_1(s, u_2(s)) - X_2(s, u_2(s))| ds.$$

En utilisant les bornes des hypothèses et le fait que les champs sont Lipschitz, on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \varepsilon_0 + t \cdot \varepsilon_X + L \cdot \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds.$$

Nous pouvons donc appliquer le Lemme de Gronwall pour conclure que

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \varepsilon_0 \exp(L \cdot t) + (\varepsilon_X/L) \cdot (\exp(L \cdot t) - 1).$$

Pour  $t < 0$ , on obtient

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \varepsilon_0 \exp(L \cdot |t|) + (\varepsilon_X/L) \cdot (\exp(L \cdot |t|) - 1).$$

■

Un des objectifs de l'étude des équations différentielles est de décrire la solution maximale pour chaque condition initiale fixée, i.e., a-t-on  $I_{max} = \mathbb{R}$ ? Si oui, quel est le comportement au voisinage de l'infini? Quel est le comportement des solutions au voisinage de ses bornes?

**Interprétation des solutions.** Il est souvent pratique de considérer une solution  $x : I \rightarrow E$  comme la trajectoire d'une particule idéale sujette à ce que son vecteur vitesse  $x'$  vérifie l'équation différentielle en question.

## 1 Equations du premier ordre sur la droite réelle

### 1.1 Résolution par quadrature

On se donne une application continue  $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz semi-global. On cherche alors une solution donnée par une formule de l'équation différentielle  $x' = X(t, x)$  avec  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  comme condition initiale.

### 1.1.1 Equations à variables séparables

Il s'agit d'équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$x'(t) = f(t) \cdot g(x).$$

Si  $g(x_0) = 0$  alors  $u(t) = x_0$  est une solution. Sinon,  $g(x_0) \neq 0$  et on peut reformuler l'équation sur un voisinage de  $x_0$  comme

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

soit

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(s)ds.$$

Si on sait calculer chacune des primitives, on obtient  $G(x) = H(t) + C$ . Ensuite, il suffit "d'inverser"  $G$ , i.e. d'écrire  $x$  en fonction de  $t$ , et de fixer la constante pour que la condition initiale soit satisfaite.

**Remarque.** Rappelons que les primitives de  $t \mapsto 1/t$  pour  $t \neq 0$  sont de la forme  $t \mapsto \log |t| + C^{\text{ste}}$ .

Les équations linéaires homogènes (voir ci-après) fournissent les exemples les plus simples de ce type d'équations.

**Exercice 1** Résoudre les équations suivantes.

1.  $x' = ax - bx^2$  selon les valeurs des paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  (Exemple 2.1.2 de [7]).
2.  $x' = (t + 1) \cdot \cos x$  (Exemple 2.1.3 de [7]).
3.  $x' = ke^{\alpha x}$  selon les valeurs des paramètres  $k, \alpha \in \mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Equations linéaires du premier ordre

Une équation linéaire est une équation de la forme

$$x'(t) = p(t) \cdot x(t) + q(t).$$

Elle se résout en général en deux temps. On résout tout d'abord l'équation *homogène associée*  $x' = p(t) \cdot x$ , puis on cherche une solution particulière de l'équation originale (sans condition initiale). La somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène produit la solution voulue.

**Résolution de l'équation homogène.** L'espace des solutions forme un espace vectoriel, qui est de dimension 1 si on est dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, si  $u_1, u_2$  sont deux solutions, et si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors

$$(\lambda u_1 + u_2)' = \lambda u_1' + u_2' = p \cdot \lambda \cdot u_1 + p \cdot u_2 = p(\lambda u_1 + u_2).$$

Il suffit donc de trouver une solution non triviale, et toutes les autres se déduisent par multiplication par une constante.

Plus précisément, on obtient, pour  $x_0 = 0$ ,  $u(t) = 0$ , et pour  $x_0 \neq 0$ ,

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(s) ds,$$

soit  $\log |x| = \int p(s) ds$ ; d'où l'on tire

$$x(t) = x_0 \cdot \exp \int_0^t p(s) ds.$$

La solution  $x(t) = \exp \int_0^t p(s) ds$  est parfois appelée *solution fondamentale*.

**Variation de la constante.** C'est une méthode qui permet toujours de trouver une solution particulière, à condition de pouvoir calculer des primitives de fonctions.

Notons  $u_h$  une solution non nulle de l'équation homogène. Cette solution dépend d'une constante qui provient de la condition initiale. L'idée est de considérer cette constante comme une fonction de  $t$ : on considère alors  $x(t) = C(t) \cdot u_h(t)$  et on suppose que  $x$  vérifie  $x'(t) = p(t) \cdot x(t) + q(t)$ . Alors, en dérivant, on trouve

$$x'(t) = C(t)' \cdot u_h(t) + C(t) \cdot u_h'(t) = C(t)' \cdot u_h(t) + C(t) \cdot p(t) \cdot u_h(t) = p(t) \cdot C(t) \cdot u_h(t) + q(t).$$

On en tire

$$C(t)' \cdot u_h(t) = q(t).$$

On se ramène donc au calcul d'une primitive de

$$\frac{q(t)}{u_h(t)}.$$

En conclusion, on a

**Proposition 1.1** *La solution de  $x'(t) = p(t) \cdot x(t) + q(t)$  telle que  $x(0) = x_0$  est*

$$x(t) = \exp \left( \int_0^t p(s) ds \right) \cdot \left\{ \int_0^t \left[ q(s) \cdot \exp \left( - \int_0^s p(\tau) d\tau \right) \right] ds + x_0 \right\}.$$

**Coefficients indéterminés.** Lorsque la fonction  $q$  est "simple", on peut se passer de la méthode de la variation de la constante pour obtenir une solution particulière de l'équation linéaire non homogène.

**Exemples.**

- Si  $q(t)$  est une combinaison linéaire de sin et cos, alors on cherche  $x$  dans l'espace vectoriel engendré par sin et cos.
- Si  $q(t)$  est un polynôme, alors on cherche  $x$  dans l'espace des polynômes de même degré.

De manière générale, on a



**Proposition 1.2** *On considère l'équation  $x'(t) = p(t) \cdot x(t) + q(t)$ . Si  $q$  appartient à un espace vectoriel de dimension fini  $V$  stable par l'application*

$$f \mapsto \left[ \frac{d}{dt} - p \right] \cdot f,$$

*alors chercher une solution particulière dans  $V$  conduit à un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnus.*

Attention, cette proposition ne dit pas que la solution se trouve forcément dans cet espace  $V$ . D'ailleurs, ce n'est pas toujours vrai. Mais, cela permet dans de nombreux cas de trouver une solution de la manière suivante: on considère une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$  et on pose

$$x(t) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \cdot v_k(t)$$

où les  $(a_k)$  sont des constantes à déterminer. Ensuite, on substitue  $x$  dans l'équation différentielle par cette expression: il en résulte un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Si on a une solution du système, alors on a ainsi obtenu une solution particulière. Sinon,  $V$  n'était pas un bon choix...

**Exercice 2** *Résoudre par la méthode des coefficients indéterminés les équations suivantes (cf. la Proposition 1.2).*

1.  $x' = x + \sin t$  (Exemple 2.2.2 de [7]).
2.  $x' = x + e^t$  (Exemples 2.2.7 et 2.2.8 de [7]).
3.  $t \cdot x' = x + t^2$  (Exemple 2.2.6 et de [7]).

### 1.1.3 Autres méthodes de résolution

On présente deux autres méthodes qui conduisent parfois à des solutions d'équations différentielles lorsque les méthodes précédentes ne s'appliquent pas.

**Solutions implicites.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et considérons une ligne de niveau  $F(t, x) = \ell$  de la surface  $z = F(t, x)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Si on suppose que  $x$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $t$ , alors, en dérivant cette équation par rapport à  $t$ , on définit l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \cdot x'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0.$$

Une telle équation différentielle a donc ses solutions présentées implicitement par  $F(t, x) = \ell$ . La question de savoir si une équation différentielle peut s'intégrer de cette manière se résoud comme suit :

**Théorème 1.3** *On considère une équation différentielle de la forme*

$$M(t, x) \cdot x' + L(t, x) = 0,$$

où  $M$  et  $L$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies au voisinage d'un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Il existe une fonction  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \text{ et } \frac{\partial F}{\partial t} = L$$

si et seulement si

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

En ce cas, toute solution  $u$  telle que  $u(t_0) = x_0$  est contenue dans  $\{(t, x), F(t, x) = F(t_0, x_0)\}$ .

**Remarque.**  $F$  n'est définie qu'à une constante additive près.

DÉMONSTRATION. Si  $F$  existe, alors le théorème de Schwarz implique que les dérivées secondes croisées sont égales. Réciproquement, on suppose que

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Nous allons construire  $F$  : soit  $(t_0, x_0) \in R$  et posons

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t L(s, x_0) ds + \int_{x_0}^x M(t, y) dy.$$

On a bien  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  ; de plus,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = M(t, x)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = L(t, x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial t}(t, y) dy,$$

car  $M$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par hypothèse,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x},$$

donc

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial t}(t, y) dy = \int_{x_0}^x \frac{\partial L}{\partial x}(t, y) dy = L(t, x) - L(t, x_0).$$

On en déduit que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L,$$

ce qui termine la démonstration.

Si  $u$  est une solution, alors

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, u(t)) = 0$$

donc  $t \mapsto F(t, u(t))$  est constante. ■

Lorsqu'on est dans les conditions du Théorème 1.3, on dit que l'équation différentielle est *exacte*.

**Exemple.** Soit  $(at + bx)x' = ct - ax$  à résoudre, avec  $a, b, c$  des constantes réelles. Avec les notations du Théorème 1.3, on a

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x} = a,$$

donc les solutions sont données implicitement par une équation  $F(t, x) = \ell$ . Calculons une fonction  $F$ .

En intégrant

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = at + bx,$$

on trouve  $F(t, x) = atx + (b/2)x^2 + \varphi(t)$  où  $\varphi$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  à déterminer. En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = ax + \varphi'(t) = ax - ct,$$

soit  $\varphi'(t) = -ct$ . On pose  $\varphi(t) = -(c/2)t^2$  et donc, les solutions  $x$  vérifient

$$axt + (b/2)x^2 + -(c/2)t^2 = \ell.$$

### Exercice 3 Résoudre

1.  $(t \cos x + 3x^2)x' + \sin x + 2t = 0$  (Exemple 2.6.3 de [7]).
2.  $(x^3 - t)x' = x$ .

**Exercice 4** Montrer qu'une équation à variables séparables est toujours exacte (Exemple 2.6.4 de [7]).

**Solutions analytiques.** Une autre méthode consiste à chercher une solution formelle

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n,$$

puis de vérifier que la série ainsi obtenue a bien un rayon de convergence strictement positif. Cette méthode peut donc aussi s'appliquer pour des équations différentielles d'ordre supérieur, et s'applique aussi sur  $\mathbb{C}$ . Cependant, l'inconvénient de cette méthode est double : il n'est pas forcément aisé de déterminer tous les coefficients, ni d'estimer le rayon de convergence. Notons toutefois

**Théorème 1.4** Soit  $X$  une fonction analytique en  $(t, x)$  au voisinage de  $(0, x_0)$ . Alors il existe une unique solution analytique de l'équation différentielle  $x' = X(t, x)$  telle que  $x(0) = x_0$ .

**DÉMONSTRATION.** L'idée est la même que celle du Théorème de Cauchy-Lipschitz. On considère l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications holomorphes  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $D$  est un voisinage simplement connexe assez petit de 0, telles que  $f(0) = x_0$  et telles que  $\sup |f(z) - x_0|$  est assez petit. Cet ensemble est muni d'une structure d'espace de Banach. La primitive d'une

fonction holomorphe étant bien définie des faits que  $D$  est simplement connexe et que  $X$  est analytique, l'opérateur  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  défini par

$$T(u)(z) = x_0 + \int_0^z X(w, u(w))dw$$

produit bien une fonction de  $\mathcal{F}$  si  $D$  est assez petit. On montre alors qu'il est strictement contractant, donc le Théorème du point fixe produit une unique solution holomorphe de notre équation différentielle. Comme  $X$  est réel, si on part de la fonction constante  $f(z) = x_0$ , alors il s'ensuit que la solution est aussi réelle. ■

**Exemple.** Soit  $x' = x$  à résoudre avec  $x(0) = 1$ . On écrit  $x(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n t^n$ . Il vient

$$\sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} = \sum_{n \geq 0} a_n t^n.$$

Par suite, on a  $a_1 = 1$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,  $(n+1) \cdot a_{n+1} = a_n$ . On obtient par récurrence que  $a_n = 1/n!$ , et donc que

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

**Exercice 5** Résoudre les équations différentielles suivantes en substituant  $x$  par une série entière.

1.  $x'' - 2tx' - 4x = 0$  avec  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = 1$ .
2.  $x'' + (2/t)x' + x = 0$  avec  $x(0) = 1$  et  $x'(0) = 0$ .
3.  $x'' + xt = 0$  avec  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = 1$ .

**Exercice 6** Montrer que la résolution par série entière de  $x' = t^2/x - 1$  avec  $x(0) = 0$  conduit à deux solutions formelles. Montrer que l'une est divergente et que l'autre est convergente au voisinage de 0 (Exemple 2.7.4 de [7]).

### 1.1.4 Résumé

On a vu plusieurs manières d'aborder une équation différentielle du premier ordre lorsque l'on cherche une solution sous la forme d'une formule.

1. S'il s'agit d'une équation linéaire, alors on a une solution sous forme d'intégrale, et il reste un problème de calcul de primitive pour trouver la solution.
2. Si on peut séparer les variables, ou plus généralement, si l'équation est exacte, on obtient une solution implicite que l'on peut chercher à expliciter.
3. Sinon, on peut chercher une solution sous forme de série entière, mais il faut vérifier que le rayon de convergence de la série que l'on obtient est strictement positif.

Lorsqu'on est dans aucun de ces cas, seule l'intuition permet en général de résoudre l'équation différentielle par quadrature.

**Exercice 7** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1.  $x' = 2t - x$ .
2.  $x' = x \sin t$ .
3.  $x' = ax + b$  pour des paramètres  $a$  et  $b$  réels.
4.  $x' = x^2 + t$ .
5.  $x' = x^\alpha$ , où  $\alpha > 0$  est une paramètre.
6.  $x' = a \cdot \sqrt{|x|}$ .
7.  $(1 - t^2)x' = x - 1$ .

### 1.1.5 Equations classiques

**Equations de Bernoulli.** Elles se présentent sous la forme  $x' + p(t)x = q(t)x^n$ , où  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues et  $n \geq 2$ . On effectue le changement de fonction  $z = x^{-n+1}$ , ce qui nous conduit à une équation linéaire.

**Equations d'Euler.** Elles se présentent sous la forme  $t^2x'' + \alpha tx' + \beta x = 0$ . Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. On cherche des solutions sous la forme  $t \mapsto t^r$ , ce qui nous conduit à une équation caractéristique du second degré en  $r$ . Si on a deux racines distinctes, on obtient toutes les solutions comme combinaison linéaire. Si on a une racine double  $r$ , alors les solutions sont des combinaisons linéaires de  $t \mapsto t^r$  et de  $t \mapsto t^r \log t$ .

**Equations homogènes.** Elles se présentent sous la forme  $x' = X(x/t)$  où  $X$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un intervalle de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe une unique solution locale de condition initiale  $x(t_0) = x_0$  si  $y_0 = x_0/t_0$  appartient au domaine de définition de  $X$ . Comme  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on aura  $x$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , ainsi que la fonction définie par  $y(t) = x(t)/t$ . Cette fonction vérifie alors  $X(y) - y = ty'$ , qui est une équation à variables séparables. Si  $X(y_0) = y_0$ , alors  $x(t) = y_0 t$  est solution. Sinon, l'application  $y$  est un difféomorphisme local. On obtient ainsi la solution.

En revanche, si  $x_1$  est une solution telle que  $x_1(0) = 0$ , alors  $x_k(t) = kx_1(t/k)$  est aussi une solution pour tout  $k \neq 0$ . Par suite, on aura une infinité de solutions dans ce cas.

**Equations de Riccati.** Elles se présentent sous la forme  $x' = q_2(t)x^2 + q_1(t)x + q_0(t)$  où  $q_0$  et  $q_1$  sont des fonctions continues et  $q_2$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On considère une fonction  $y$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $x = y'/(yq_2)$ , ce qui nous conduit à une équation linéaire du second ordre.

**Equations de Clairaut.** Elles se présentent sous la forme  $x = tx' + g(x')$  où  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On se fixe un triplet  $(t_0, x_0, x'_0)$  tel que  $x_0 = t_0x'_0 + g(x'_0)$ , et on cherche une solution  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $u(t_0) = x_0$  et  $u'(t_0) = x'_0$ . Si  $t_0 + g'(x'_0) \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites nous fournit une application  $X(t, x)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $X(t_0, x_0) = x'_0$ ,  $x' = X(t, x)$  et  $x = t \cdot X(t, x) + g(X(t, x))$ . Par suite, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous montre l'existence et l'unicité de la fonction  $u$ . On déduit du fait que  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  que  $u$  sera de classe  $\mathcal{C}^2$ .

En revanche, si  $t_0 + g'(x'_0) = 0$ , alors  $(t_0, x_0, x'_0)$  est sur la courbe des  $(t, x, y)$  tels que  $x = ty + g(y)$  et  $t + g'(y) = 0$ . Cette courbe est une solution.

La méthode consiste donc à considérer  $x'$  comme une fonction  $y$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et de résoudre le système

$$\begin{cases} x = ty + g(y) \\ x' = y. \end{cases}$$

On dérive la première équation pour obtenir  $(t + g'(y))y' = 0$ .

**Equations de Lagrange.** Elles se présentent sous la forme  $x = tf(x') + g(x')$  où  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ . Les équations de Clairaut en sont des cas particuliers. La méthode est donc semblable.

**Exercice 8** Résoudre les équations différentielles suivantes.

1.  $(x + t) \cdot x' = x + t.$

2.  $t \cdot x' = t + x.$

3.  $x = tx' + \cos x'.$

4.  $x + kt + 2x' + (x')^2 = 0.$

## 1.2 Méthodes qualitatives

On se donne une équation différentielle du premier ordre  $x' = X(t, x)$ , et l'on supposera par commodité que  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  i.e., il existe une unique solution pour une condition initiale fixée.

Il s'agit ici de montrer que l'on peut lire beaucoup d'information sur une équation différentielle même lorsqu'on n'a pas de moyens de trouver une formule exacte ni de calculer une solution approchée. Les questions auxquelles nous allons tâcher de répondre sont les suivantes : est-ce que toutes les solutions sont définies sur  $\mathbb{R}$  ? Lorsque c'est le cas, quel est le comportement qualitatif au voisinage de l'infini ? Y-a-t'il des comportements très différents selon les conditions initiales ? etc ...

Plus précisément, déterminer si une solution a une asymptote verticale, s'il y a des séparatrices ou des courbes qui sont asymptotiques à un faisceau de solutions, i.e. existe-t'il un intervalle de conditions initiales telles que les solutions sont toutes asymptotes à la même courbe. On s'intéresse donc aux *orbites* du champ de vecteurs  $X$  i.e., au graphe des solutions de  $x' = X(t, x)$  (on ne s'intéresse pas au paramétrage de ces courbes).

On appelle *séparatrice* une solution  $u$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toutes solutions  $u_+$  et  $u_-$  telles que

$$\varepsilon + u(0) \geq u_+(0) > u(0) > u_-(0) \geq u(0) - \varepsilon,$$

le comportement des solutions soient (très) différents.

**Champ de vecteurs.** L'information première que l'on a sur une solution de l'équation différentielle est la dérivée au point  $t$  si  $x(t) = x_t$  est connue, i.e. la tangente du graphe de la solution telle que  $u(t) = x_t$ . Il convient donc de représenter pour chaque point dans un

repère où l'axe des abscisses correspond à la variable  $t$  et l'axe des ordonnées aux valeurs des solutions  $u(t)$  le vecteur  $(1, X(t, x))$  au point  $(t, x)$ .

En pratique, on représente quelques *isoclines*  $\mathcal{I}_\ell$ , i.e. des lignes de niveau  $X(t, x) = \ell$  pour  $\ell$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; l'isocline la plus importante est  $X(t, x) = 0$ . En général, il convient aussi de tracer  $\mathcal{I}_{\pm 1}$ . Sur chaque isocline, on marque la direction du champ de vecteurs, et on complète grossièrement sur le reste du plan.

Une solution est alors une courbe  $(t, \gamma(t))$  tangente en chaque point à  $(1, X(t, \gamma(t)))$ .

**Exemple.** Afin d'illustrer les notions et les théorèmes de cette partie, nous allons faire l'étude de l'équation différentielle définie par le champ de vecteurs

$$X(t, x) = x^2 - \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Le champ de vecteur est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc on a l'existence et l'unicité de solutions locales quelle que soit la condition initiale.

On s'intéresse aux isoclines suivantes:  $\mathcal{I}_0$  et  $\mathcal{I}_1$  (on remarque que  $\mathcal{I}_{-1} = \emptyset$  car  $X(t, x) > x^2 - 1$  pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ ). Notons

$$f_\pm(t) = \frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } g_\pm(t) = \pm \sqrt{\frac{1+2t^2}{1+t^2}}.$$

Avec ces notations, on a  $\mathcal{I}_0 = \{(t, x), x = f_\pm(t)\}$  et  $\mathcal{I}_1 = \{(t, x), x = g_\pm(t)\}$ .

A  $t$  fixé,  $X(t, x)$  est paire, croissante en fonction de  $|x|$  de  $-\frac{t^2}{1+t^2}$  à  $+\infty$ .

**Symétries.** Comme pour l'étude de fonctions, il est pratique de réduire le domaine d'études lorsque les orbites présentent des symétries que l'on peut directement lire sur le champ de vecteurs.

**Lemme 1.5** 1. Si  $X$  ne dépend pas de  $t$ , alors, si  $u$  est une solution et si  $x_0 \in u(I_{\max})$ , alors  $v(t) = u(t + t_0)$ , où  $u(t_0) = x_0$  est la solution telle que  $v(0) = x_0$ .

2. Si, pour tout couple  $(t, x)$ , on a  $X(t, x) = -X(-t, x)$ , alors les orbites sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

3. Si, pour tout couple  $(t, x)$ , on a  $X(t, x) = -X(t, -x)$ , alors l'axe des  $t$  est une solution, et à toute solution à valeurs positives correspond une solution symétrique à valeurs négatives et vice-versa.

4. Si, pour tout couple  $(t, x)$ , on a  $X(t, x) = X(-t, -x)$ , alors à toute orbite correspond une orbite symétrique par rapport à l'origine. En particulier, on a une solution impaire.

DÉMONSTRATION.

1. Cela provient de l'unicité de la solution.

2. Soit  $u$  une solution et posons  $v(t) = u(-t)$ . Alors  $v'(t) = -u'(-t) = -X(-t, u(-t)) = X(t, v(t))$ , donc  $v$  est aussi solution. Mais,  $v(0) = u(0)$ , donc elles définissent la même orbite.

3. Soit  $u$  une solution et posons  $v(t) = -u(t)$ . Alors  $v'(t) = -u'(t) = -X(t, u(t)) = X(t, v(t))$ , donc  $v$  est aussi solution. Donc ces orbites sont symétriques. De plus,  $X(t, 0) = -X(t, 0)$ , donc  $X(t, 0) = 0$  pour tout  $t$ , et la fonction constante  $u = 0$  est une solution.
4. Soit  $u$  une solution et posons  $v(t) = -u(-t)$ . Alors  $v'(t) = u'(-t) = X(-t, u(-t)) = X(t, v(t))$ , donc  $v$  est aussi solution. Donc ces orbites sont symétriques par rapport à l'origine.

**Exemple.** On remarque que si  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution, alors  $v(t) = -u(-t)$  est aussi une solution. Donc les orbites sont symétriques par rapport à l'origine.

**Barrières, drains et anti-drains.** Ce sont les outils principaux pour situer les séparatrices et les asymptotes.

**Définition.** Une *barrière* est une fonction  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que,  $p'(t) - X(t, p(t))$  est de signe constant sur  $I$ . On parlera de *barrière inférieure* si  $p'(t) \leq X(t, p(t))$  et de *barrière supérieure* si  $p'(t) \geq X(t, p(t))$ .

Graphiquement, cela signifie que, pour une barrière inférieure, le champ de vecteurs coupe le graphe vers le haut et, pour une barrière supérieure, le champ de vecteurs coupe le graphe vers le bas.

L'intérêt des barrières est le suivant :

**Proposition 1.6 de la barrière.** Soit  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  une barrière inférieure (resp. supérieure). Si  $u$  est une solution telle que, pour un  $t_0 \in I$ , on ait  $p(t_0) \leq u(t_0)$  (resp.  $p(t_0) \geq u(t_0)$ ), alors, pour tout  $t > t_0$  dans  $I$ , on a  $u(t) \geq p(t)$  (resp.  $u(t) \leq p(t)$ ), i.e. le graphe de  $u$  reste au-dessus (resp. au-dessous) de celui de  $p$ .

Si  $p'(t) < X(t, p(t))$  (resp.  $p'(t) > X(t, p(t))$ ) alors  $p(t) < u(t)$  (resp.  $p(t) > u(t)$ ) dès que  $t > t_0$ .

On commence par exhiber quelques changements de variable qui nous serviront dans la démonstration de cette proposition.

**Lemme 1.7 du passé.** Soient  $X$  un champ de vecteurs,  $p$  une barrière inférieure,  $q$  une barrière supérieure et  $u$  une solution. Posons  $\tau(x) = -x$ ,  $\hat{X}(t, x) = -X(-t, x)$ ,  $\hat{u} = u \circ \tau$ ,  $\hat{p} = p \circ \tau$  et  $\hat{q} = q \circ \tau$ . Alors  $\hat{u}$  est une solution de  $Y$ ,  $\hat{p}$  est une barrière supérieure et  $\hat{q}$  est une barrière inférieure.

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{cases} \hat{u}'(t) = -u'(-t) = -X(-t, u(-t)) = \hat{X}(t, \hat{u}), \\ \hat{p}'(t) = -p'(-t) \geq -X(-t, p(-t)) = \hat{X}(t, \hat{p}), \\ \hat{q}'(t) = -q'(-t) \leq -X(-t, q(-t)) = \hat{X}(t, \hat{q}). \end{cases}$$

■



**Lemme 1.8 (sens dessus-dessous).** Soient  $X$  un champ de vecteurs,  $p$  une barrière inférieure,  $q$  une barrière supérieure et  $u$  une solution. Posons  $\tau(x) = -x$ ,  $\check{X}(t, x) = -X(t, -x)$ ,  $\check{u} = \tau \circ u$ ,  $\check{p} = \tau \circ p$  et  $\check{q} = \tau \circ q$ . Alors  $\check{u}$  est une solution de  $Y$ ,  $\check{p}$  est une barrière supérieure et  $\check{q}$  est une barrière inférieure.

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{cases} \check{u}'(t) = -u'(t) = -X(t, u(t)) = \check{X}(t, \check{u}), \\ \check{p}'(t) = -p'(t) \geq -X(t, p(t)) = \check{X}(t, \check{p}), \\ \check{q}'(t) = -q'(t) \leq -X(t, p(-t)) = \check{X}(t, \check{q}). \end{cases}$$

■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.6. Soient  $p$  une barrière inférieure et  $q$  une barrière supérieure. Si on montre la proposition pour les barrières inférieures, alors le Lemme 1.8 impliquera aussi la proposition dans le cas des barrières supérieures.

On traite donc en priorité le cas de la barrière inférieure et on procède en plusieurs étapes.

PREMIÈRE ÉTAPE. Si  $p$  est une barrière inférieure stricte, et si  $u$  est une solution telle que  $p(t_0) = u(t_0)$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $p(t) < u(t)$  pour  $t \in ]t_0, t_0 + \delta[$ .

Puisque  $p'(t_0) < X(t_0, p(t_0)) = u'(t_0)$  alors, par continuité, on a aussi  $p'(t) < u'(t)$  pour  $t \in [t_0, t_0 + \delta[$  où  $\delta > 0$  est assez petit. En intégrant sur  $[t_0, t_0 + \delta]$ , on trouve  $p(t) < u(t)$  dès que  $t \in ]t_0, t_0 + \delta[$ .

En utilisant le Lemme 1.8, on montre que si  $q$  est une barrière supérieure stricte, et si  $u$  est une solution telle que  $q(t_0) = u(t_0)$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $q(t) > u(t)$  pour  $t \in ]t_0, t_0 + \delta[$ .

DEUXIÈME ÉTAPE. Si  $p$  est une barrière inférieure stricte, et si  $u$  est une solution telle que  $p(t_0) = u(t_0)$ , alors  $p(t) < u(t)$  pour  $t \in ]t_0, \infty[ \cap I$ .

Si on avait  $p(t_1) = u(t_1)$  pour un premier  $t_1 > t_0$ , on aurait  $p(t_1 - \varepsilon) < u(t_1 - \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit. En allant dans le passé (Lemme 1.7), on obtiendrait une contradiction avec la première étape (barrière supérieure).

TROISIÈME ÉTAPE. Si  $p$  est une barrière inférieure stricte, et si  $u$  est une solution telle que  $p(t_0) < u(t_0)$ , alors  $p(t) < u(t)$  pour  $t \in [t_0, \infty[ \cap I$ .

Notons  $v$  la solution telle que  $v(t_0) = p(t_0)$ . On a  $v(t) < u(t)$  par l'unicité des solutions et d'après la deuxième étape  $p(t) < v(t)$  pour  $t > t_0$ , donc  $p(t) < u(t)$ .

QUATRIÈME ÉTAPE. Si  $p$  est une barrière inférieure, et si  $u$  est une solution telle que  $p(t_0) \leq u(t_0)$ , alors  $p(t) < u(t)$  pour  $t \in [t_0, \infty[ \cap I$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $X_\varepsilon = X + \varepsilon$ . Il vient que  $p$  est une barrière stricte pour  $\varepsilon > 0$ , donc, si  $u_\varepsilon$  est la solution associée à  $X_\varepsilon$  avec  $u_\varepsilon(t_0) = u(t_0)$ , alors  $u_\varepsilon(t) > p(t)$  pour tout  $t \in I \cap ]t_0, \infty[$ . Par le théorème de dépendance continue des solutions, on trouve en prenant  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u(t) \geq p(t)$ . ■

**Remarque.** Si on suppose qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $p'(t) = X(t, p(t))$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ , alors l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que  $p = u$  sur  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ .

**Obtention de barrières.** On obtient des barrières essentiellement de deux manières :

- les isoclines sont des candidats naturels à être des barrières ;

- si on peut majorer ou minorer  $X(t, x)$  par une application  $Y(t, x)$  pour laquelle on sait résoudre l'équation différentielle associée, alors la solution avec même condition initiale produira une barrière inférieure ou supérieure selon le cas.

**Remarque.** Dans la définition d'une barrière inférieure (resp. supérieure)  $p$ , on peut supposer que  $p$  soit  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et on remplace la condition de  $p'(t) \leq X(t, p(t))$  (resp.  $p'(t) \geq X(t, p(t))$ ) par  $\limsup_{s \rightarrow t} p'(s) \leq X(t, p(t))$  (resp.  $\liminf_{s \rightarrow t} p'(s) \geq X(t, p(t))$ ). La conclusion de la Proposition 1.6 reste vraie avec la même démonstration.

**Exemple.**

- $\Sigma_+(0) := f_+(\mathbb{R})$  est une barrière supérieure car  $f'_+(t) > 0 = X(t, f_+(t))$ .
- $\Sigma_-(0) := f_-(\mathbb{R})$  est une barrière inférieure car  $f'_-(t) < 0 = X(t, f_-(t))$ .
- $\Sigma_+(1) := g_+(\mathbb{R})$  est une barrière inférieure car  $g'_+(t) < 1 = X(t, g_+(t))$ .
- $\Sigma_-(1) := g_-(\mathbb{R})$  est une barrière inférieure car  $g'_-(t) \leq 0 < 1 < X(t, f_+(t))$ .

On note  $c_\alpha(t) = \alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors

$$X(t, c_\alpha(t)) = \alpha^2 - \frac{t^2}{1+t^2}.$$

- Si  $|\alpha| \geq 1$ , alors  $b(\alpha) = \{(t, x), x = \alpha\}$  est une barrière inférieure.
- Si  $0 < |\alpha| < 1$ , alors

$$b_+(\alpha) = \left\{ (t, x), x = \alpha, |t| > \frac{|\alpha|}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right\}$$

est une barrière supérieure, et

$$b_-(\alpha) = \left\{ (t, x), x = \alpha, |t| < \frac{|\alpha|}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right\}$$

est une barrière inférieure.

- $b(0) = \{(t, x), x = 0\}$  est une barrière supérieure.

**Définitions.** Un *drain* est une zone

$$\{(t, x) \in [a, b[ \times \mathbb{R}, p_-(t) \leq x \leq p_+(t)\},$$

où  $p_- : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une barrière inférieure et  $p_+ : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , est une barrière supérieure,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Un *anti-drain* est une zone

$$\{(t, x) \in [a, b[ \times \mathbb{R}^2, p_-(t) \leq x \leq p_+(t)\},$$

où  $p_+ : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une barrière inférieure et  $p_- : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , est une barrière supérieure.

On dit qu'un (anti-)drain est *rétrécissant* si  $\lim_{t \rightarrow b} |p_+(t) - p_-(t)| = 0$ .

**Corollaire 1.9 du drain.** *Si  $X$  admet un drain  $(p_-, p_+, I)$  alors toute solution  $u$  de  $X$ , telle que pour un  $t_0 \in I$  on ait  $u(t_0) = p_-(t_0)$  ou  $u(t_0) = p_+(t_0)$ , reste dans le drain pour tout  $t > t_0$  dans  $I$ . Si de plus le drain est rétrécissant et si  $I = [t_0, +\infty[$ , alors toute solution qui rentre dans le drain est asymptotique à  $p_-$  et  $p_+$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une application directe des définitions et de la Proposition 1.6. ■

**Exemple.** Les barrières définies ci-dessus vont nous permettre de déterminer des drains.

- On note  $D_0 = \{(x, t), t > 0 \text{ et } |x| \leq f_+(t)\}$ . C'est un drain, et toute solution  $u$  pour laquelle il existe  $t_0$  tel que  $(t_0, u(t_0)) \in T_0$  reste dans le drain. Par suite,  $u$  est définie sur  $[t_0, +\infty[$ , car  $|u(t)| \leq 1$  (cf. le Théorème de l'explosion).

Pour  $|\alpha| < 1$ , on définit

$$D_\alpha = \left\{ (x, t), t > \frac{|\alpha|}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ et } f_-(t) \leq x \leq \alpha \right\}.$$

$T_\alpha$  est aussi un drain.

Reprenons notre solution  $u$ . Alors  $u$  est décroissante par définition de  $T_0$ , et  $u(t) > -1$ , donc  $u$  a une limite  $1 > \ell \geq -1$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Par le théorème des accroissements finis, on peut construire une suite  $(t_n)$  qui tend vers  $+\infty$  telle que  $u'(t_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Or,  $u'(t_n) = X(t_n, u(t_n))$  donc on obtient à la limite  $0 = \ell^2 - 1$ . Par suite,  $\ell = -1$ .

Donc toute solution qui rentre dans  $D_0$  tend vers  $-1$  en  $+\infty$ .

- On note  $D_{-1} = \{(t, x), t \geq 0, g_-(t) \leq x \leq 0\}$ . Il s'agit encore d'un drain. Toutes les orbites qui y rentre sont définies jusqu'en  $+\infty$ . Par un raisonnement similaire à celui fait sur  $D_0$ , on peut montrer que toute solution qui rentre dans  $D_{-1}$  va tendre à l'infini vers  $-1$ .

Soit  $u$  une solution telle que  $(0, u(0)) \in D_{-1}$ . Montrons que  $u$  rentre dans  $D_0$ . En effet, la droite  $\{x = -1\}$  est une barrière inférieure. Donc pour  $t_0 > 0$ , on a  $u(t_0) > -1$ . Or, la droite  $\{x = u(t_0)\}$  est une barrière inférieure tant qu'elle ne rencontre pas  $\Sigma_-(0)$ . Par suite, l'orbite de  $u$  est obligée de rentrer dans  $D_0$ .

Montrons que toute orbite qui rentre dans  $D_{-1}$  rentre aussi dans  $D_0$ . Si ce n'est pas le cas, on aurait l'existence d'une solution  $u_1$  dans  $D_{-1}$  qui tendrait vers  $-1$  en étant croissante: autrement dit, on aurait  $u_1(t) < -1$  pour tout  $t$  dans un intervalle de la forme  $[t_0, +\infty[$ , avec  $t_0 > 0$ .

On considère une solution  $u_2$  définie aussi sur  $[t_0, +\infty[$ , avec  $(t_0, u_2(t_0)) \in D_0$ . Du coup, on a  $u_2(t) > f_-(t)$ . Posons  $\gamma = u_2 - u_1$  qui est une fonction définie sur  $[t_0, +\infty[$  à valeurs positives.

Il vient d'une part  $\gamma(t) \geq 1/t^2 + o(1/t^2)$  par un développement limité. D'autre part, si  $t$  est assez grand, alors  $|u_1(t) + u_2(t)| \geq 1$ , donc  $\gamma'(t) \leq -\gamma(t)$ . On en déduit que  $\gamma$  est une barrière inférieure à l'équation différentielle  $x' = -x$  donc il existe  $t_1 \geq t_0$  tel que, pour  $t \geq t_1$ , on ait  $\gamma(t) \leq \gamma(t_1)e^{t_1-t}$ . En regroupant nos deux inégalités, on obtient une contradiction: toutes solutions qui rentrent dans  $D_{-1}$  rentrent dans  $D_0$ .

- On définit pour  $\alpha < -1$ , le drain  $D_\alpha = \{(t, x), \alpha \leq x \leq 0\}$ . Soit  $u$  une solution telle qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  pour lequel  $(t_0, u(t_0)) \in D_\alpha$ . Supposons que  $(t_0, u(t_0)) \notin D_{-1}$ . Tant que  $u(t) < g_-(t)$ , on a  $u'(t) > 1$ , donc  $u(t) > (t - t_0) + u(t_0)$ . Par conséquent, il existe  $t_1 > t_0$  tel que  $u(t_1) = g_-(t_1)$ . Ceci signifie que  $u$  rentre aussi dans  $D_{-1}$ , donc dans  $D_0$ .

Plus difficile, on a

**Proposition 1.10 de l'anti-drain.** *Si  $X$  admet un anti-drain  $(p_-, p_+, [a, b])$  alors il existe une solution  $u$  de  $X$  contenu dans l'anti-drain pour tout  $t \in [a, b[$ . En particulier, si  $b = +\infty$ , alors l'anti-drain contient au moins une séparatrice.*

*Si de plus l'anti-drain est rétrécissant et s'il existe une application  $z : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_{[a, b[} z > -\infty$  et  $\partial_x X(x, t) \geq z(t)$  dans l'anti-drain alors il existe une unique solution qui reste dans l'anti-drain. Lorsque  $b = +\infty$ , elle définit une séparatrice.*

La quantité  $\partial_x X(x, t)$  est la *dispersion*: elle mesure la sensibilité aux conditions initiales. Un cas particulier important de cette proposition est lorsque la dispersion est positive dans l'anti-drain.

**DÉMONSTRATION.** On définit  $Y(t, x) = -X(-t, x)$  pour  $t \in ]-b, -a]$ , et  $q_\pm(t) = p_\pm(-t)$ . Alors  $(q_-, q_+)$  est un drain associé à  $Y$ . Par suite, si  $s \in ]-b, -a]$  et si on note  $v_s$  (resp.  $w_s$ ) la solution associée à  $Y$  telle que  $v_s(s) = q_-(s)$  (resp.  $w_s(s) = q_+(s)$ ), alors elle reste contenue dans le drain. Comme les solutions sont uniques, elles ne peuvent pas se croiser, et on peut considérer l'intervalle verticale non vide  $I_s = \{-a\} \times [v_s(-a), w_s(-a)]$ . Si  $s > s'$  alors  $I_s \supset I_{s'}$ . Par suite, on a obtenu une suite décroissante d'intervalles compacts: leur intersection est un intervalle compact non vide  $I = \{-a\} \times [c, d]$ .

Rappelons que  $v$  est une solution de  $Y$  si et seulement si  $u(t) = v(-t)$  est une solution de  $X$  (cf. la démonstration de la Proposition 1.6), par suite, une solution  $u$  de  $X$  reste dans l'anti-drain si et seulement si  $u(a) \in [c, d]$ . Cela montre l'existence d'une telle solution, puisque  $c \leq d$ . Les solutions telles que  $u(a) \in \{c, d\}$  sont des candidats à être une séparatrice.

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que  $c = d$ . Supposons que l'on ait deux solutions  $u_1 \leq u_2$  et posons  $\gamma = u_2 - u_1$ . On remarque que si  $u_1 \neq u_2$  alors elles sont disjointes. On a, pour tout  $t \geq a$ ,

$$\gamma'(t) = X(t, u_2(t)) - X(t, u_1(t)) = \int_{u_1(t)}^{u_2(t)} \partial_x X(t, y) dy \geq \gamma(t)z(t).$$

Par suite  $\gamma$  est une barrière supérieure pour l'équation différentielle  $x' = x \cdot z(t)$ . Or une solution de cette équation est

$$y(t) = \gamma(a) \cdot \exp \int_a^t z(s) ds.$$

La Proposition 1.6 implique donc que  $\gamma(t) \geq y(t)$  pour  $t \geq a$ . Puisque l'anti-drain est supposé rétrécissant, cela implique que  $\gamma(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow b$ ; mais, par hypothèse, on a  $\inf_t \exp \int_a^t z(s) ds > 0$ , donc  $\gamma(a) = 0$  et, par unicité de la solution,  $u_1 = u_2$ . ■

**Remarque.** La démonstration ci-dessus montre que pour avoir l'unicité de la solution dans l'anti-drain lorsque  $b = +\infty$ , il suffit qu'il rétrécisse assez vite par rapport à la dispersion, i.e.,

s'il existe  $z : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$z(t) \leq \partial_x X(t, x) \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} (p_+(t) - p_-(t)) \cdot \exp\left(-\int_a^t z(s) ds\right) = 0.$$

**Exemple.**

- On note  $D_1 = \{(t, x), t \leq 0, 0 \leq x \leq g_+(t)\} \cup \{(t, x), t \geq 0, g_+(t) \geq x \geq f_+(t)\}$ . Il s'agit d'un anti-drain. Il existe donc au moins une solution qui est contenue dedans. Montrons qu'elle est unique en supposant qu'on en ait deux  $u_2 \geq u_1$  : pour  $t \geq 1$ , on a  $u_1(t) \geq 1/2$ . Par suite,

$$u_2'(t) - u_1'(t) = (u_2(t) - u_1(t))(u_2(t) + u_1(t)) \geq u_2(t) - u_1(t).$$

Donc  $(u_2 - u_1)$  est une barrière supérieur de l'équation  $x' = x$ . De plus,  $g_+(t) - f_+(t) \leq 1$  pour  $t \geq 1$ . Par suite, pour  $t \geq 1$ , on a

$$1 \geq u_2(t) - u_1(t) \geq (u_2(1) - u_1(1)) \cdot \exp t.$$

Donc, quand  $t \rightarrow \infty$ , on obtient  $u_2(1) - u_1(1) = 0$ . Par conséquent, il existe une unique application  $\sigma_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  solution de l'équation différentielle qui est entièrement contenue dans  $D_1$ .

- On définit pour  $1 \leq \alpha < \sqrt{2}$ , l'anti-drain  $D_\alpha = \{(t, x), t > g_+^{-1}(\alpha), f_+(t) \leq x \leq \alpha\}$ . On a  $D_\alpha \subset D_1$ , donc le graphe de  $\sigma_+$  est contenue dans  $D_\alpha$  dès que  $t$  est assez grand, et ce, pour tout  $\alpha \in [1, \sqrt{2}[$ , donc  $\sigma_+(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Comme  $b(0)$  est une barrière supérieure et que  $\Sigma_+(1)$  est une barrière inférieure, on en déduit que  $\sigma_+(0) \in ]0, 1[$ .

**Asymptotes verticales.** Le Théorème de l'explosion montre que si une solution n'est pas définie pour toute valeur finie, alors elle n'est pas bornée. Si  $X$  est défini sur tout  $\mathbb{R}^2$  et si  $u$  est une solution définie sur  $[0, \beta[$  avec  $\beta$  maximale, alors  $u$  admet une asymptote verticale. En effet, la courbe ne peut osciller entre valeurs positives et négatives, car cela impliquerait que  $\lim_{t \rightarrow \beta} X(0, t) = \infty$ , ce qui est impossible puisque  $X$  est définie partout.

Une méthode est donc de trouver une barrière inférieure ou supérieure qui elle-même admet une asymptote verticale, ce qui force la solution à en avoir une. Les exemples typiques de telles barrières sont  $x' = k \cdot x^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ , où encore  $x' = C \cdot e^x$ .

On peut éventuellement compléter cette barrière en un (anti-)drain pour avoir une description plus précise.

**Exemple.** On a vu que  $X(t, x) > x^2 - 1$ . Par conséquent, il existe  $x_0 > 0$ , tel que, si  $x \geq x_0$  alors  $X(t, x) \geq x^{3/2}$ . Donc, toute solution  $u$  telle qu'il existe un temps  $t_0 \in \mathbb{R}$  pour lequel  $u(t_0) \geq x_0$  a une asymptote verticale positive.

Soit maintenant  $u$  une solution telle qu'il existe un  $t_0 \in \mathbb{R}$  pour lequel  $u(t_0) > \sigma_+(t_0)$ . On sait qu'il existe  $t_1 \geq t_0$  tel que  $(t_1, u(t_1)) \notin T_1$ . Par suite,  $u$  reste au-dessus de  $\Sigma_+(1)$ , donc  $u'(t) \geq 1$  pour tout  $t > t_1$  où  $u$  est définie. Par suite, pour  $t > t_1$ , on a  $u(t) \geq t + u(t_1) - t_1$ . Donc il existe  $t_2 \geq t_1$  tel que  $u(t_2) \geq x_0$ . Du coup,  $u$  a une asymptote verticale.

**Résumé.** Pour étudier un champ de vecteurs de manière qualitative, on procède en général comme suit.

1. On vérifie l'existence et l'unicité des solutions étant donnée une condition initiale.
2. On représente le champ de vecteurs à l'aide d'isoclines.
3. On repère des barrières qui conduiront éventuellement à des (anti)-drains.
4. On cherche à rendre si possible ces (anti)-drains rétrécissants. On considère de solutions  $u_1$  et  $u_2$  et on cherche à contrôler  $u'_1 - u'_2$  en fonction de  $u_1 - u_2$ .
5. On détermine des séparatrices.
6. On décrit les orbites selon leurs conditions initiales (domaine de définition, comportement au bord, monotonie, etc...)

**Exemple. (fin de l'étude)** On termine l'étude de notre exemple.

**Etude du passé.** Par la symétrie, il existe une solution  $\sigma_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine. Donc  $\sigma_-(0) \in ]-1, 0[$ . On en déduit que  $\sigma_+(t)$  tend vers 1 quand  $t \rightarrow -\infty$ .

Soit  $\sigma_0$  la solution telle que  $\sigma_0(0) = 0$ . Comme  $b(0)$  est une barrière supérieure,  $\sigma_0$  rentre dans le drain bordé par  $b(0)$  et  $\Sigma_-(0)$ . Donc  $\sigma_0(t) \rightarrow (-1)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Par symétrie ( $\sigma_0$  est l'unique solution impaire), on a  $\sigma_0(t) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

Si on considère une solution  $u$  telle que, pour un certain  $t_0 > 0$ , on ait  $(t_0, u(t_0)) \in D_{-1} \setminus D_0$ . Alors, la solution  $v$  définie par  $v(t) = -u(-t)$  a un point dans  $D_1$ , et  $v(t_0) \geq \sigma_+(t_0)$ . Donc  $v$  a une asymptote verticale. Par suite,  $u$  a une asymptote verticale négative dans le passé.

Si on considère une solution  $w$  telle que  $w(t_1) = f_-(t_1)$  pour un  $t_1 > t_0$  assez grand, alors  $w$  ne sera pas définie en  $t_0$ . Par suite,  $u$  doit rentrer dans  $T_0$  en un point  $t < t_1$ .

**Bilan.** On retire de cette étude les résultats suivants :

Il existe trois séparatrices  $\sigma_{\pm}, \sigma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\sigma_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  a un unique minimum (positif) pour un  $t$  négatif, et est l'unique courbe contenue dans  $D_1$ , avec  $\lim_{\pm\infty} \sigma = 1^-$  en étant asymptotique à  $\Sigma_+(0)$  dans les deux directions.
- $\sigma_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_-$  vérifie  $\sigma_-(t) = -\sigma_+(-t)$ .
- $\sigma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'unique solution impaire. Elle est strictement décroissante, avec un point d'inflexion à l'origine. Et  $\lim_{\pm\infty} \sigma_0 = \mp 1^{\pm}$ . Cette courbe est asymptotique à  $\Sigma_+(0)$  au voisinage de  $-\infty$ , et de  $\Sigma_-(0)$  au voisinage de  $+\infty$ .

Soit maintenant  $u$  une solution définie en un point  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

- Si  $u(t_0) > \sigma_+(t_0)$ , alors  $u$  est définie sur un intervalle  $] -\infty, \alpha[$ , avec une asymptote positive. Cette solution a un unique minimum (positif) pour un  $t$  négatif, avec  $\lim_{-\infty} u = 1^-$ . Elle est asymptotique à  $\Sigma_+(0)$ .
- Si  $\sigma_+(t_0) > u(t_0) > \sigma_0(t_0)$ . Alors  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle a un minimum local positif pour un  $t$  négatif, un maximum local positif pour un  $t$  positif. A l'infini,  $u$  est asymptotique à  $\sigma_0$ .

- Si  $\sigma_0(t_0) > u(t_0) > \sigma_-(t_0)$ . Alors  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle a un minimum local négatif pour un  $t$  négatif, un maximum local négatif pour un  $t$  positif. A l'infini,  $u$  est asymptotique à  $\sigma_0$ .
- Si  $u(t_0) < \sigma_-(t_0)$ , alors  $u$  est définie sur un intervalle  $]\alpha, +\infty[$ , avec une asymptote négative. Cette solution a un unique maximum (négatif) pour un  $t$  positif, avec  $\lim_{+\infty} u = -1^+$ . Elle est asymptotique à  $\Sigma_-(0)$ .

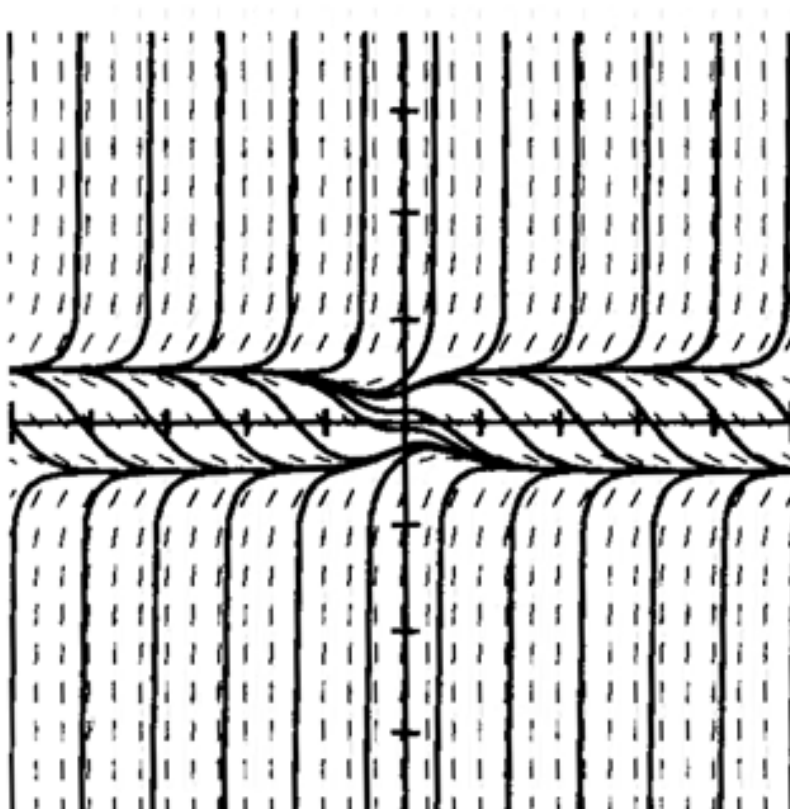


Figure 1 Représentation des orbites.

**Exercice 9** On considère  $x' = x^2 - t$ .

1. Tracer les isoclines  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_{\pm 1}$ .
2. En déduire un drain et un anti-drain.
3. Montrer que toute orbite qui quitte l'anti-drain vers le haut admet une asymptote verticale. Que peut-on dire si elle le quitte vers le bas ?
4. Terminer l'étude.

**Exercice 10** On considère  $x' = \sin(xt)$ .

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude au quadrant  $t > 0$  et  $x > 0$ .

2. Tracer les isoclines  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_{\pm 1}$ .
3. En déduire des drains et des anti-drains dans  $\{(x, t), t > x\}$ .
4. Terminer l'étude.

**Exercice 11** On considère  $x' = 1 + \cos^2 x/t^2$ .

1. Représenter le champ de vecteurs.
2. En déduire des drains et des anti-drains dans  $\{(x, t), t > x\}$ .
3. En bornant le champ de vecteurs, déterminer un anti-drain.

**Exercice 12** Etudier les équations différentielles suivantes.

1.  $x' = -\sin(tx)$ .
2.  $x' = \cos(tx)$ .
3.  $x' = t \cos x - 1$ .
4.  $x' = t \cos x + 1$ .
5.  $x' = x^2 - t^2$ .

### 1.3 Méthodes numériques

Les méthodes numériques consistent à trouver des approximations par des fonctions affines par morceaux, la taille de chaque morceau – le *pas* – étant constante et donnant la précision de l'approximation. Nous verrons ici les trois méthodes les plus courantes : la méthode d'Euler, qui est la plus intuitive, la méthode d'Euler modifiée, et la méthode de Runge-Kutta. Ces méthodes s'appliquent aussi pour le calcul d'intégrales (qui ne sont que des primitives de fonctions !). Ces méthodes permettent de donner une démonstration constructive du théorème de Cauchy-Lipschitz et de programmer un ordinateur pour exhiber des solutions.

On cherche à résoudre  $x' = X(t, x)$  avec  $x(0) = x_0$  et  $X$  est continue. On se fixe un pas de progression  $h > 0$ . Les trois méthodes sont basées sur le même principe : on définit une suite d'abscisses  $t_n = t_0 + nh$ , une suite de pentes  $p_n$  qui tient compte de l'équation différentielle et une suite de valeurs  $x_n = x_{n-1} + p_{n-1}h$ . Ensuite, on définit la solution approchée  $u_h$  par  $u_h(t) = x_n + (t - t_n)p_n$  pour  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  qui relie les points  $(t_n, x_n)$  et  $(t_{n+1}, x_{n+1})$  par un segment.

On mesure les erreurs commises à l'étape  $n$  par  $E_n(h) = |u(t_n) - u_h(t_n)|$ , où  $u$  est la solution avec la même condition initiale. Si on résout l'équation sur un intervalle fixe  $[0, t_X]$ , alors on peut considérer l'erreur  $E(h) = \sup_n E_n(h)$ , indépendante de  $n$ . De même, on considère aussi l'erreur sur la pente  $\varepsilon_h = \sup_{[0, t_X]} |u'_h(t) - X(t, u_h(t))|$ .

En fait, on peut borner  $E(h)$  en fonction de  $\varepsilon_h$ .



**Théorème 1.11** Si, sur un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$  qui contient 0, l'équation différentielle  $x' = X(t, x)$  vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz avec constante  $L$ , et si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions approchée  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui vérifient, pour  $i = 1, 2$  et pour tout  $t \in [a, b]$  où  $u_i$  est différentiable

$$|u'_i(t) - X(t, u_i(t))| < \varepsilon_i;$$

et si  $|u_1(0) - u_2(0)| < \delta$ , alors, pour tout  $t \in [a, b]$ , on a

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \delta \exp(L|t|) + (\varepsilon/L) \cdot (\exp(L|t|) - 1),$$

avec  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . En particulier, on a

$$E_n(h) \leq (\varepsilon_h/L)(\exp(nLh) - 1).$$

DÉMONSTRATION. Comme pour le Théorème de dépendance continue, on écrit

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |u_1(0) - u_2(0)| + L \cdot \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds + \varepsilon \cdot t.$$

Le Lemme de Gronwall permet de conclure. ■

Cela signifie que, même si on peut diminuer  $\varepsilon_h$ , on ne pourra jamais empêcher *a priori* la propagation d'une erreur exponentielle avec le temps sur  $E(h)$ .

**Corollaire 1.12** Si  $\varepsilon_h \rightarrow 0$  avec  $h$ , alors  $u_h$  tend uniformément en norme  $\mathcal{C}^1$  vers une solution  $u$  sur tout compact.

**Méthode d'Euler.** On définit d'abord par récurrence une suite  $(t_n, x_n)_{n \geq 0}$  par

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh, \\ x_n = x_{n-1} + hX(t_{n-1}, x_{n-1}). \end{cases}$$

**Théorème 1.13 (estimation de l'erreur)** Si  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un compact alors les erreurs de la méthode d'Euler sont de l'ordre

$$\varepsilon_h = O(h) \text{ et } E(h) = O(h).$$

**Remarque.** Cette méthode correspond pour le calcul de primitive à évaluer les sommes de Riemann.

**Méthode d'Euler modifiée.** On définit les suites suivantes

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh, \\ x_n = x_{n-1} + hX(t_{n-1} + (h/2), x_{n-1} + (h/2)X(t_{n-1}, x_{n-1})). \end{cases}$$

Cela correspond à utiliser la pente obtenue par la méthode d'Euler au milieu de l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ .

**Théorème 1.14 (estimation de l'erreur)** *Si  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un compact alors les erreurs de la méthode d'Euler modifiée sont de l'ordre*

$$\varepsilon_h = O(h^2) \text{ et } E(h) = O(h^2).$$

**Méthode de Runge-Kutta.** Il s'agit de la plus élaborée puisque la pente  $p_n$  est donnée comme une moyenne pondérée de 4 pentes.

Si  $(t_{n-1}, x_{n-1})$  est construit, on pose

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_1 = X(t_{n-1}, x_{n-1}) & \text{pente au point initiale,} \\ q_2 = X(t_{n-1} + (h/2), x_{n-1} + (h/2)q_1) & \text{pente à mi-parcours du segment de pente } q_1, \\ q_3 = X(t_{n-1} + (h/2), x_{n-1} + (h/2)q_2) & \text{pente à mi-parcours du segment de pente } q_2, \\ q_4 = X(t_{n-1} + h, x_{n-1} + hq_3) & \text{pente au point final du segment de pente } q_3. \end{array} \right.$$

Enfin, on pose  $p_{n-1} = (1/6) \cdot (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$ .

Une interprétation peut être la suivante:  $q_1$  correspond à la méthode d'Euler,  $q_2$  à la méthode d'Euler modifiée,  $q_3$  corrige le tir et  $q_4$  prend en compte la pente à l'arrivée.

**Théorème 1.15 (estimation de l'erreur)** *Si  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un compact alors les erreurs de la méthode de Runge-Kutta sont de l'ordre*

$$\varepsilon_h = O(h^4) \text{ et } E(h) = O(h^4).$$

**Remarque.** Cette méthode correspond pour le calcul de primitive à la méthode de Simpson (qui est exacte pour les polynômes quadratiques).

Les constantes qui apparaissent dans les termes d'erreurs dans les Théorèmes 1.13, 1.14 et 1.15 sont des fonctions de suprema de  $X$  et de ses dérivées partielles sur le compact considéré. Enfin, notons aussi que si ces algorithmes sont implémentés sur un ordinateur, l'estimation des erreurs doit aussi tenir compte de la limite des machines (arrondis,...).

## 2 Systèmes d'équations différentielles

Les systèmes d'équations différentielles sont beaucoup plus difficiles à résoudre par quadrature que les équations différentielles sur  $\mathbb{R}$ . *Grosso modo*, il n'existe de méthodes effectives de résolution par quadrature que pour les équations différentielles à coefficients constants. Il est donc nécessaire d'élaborer une théorie qualitative de résolution. Pour l'étude qui suit, il est plus pratique de considérer des *équations différentielles autonomes*, i.e. telles que le champ de vecteurs ne dépende pas de la variable temporelle (d'intégration). L'équation différentielle s'écrit donc  $x' = X(x)$ .

**Seconde réduction.** Tout champ de vecteurs peut être transformé en un champ de vecteurs autonome en considérant la variable  $t$  comme une fonction i.e., si  $x' = X(t, x)$ , on étudie

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

La solution qui nous intéresse est donc la deuxième coordonnée. L'intérêt principale de cette écriture est celle du flot.

**Définitions.** Supposons que  $X : E \rightarrow E$  est un champ de vecteurs autonome lipschitzien sur tout borné. On définit le *flot*  $\phi_t(x)$  par la valeur au temps  $t$  de la solution maximale de  $x' = X(x)$  avec pour condition initiale  $x$ , quand elle existe. Etant donné  $x \in E$ , la *trajectoire* de  $x$ , ou son *orbite*, est l'ensemble  $\{\phi_t(x), t \in I_{\max}(x)\}$ .

**Propriétés immédiates.**

1. On a  $\phi_0(x) = x$  pour tout  $x \in E$ .
2.  $\phi$  est une fonction continue en  $(t, x)$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $t$ . On a de plus

$$\frac{d\phi_t}{dt}(x) = X(\phi_t(x)) \text{ et } \left. \frac{d\phi_t}{dt}(x) \right|_{t=0} = X(x).$$

3. A  $t$  fixé,  $\phi_t$  est injective, donc un homéomorphisme sur tout compact.
4. Pour tous  $t, t' \in \mathbb{R}$  et  $x \in E$  tels que  $\phi_t(x)$ ,  $\phi_{t'}(x)$  et  $\phi_{t+t'}(x)$  existent, on a

$$\phi_t \circ \phi_{t'}(x) = \phi_{t+t'}(x).$$

En particulier,  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .

DÉMONSTRATION.

1. Cela provient de la définition du flot.
2. La continuité de  $\phi$  provient du Théorème de dépendance continue, et le reste de la définition du flot.
3. Cela provient de l'unicité du Théorème de Cauchy-Lipschitz.
4. Cela découle aussi de l'unicité, en remarquant que, si  $t_0$  et  $x$  sont fixés, alors  $u : t \mapsto \phi_{t_0+t}(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$u'(t) = \frac{d}{dt}\phi_{t_0+t}(x) = \frac{d}{d(t_0+t)}\phi_{t_0+t}(x) = X(\phi_{t_0+t}(x)) = X(u(t)).$$

De plus,  $u(0) = \phi_{t_0}(x)$  donc  $u(t) = \phi_t(\phi_{t_0}(x))$  par unicité et définition du flot. ■

**Exercice 13** Donner les flots des équations différentielles définies sur  $\mathbb{R}$  dont les solutions ont été calculées explicitement dans les exercices précédents.

**Théorème 2.1 de dépendance  $\mathcal{C}^r$ .** Si  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^r$  défini dans un ouvert  $V$  d'espace de Banach  $E$ , avec  $r \geq 1$ , alors le flot  $\phi_t$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^r$  là où il est défini.

**Lemme 2.2** Si  $X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et le flot est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $D_x\phi_t$  vérifie l'équation

$$\frac{dx}{dt} = D_{\phi_t(x)}X \cdot x,$$

avec  $x(0) = I$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $\phi_0 = I$ , on a  $D_x\phi_0 = I$ . D'autre part,  $\phi_t$  vérifie l'équation intégrale

$$\phi_t(x) = x + \int_0^t X(\phi_s(x))ds.$$

On dérive dans la direction  $x$  et on obtient

$$D_x \phi_t = I + \int_0^t D_{\phi_s(x)} X \cdot D_x \phi_s ds.$$

Le terme de droite est dérivable par rapport à  $t$  : on obtient ainsi

$$\frac{d}{dt} D_x \phi_t = D_{\phi_t(x)} X \cdot D_x \phi_t.$$

■

**Lemme 2.3** *Soit  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$  une application où  $E_1, E_2$  et  $E$  sont des espaces de Banach. Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si  $f$  admet des différentielles partielles continues dans les directions  $E_1$  et  $E_2$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour  $i = 1, 2$ , on note  $\pi_i : E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$  la projection sur  $E_i$ . Soient  $x, h \in E_1 \times E_2$ . On note  $L_i(x)$  la différentielle de  $f|_{E_i}$  au point  $x$ . Montrons que la différentielle de  $f$  au point  $x$  est  $h \mapsto L_1(x)(\pi_1(h)) + L_2(x)(\pi_2(h))$ . On a

$$f(x+h) - f(x) - (L_1(x)(\pi_1(h)) + L_2(x)(\pi_2(h))) = L_1(x + \pi_2(h))(\pi_1(h)) - L_1(x)(\pi_1(h)) + o(|h|).$$

Or  $L_1(x + \pi_2(h))(\pi_1(h)) - L_1(x)(\pi_1(h)) = o(|h|)$  car  $L_1$  est continue. ■

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.** On se place donc au voisinage d'un point  $x_0$ . On suppose que  $V$  est la boule centrée en  $x_0$  de rayon  $R$ , et on note  $U$  la boule de rayon moitié (centrée en 0) et  $I = [0, 1]$ . On note aussi, pour  $k$  entier,  $\mathcal{C}_0^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions  $u : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^k$  telles que  $u(0) = 0$ . Cet ensemble est muni d'une structure d'espace de Banach, et le sous-ensemble  $\mathcal{C}_0^k(I, U)$  des fonctions à valeurs dans  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{C}_0^k(I, E)$ .

On considère l'application  $F : \mathbb{R} \times (x_0 + U) \times \mathcal{C}_0^1(I, U) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, E)$  définie par

$$F(a, x, \gamma)(t) = \gamma'(t) - aX(x + \gamma(t)).$$

Cette fonction admet des dérivées partielles continues par rapport à chacun des espaces car  $X$  et  $\gamma$  sont de classe au moins  $\mathcal{C}^1$ , et que  $\gamma \mapsto \gamma'$  est linéaire sur  $\mathcal{C}^1(I, E)$ . Le Lemme 2.3 permet de conclure que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

L'existence des dérivées dans les directions  $\mathbb{R}$  et  $E$  ne posent pas de difficultés particulières. Prenons  $h \in \mathcal{C}_0^1(I, E)$ , alors

$$F(a, x, \gamma + h)(t) = (\gamma + h)'(t) - aX(x + (\gamma + h)(t))$$

soit

$$F(a, x, \gamma + h)(t) = \gamma'(t) - aX(x + \gamma(t)) + h'(t) - aD_{x+\gamma(t)}X(h(t)) + o(|h|).$$

L'application

$$L : h \mapsto h' - aD_{x+\gamma(t)}X(h)$$

est linéaire et continue : il s'agit de la différentielle de  $F$  dans la direction  $\mathcal{C}_0^1(I, E)$ .

De plus, on a  $F(0, x_0, 0) = 0$  et

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, x_0, 0)(\delta) = \delta'.$$

Cette application définit donc un isomorphisme entre  $\mathcal{C}_0^1(I, E)$  et  $\mathcal{C}^0(I, E)$  dont l'application réciproque est donnée par

$$\gamma \mapsto \left( t \mapsto \int_0^t \gamma(s) ds \right).$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage  $] -2\alpha, 2\alpha[ \times W$  de  $(0, x_0)$  dans  $\mathbb{R} \times (x_0 + U)$  et une application  $H : ] -2\alpha, 2\alpha[ \times W \rightarrow \mathcal{C}_0^1(I, U)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que  $H(0, x_0) = 0$  et  $F(a, x, H(a, x)) = 0$ .

On définit  $\phi : ] -2\alpha, 2\alpha[ \times W \rightarrow E$  par  $\phi(t, x) = H(\alpha, x)(t/\alpha) + x$ . Cette application est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $(\gamma, t) \in \mathcal{C}_0^1(I, U) \times I \mapsto \gamma(t) \in U$  est linéaire continue en  $\gamma$  et  $\gamma(t+h) = \gamma(t) + \gamma'(t) \cdot h + o(h)$ .

On a  $\phi(0, x) = H(\alpha, x)(0) + x = x$  car  $H(\alpha, x) \in \mathcal{C}_0^1(I, U)$ . De plus,

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \frac{dH(\alpha, x)(t/\alpha)}{dt} = (1/\alpha) \frac{dH(\alpha, x)}{dt}(t/\alpha) = X(x + H(\alpha, x)(t/\alpha)) = X(\phi_t(x)),$$

car  $F(\alpha, x, H(\alpha, x)) = 0$ . Ceci montre que  $\phi_t$  est le flot et qu'il est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour passer aux classes d'ordre supérieur, on procède par récurrence en remarquant que

$$D \frac{d\phi_t}{dt} = \frac{d}{dt} D\phi_t = D_{\phi_t(x)} X \cdot D\phi_t.$$

■

**Remarque.** Ce théorème redonne une démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les champs de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 14** Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  défini sur  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$X(x) \cdot x \leq a|x|^2 + b$$

avec  $a, b > 0$  alors les solutions sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$X(x) \cdot x \geq a|x|^{2(1+\varepsilon)} - \alpha$$

avec  $a, \varepsilon, \alpha > 0$  alors les solutions ne sont pas définies sur tout  $\mathbb{R}$ .

On pourra étudier les variations de  $t \mapsto |u(t)|^2$  pour une solution  $u$ .

**Exercice 15** Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  défini sur  $\mathbb{R}^n$  de flot  $\phi$ . On pose

$$\tau(t) = \int_0^t (1 + |X(\phi_s(x))|) ds$$

(cf. Théorème 3.1 de [10]).

1. Montrer que, pour chaque  $x$ ,  $\tau$  est un difféomorphisme sur des domaines que l'on précisera. On écrira  $t = t(\tau)$  pour l'application inverse.
2. Montrer que  $\phi_{t(\tau)}$  est une solution d'une équation différentielle  $x' = Y(x)$  de variable  $\tau$  à déterminer.
3. Montrer que le champ de vecteurs  $Y$  est aussi  $\mathcal{C}^1$ .
4. En déduire que les solutions maximales de  $Y$  sont définies sur tout  $\mathbb{R}$  et que les orbites de  $X$  et  $Y$  coïncident.

**Exercice 16** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  de flot  $\phi_t$  et  $\psi_t$  définis sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme tel que  $\phi_1 \circ h = h \circ \psi_1$  (cf. la démonstration du Théorème de Hartman-Grobman dans [5, 10]).

1. Montrer que  $h_{s,t} = \phi_s \circ h \circ \psi_t$  conjugue aussi  $\phi_1$  et  $\psi_1$ .
2. Posons

$$H(p) = \int_0^1 \phi_{-s} \circ h \circ \psi_s(p) ds.$$

Montrer que, si  $\phi_t$  est linéaire alors, pour tout  $t$ ,  $\phi_t \circ H = H \circ \psi_t$ .

3. Que peut-on dire des orbites des flots lorsque  $H$  n'est pas injective ?

## 2.1 Systèmes linéaires à coefficients constants

Il s'agit de systèmes d'équations différentielles sur  $\mathbb{R}^n$  qui s'écrivent

$$X' = AX + B$$

où  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction vectorielle inconnue,  $A$  est une matrice à coefficients constants  $B(t)$  est une fonction vectorielle de  $t$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous affirme qu'il existe une unique solution une fois que l'on s'est fixé une condition initiale.

**Exponentiel de matrices.** On rappelle que toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes. On choisit la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour les matrices carrés de taille  $n$ , on considère la norme d'endomorphisme i.e., on pose

$$|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Il vient, pour toutes matrices  $A, B$ ,  $|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|$ . En particulier  $|A^n| \leq |A|^n$  pour  $n > 0$ .

**Définition.** Si  $A$  est une matrice carré, on définit

$$e^A = \exp A = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette matrice est bien définie car la série est normalement convergente. En effet

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|A^n|}{n!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|A|^n}{n!} = \exp |A| < \infty.$$

On a les propriétés suivantes :

Si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ .

Si  $P$  est inversible, alors  $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A)P$ .

**Calcul de  $\exp(A)$ .** Le calcul se fait comme suit. Si  $A$  est une matrice diagonale, alors  $\exp A$  consiste en la matrice diagonale où les éléments non nuls sont l'exponentielle de ceux de  $A$ . Si  $A$  est nilpotente i.e., il existe  $n \geq 1$  tel que  $A^n = 0$ , alors on peut calculer directement  $\exp A$  par la série (on aura un nombre fini de termes non nuls). Sinon, on fait un changement de base pour que  $A = D + N$  avec  $D$  diagonale,  $N$  nilpotente et  $ND = DN$ . La décomposition de Jordan convient.

**Résolution par quadrature de l'équation homogène.** On pose  $X(t) = \exp(t \cdot A) \cdot X_0$ , où  $X_0$  est un vecteur fixé.

**Lemme 2.4** *La fonction  $t \mapsto X(t)$  est dérivable et*

$$X'(t) = A \cdot \exp(t \cdot A) \cdot X_0.$$

*En particulier, elle résoud l'équation différentielle homogène  $X'(t) = A \cdot X$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $t_0$  fixé. On a

$$\exp(t + t_0) \cdot A - \exp t_0 A = (\exp t A - I) \exp(t_0 A) = \left( t \cdot A + \sum_{n \geq 2} \frac{t^n A^n}{n!} \right) \cdot \exp(t_0 A).$$

Donc,

$$\exp(t + t_0) \cdot A - \exp t_0 A = t \cdot A \cdot \exp(t_0 A) + O(t^2).$$

■

**Exercice 17** *Résoudre  $X' = A \cdot X$  avec  $X(0) = X_0$  dans les cas suivants.*

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Cas du plan.** Lorsque  $A$  est une matrice  $2 \times 2$ , on peut décrire les orbites du champ de vecteurs associé en discutant selon les valeurs propres de  $A$ . Rappelons que le polynôme caractéristique s'écrit en ce cas

$$\lambda^2 - (\text{Tr } A) \cdot \lambda + \text{Det } A = 0.$$

Nous allons distinguer essentiellement trois cas. On remarque que la solution à l'origine est constante, ce qui constitue une singularité du champ de vecteurs.

1. *Deux racines distinctes réelles.* La matrice est donc diagonalisable, et, dans une base de vecteurs propres, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons d'abord qu'elles sont non nulles. Les solutions sont donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \exp \lambda_2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

On dit que l'origine est un *nœud attractif* lorsque  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  (car toutes les solutions sauf deux sont tangentes aux vecteurs propres associés à la plus petite valeur propre, les deux autres étant tangentes à l'autre espace propre), et plus généralement un *puits* (les orbites sont attirées par 0); on parle de *nœud répulsif* lorsque  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  (lorsque 0 est un nœud attractif pour le champ  $(-X)$ ), ou plus généralement de *source* (les orbites s'écartent de 0) et de *selle* ou de *col* lorsque  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  (les axes correspondent à deux orbites – sans compter l'origine – qui sont attirées par 0 en temps positif sur  $\{y = 0\}$  et en temps négatif pour  $\{x = 0\}$ ).

Si une racine est nulle, *e.g.*  $\lambda_1 = 0$ , alors les orbites sont des droites parallèles au vecteur propre associé  $\lambda_2$ .

2. *Deux racines non réelles (donc distinctes).* Les valeurs propres s'écrivent alors  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Il existe une base de vecteurs propres conjuguées dans  $\mathbb{C}^2$ . Si  $v = w_1 + iw_2$  est l'un d'eux avec  $w_1$  et  $w_2$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $(w_1, w_2)$  est une base. Dans cette base, on a

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les solutions et obtenir

$$\exp(\alpha \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha < 0$ , on dit que 0 est un puits, et plus précisément un *foyer attractif* (les orbites sont attirées vers 0 en spiralant), ou si  $\alpha > 0$ , un *foyer répulsif* (les orbites s'écartent de 0 en spiralant) *i.e.*, une source (*cf.* ci-dessus) et sinon un *centre* (les orbites sont périodiques et tournent sur des cercles centrés à l'origine).

3. *Une racine double (donc réelle).* Il existe alors une base de  $\mathbb{R}^2$  telle que la matrice soit de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$



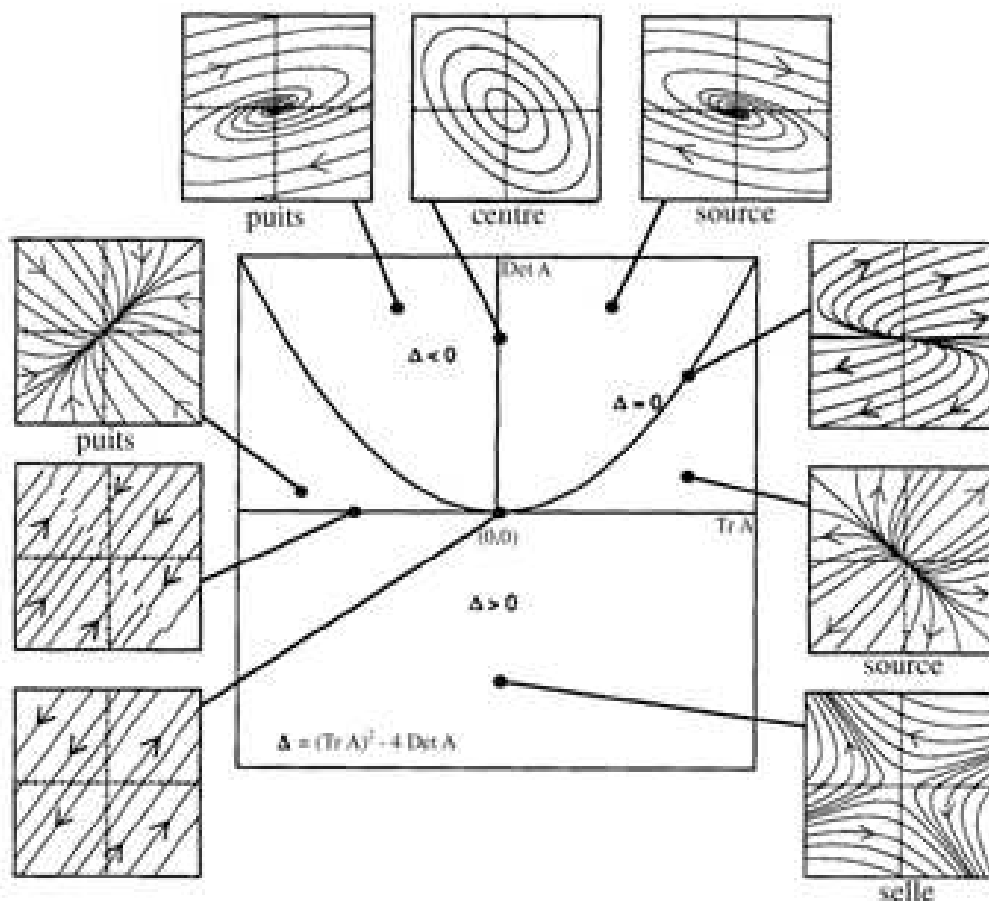
Supposons  $\lambda \neq 0$ . Donc les solutions seront

$$\exp(\lambda \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha = 0$  alors on parle de soleil-puits/source (les orbites sont des demi-droites issues de l'origine) selon le signe de  $\lambda$ . Sinon, on est dans une situation dégénérée (attractive ou répulsive), où les orbites sont toutes tangentes à l'origine aux vecteurs propres de la première valeur propre.

Si  $\lambda = 0$  et  $\alpha = 0$ , alors toutes les solutions sont constantes. Si  $\alpha \neq 0$ , alors les orbites sont des droites parallèles au premier vecteur.

La discussion qui précède se résume ainsi :



**Figure 2** *Diagramme des bifurcations.*

Pour la classification des champs de  $\mathbb{R}^n$ , on s'appuie sur la réduction de Jordan des matrices, pour se ramener à une décomposition en sous-espaces invariants  $E^s \oplus E^u \oplus E^c$ .

**Exercice 18** Résoudre  $x'' + ax' + bx = 0$  pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , et justifier la méthode de l'équation caractéristique associée à une telle équation.

**Exercice 19** (voir [3], §7.4) Soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$  une application continue. On considère l'équation différentielle  $X' = A(t)X$ , où  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est inconnue.

1. Montrer que les solutions forment un espace vectoriel de dimension finie.
2. On considère l'équation différentielle  $M' = A(t)M$  où  $M : I \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  est inconnue, et on note  $R(\cdot, t_0) : t \mapsto R(t, t_0)$  la solution de condition initiale  $M(t_0) = I$ , appelée la résolvante.

- (a) Si  $V \in \mathbb{R}^n$ , montrer que  $Y(t) = R(t, t_0)V$  est la solution de  $X' = A(t)X$  telle que  $Y(t_0) = V$ .
- (b) Montrer que pour tout triplet  $t_1, t_2, t_3$ , on a  $R(t_3, t_2)R(t_2, t_1) = R(t_3, t_1)$ .
- (c) (Facultatif pour la suite) Montrer que si  $A(s)A(t) = A(t)A(s)$  pour tout  $(s, t)$ , alors

$$R(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t A(s) ds.$$

(Ind: on pourra effectuer un développement limité du terme droite en un point  $t$ .)

3. On considère  $n$  solutions  $Y_1, \dots, Y_n$  de cette équation, et on définit le wronskien  $W(t) = \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ .
  - (a) Montrer que  $W(t) = \det(R(t, t_0)) \det(V_1, \dots, V_n)$  où  $V_j = Y_j(t_0)$ .
  - (b) On note  $\Delta(t) = \det(R(t, t_0))$ ; montrer  $\Delta(t+h) = \det(R(t+h, t)) \Delta(t)$ .
  - (c) En déduire que  $\Delta$  vérifie l'équation  $\Delta'(t) = \text{tr}(A(t)) \Delta(t)$ .
  - (d) Etablir une formule "explicite" de  $W(t)$ , et montrer que les solutions  $(Y_1, \dots, Y_n)$  sont indépendantes si et seulement si il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $W(t_0) \neq 0$ .
4. On considère une équation différentielle linéaire homogène sur  $\mathbb{R}$  d'ordre  $n$

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}.$$

On définit le wronskien de  $n$  solutions comme le wronskien associé à des solutions du système linéaire d'ordre 1 associé.

- (a) Donner une expression du wronskien dans ce cas en fonction des  $(a_j)$  et des conditions initiales.
- (b) On se donne une équation d'ordre 2, et on suppose que l'on connaît une solution. Montrer comment, à l'aide du wronskien, on peut ramener la recherche d'une seconde solution indépendante à la résolution d'une équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  d'ordre 1.

**Equation non-homogène.** Comme dans le cas uni-dimensionnel, on a plusieurs méthodes pour trouver une solution particulière. La méthode générale est bien sûr celle de la variation de la constante, qui conduit toujours à une solution sous forme intégrale.

**Théorème 2.5** Soit  $X' = AX + B(t)$  à résoudre, avec  $X(0) = X_0$  et où  $A$  est une matrice à coefficients constants et  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction vectorielle continue. Alors la solution s'écrit

$$X(t) = A \cdot \exp(t \cdot A) \cdot X_0 + \int_0^t e^{(t-s) \cdot A} \cdot B(s) ds.$$

Une autre méthode se rapproche de celle de la Proposition 1.2. Seulement, elle devient plus difficile à utiliser à cause des phénomènes de résonance.

Le phénomène de résonance se produit dans des cas comme celui-ci : supposons que  $B(t) = Q(t) \cdot e^{\alpha t}$  où  $Q$  est un polynôme vectoriel. On considère  $X(t) = P(t) \cdot e^{\alpha t}$  avec  $P$  de même degré que  $Q$  que l'on substitue dans l'équation. On obtient ainsi

$$(\alpha \cdot I - A)P = Q.$$

Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $A$ , alors on ne pourra pas inverser  $(\alpha \cdot I - A)$ . Pour contourner cette difficulté, on doit considérer  $P$  de degré égal au moins à la multiplicité de  $\alpha$  comme valeur propre de  $A$ .

## 2.2 Méthodes qualitatives pour les systèmes planaires autonomes

On écrit le système sous la forme

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le flot sera noté  $\phi_t$ . Un point de  $\mathbb{R}^2$  sera noté  $p$ , une solution pourra aussi être notée  $u(t) = (x(t), y(t))$ .

L'objet de cette étude est de décrire les orbites orientées de tout champ de vecteurs.

### 2.2.1 Etude locale

L'idéal est de trouver un modèle pour chaque situation. Par modèle, on entend : si  $X$  est champ autonome lipschitzien défini au voisinage de 0 et si  $\phi_t$  est son flot associé, alors il existe un homéomorphisme  $\psi$  défini au voisinage de 0 et un flot "très simple"  $\varphi_t$  tels que  $\psi \circ \phi_t = \varphi_t \circ \psi$ . Cela signifie alors que les orbites de  $X$  ressemblent à celles de  $\varphi_t$  après un changement de coordonnées. Notons que si  $\psi$  est un difféomorphisme et que l'on note  $q = \psi(p)$ , alors

$$\frac{d}{dt} \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}(q)|_{t=0} = D_{\phi_t \circ \psi^{-1}(q)} \psi \cdot X(\phi_t \circ \psi^{-1}(q))|_{t=0} = D_p \psi \cdot X(p).$$

La conjugaison du flot par un difféomorphisme  $\psi$  transforme le champ  $X$  en  $Y = D\psi \cdot X$ . Nous utiliserons souvent des changements de variables affines i.e., de la forme  $\psi(p) = A \cdot (p - p_0)$ . Du coup, si  $X(p) = X(p_0) + D_{p_0} X(p - p_0) + o(|p - p_0|)$ , on obtiendra

$$Y(q) = A \cdot X(p_0) + A \cdot D_{p_0} X \cdot A^{-1}(q) + o(|q|).$$

**Points réguliers.** Commençons par étudier un champ de vecteurs au voisinage d'un point régulier i.e., au voisinage d'un point  $x_0$  tel que  $X(x_0) \neq 0$ .

**Lemme 2.6** *Si  $X$  est régulier au voisinage de  $p_0$ , alors il existe un homéomorphisme local  $\psi : V \rightarrow ]-\varepsilon_s, \varepsilon_s[ \times ]-t_0, t_0[$  tel que  $\psi \circ \phi_t(p) = \psi(p) + {}^t(t, 0)$ . Si le champ est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $\psi$  est un difféomorphisme local.*

Le voisinage ainsi défini s'appelle une *boîte à flot*.

**DÉMONSTRATION.** Supposons pour simplifier que  $p_0 = 0$  et que  $X(0) = {}^t(1, 0)$ . On peut se ramener à ce cas en transportant  $X$  par une application affine. On considère  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $\gamma(s) = (0, s)$ . Par suite,  $\gamma'(0)$  est orthogonal à  $X(0)$ . Par continuité de  $X$ , de  $\gamma'$  et du déterminant, il existe donc des voisinages  $I$  et  $J$  de 0 dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\gamma'(s)$  et  $X(\phi_t(\gamma(s)))$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$  pour  $s \in I$  et  $t \in J$ .

On pose  $\chi(t, s) = \phi_t(\gamma(s))$ . Sur tout voisinage compact assez petit de 0 (dans  $\mathbb{R}^2$ ),  $\chi$  est bien définie, continue et injective. En effet, si  $\chi(t_1, s_1) = \chi(t_2, s_2)$ , alors les orbites de  $X$  avec conditions initiales  $\gamma(s_1)$  et  $\gamma(s_2)$  coïncident. Ou bien  $t_1 = t_2$  et alors  $s_1 = s_2$ , ou bien, supposons que  $t_1 > t_2$ . En ce cas,  $\gamma(s_1) = \phi_{t_1-t_2}(\gamma(s_2))$ . Ceci est impossible car le choix du voisinage impose que  $x'(t) > 0$  pour  $t \in I$ . Donc  $\chi$  un homéomorphisme au voisinage de 0 (une application continue et injective sur un compact définit un homéomorphisme sur son image).

Par construction, cet homéomorphisme envoie les horizontales sur des orbites de  $X$ . L'application recherchée est donc  $\psi = \chi^{-1}$ .

Si le champ est lisse, il en est de même de son flot. Or sa différentielle est  $D\chi = I$ . Donc le théorème d'inversion locale montre que  $\chi$  est un difféomorphisme local. ■

**Barrières.** Le rôle des barrières est similaire au cas de la dimension 1. Le but est d'empêcher les orbites de traverser des courbes dans les deux sens.

**Définition.** Une *barrière* est un plongement  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\det(p'(t), X(p(t)))$  est de signe constant pour tout  $t$  (mais peut s'annuler). Une *section transverse au flot* est une barrière telle que, pour chaque  $t$ ,  $(\gamma'(t), X(\gamma(t)))$  définit une base de  $\mathbb{R}^2$  (ainsi qu'une orientation).

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on définit une barrière comme étant une hypersurface  $\Sigma$  telle que  $X$  définisse une orientation sur  $\Sigma$ .

Commençons par un lemme préparatoire.

**Lemme 2.7** Soit  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  un plongement de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors, pour tout  $s_0 \in ]a, b[$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\{0\} \times \{s_0\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  et un difféomorphisme  $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi(0, s) = \gamma(s)$ . Si  $\sigma : \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}$  est la première coordonnée de  $\varphi^{-1}$ , alors  $\sigma$  est une submersion au dessus de 0, et  $\{\sigma = 0\} \subset \gamma(]a, b[)$ .

**DÉMONSTRATION.** On note  $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ , et posons  $X(s) = (\gamma'_y(s), -\gamma'_x(s))$ . Alors

$$\det(X(s), \gamma'(s)) = |\gamma'(s)|^2 > 0.$$

On définit  $\varphi(t, s) = \gamma(s) + tX(s_0)$ . On a

$$D_{(0, s_0)}\varphi = (X(s_0), \gamma'(s_0)).$$

Par le théorème d'inversion local, on en déduit que  $\varphi$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $(0, s_0)$ . Notons  $\sigma$  la première coordonnée de  $\varphi^{-1}$ , alors  $\sigma(p) = 0$  implique que  $p$  appartient à  $\Sigma$  par définition. De plus,  $\sigma$  est une submersion, sinon  $D\varphi$  ne serait pas inversible. ■

**Proposition 2.8** Soit  $\gamma$  une section transverse et supposons le champ de classe  $\mathcal{C}^1$ . Il existe un difféomorphisme global défini au voisinage de  $\Sigma = \gamma(]a, b[)$  qui conjugue  $(t, s) \mapsto \phi_t(\gamma(s))$  à  $(t, s) \mapsto (t, s)$ .

Comme corollaire, on a

**Corollaire 2.9** *Supposons que  $\gamma$  est une barrière et considérons  $p_0 \in \Sigma = \gamma(]a, b[)$  et  $D$  un petit disque centré en  $p_0$  tels que  $D \setminus \Sigma$  ait deux composantes connexes  $D_+$  et  $D_-$ . Alors, pour tout  $t > 0$  assez petit et tout  $p \in \Sigma$  assez proche de  $p_0$ , on a  $\phi_t(p) \in \overline{D_+}$  et  $\phi_{-t}(p) \in \overline{D_-}$ , ou le contraire (le signe est indépendant de  $p$ ).*

Démontrons d'abord la Proposition 2.8.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.8.** Soit  $\gamma$  une section transverse. A l'instar du Lemme 2.6, on pose  $\chi(t, s) = \phi_t(\gamma(s))$ . Comme  $X$  et  $\gamma$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , il en est de même de  $\chi$  et on trouve

$$D_{(0,s)}\chi = (X(\gamma(s)), \gamma'(s)).$$

Par hypothèse, ces vecteurs sont libres donc  $\chi$  est un difféomorphisme local sur un voisinage  $] -t_s, t_s[ \times ]s - \varepsilon_s, s + \varepsilon_s[$  de chacun de ces points. On extrait un sous-recouvrement de  $\Sigma$  localement fini.

On note  $L > 1$  un majorant de  $X$  sur la réunion de ces voisinages. Pour chaque  $s \in ]a, b[$ , on considère

$$\delta(s) = \min \{ |\gamma(a) - \gamma(s)|/(3L), |\gamma(b) - \gamma(s)|/(3L), t_s \}.$$

On restreint alors  $\chi$  sur

$$\{(t, s), s \in ]a, b[, t \in ] -\delta(s), \delta(s)[\}.$$

Si  $\chi$  n'est pas injective, alors on a, comme pour le Lemme 2.6, l'existence de  $t_1 > t_2$  et  $s_1 \neq s_2$  tels que  $\gamma(s_1) = \phi_{t_1-t_2}(\gamma(s_2))$ . Mais, la courbe  $\phi_{]0, t_2-t_1[}(\gamma(s_2))$  est de longueur au moins  $3L\delta(s_2)$ . Or la longueur est bornée comme suit :

$$\int_0^{t_2-t_1} |X(\phi_t(\gamma(s_2)))| dt \leq L \cdot |t_2 - t_1| \leq 2L \cdot \delta(s_2).$$

Donc  $\chi$  est injective. ■

**DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.9.** Par le Lemme 2.7, on se ramène à  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma(s) = (0, s)$  et à  $X = (P, Q)$  avec  $P(0, s) \geq 0$ . Si  $P(0, 0) > 0$  alors la Proposition 2.8 montre le corollaire. Sinon, on pose  $X_\varepsilon = (P + \varepsilon, Q)$ . Alors  $X_\varepsilon$  est localement intégrable et le cas précédent s'applique. En passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient ce que l'on cherchait. ■

**Points d'équilibre.** Lorsque l'on a affaire à un point singulier (que l'on appelle aussi *point d'équilibre*), on ne peut *a priori* rien dire si  $X$  n'est pas au moins différentiable dans son voisinage. Supposons que ce soit 0. Dans ce cas, on peut se demander si le flot de  $D_0X$  a un comportement similaire à celui de  $X$  au voisinage de 0, autrement dit, si  $D_0X$  est un modèle pour  $X$ . Il s'agit donc de comprendre si une perturbation de  $D_0X$  a les mêmes propriétés que  $D_0X$ . D'après le diagramme des bifurcations, on ne peut rien assurer *a priori* si la partie réelle d'une valeur propre est nulle, ni dans les cas dégénérés.

Commençons par donner une classification des singularités.

**Définitions.** Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $X(0) = 0$ .

- On dit que l'origine est un puits si, pour tout  $x$  proche de 0,  $\phi_t(x)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  en restant dans son voisinage. On parlera de foyer si les orbites spiralent autour de l'origine, et de nœud si exactement deux orbites forment une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  et toutes les autres sont tangentes à une autre direction.
- On dit que l'origine est une source si 0 est un puits pour le champ  $-X$ . On parlera de même de foyer et de nœud.
- On dit que l'origine est un centre si, pour tout  $x$  proche de 0,  $\phi_t(x)$  est un orbite périodique i.e., il existe  $T > 0$  tel que  $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$  et  $\{\phi_t(x), t \in \mathbb{R}\}$  décrit un cercle qui entoure 0.
- On dit que l'origine est un point selle s'il existe exactement 2 orbites locales qui tendent vers 0 et qui forment une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  et s'il existe exactement 2 autres orbites locales qui tendent vers 0 dans le passé et qui forment une autre courbe de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ces quatre orbites découpent un voisinage de 0 en 4 quartants. Dans chaque quartant, les orbites se rapprochent de 0 puis s'en écartent.
- Dans les autres cas, on a affaire à des cas dégénérés.

**Exercice 20** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe  $R > 0$  tel que, pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|p| = R$ , on ait  $X(p) \cdot p < 0$ . On suppose que  $X$  n'a pas de point d'équilibre dans  $\{|x| < R\}$ .

1. Montrer qu'il existe  $p_0$  tel que  $|p_0| = R$  et  $p_0 = R \cdot X(p_0)/|X(p_0)|$ . On pourra appliquer le théorème de Brouwer à une fonction bien choisie.
2. En déduire une contradiction, et conclure.

**Stabilité des points d'équilibre.** On dit qu'un point d'équilibre  $p_0$  est *stable* si pour tout voisinage  $V$  de  $p_0$ , il existe un autre voisinage  $W$  assez petit, telle que toute orbite qui rentre dans  $W$  reste dans  $V$  i.e., pour tout  $p \in W$ , pour tout  $t > 0$ , on a  $\phi_t(p) \in V$ . On parle de point *instable* dans le cas contraire. On dit que le point d'équilibre est *asymptotiquement stable* si toute orbite dans  $W$  tend vers  $p_0$ . D'après ce qui précède, les points stables sont les centres et les puits (qui sont eux-mêmes asymptotiquement stables), les autres étant instables.

Pour détecter la présence et la nature d'un point d'équilibre, on a fait appel à la notion de *fonction de Liapunov* (cf. Exercice 20) : il s'agit d'une fonction continue  $L : U \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie sur un ouvert et différentiable sur  $U$ , qui s'annule uniquement en un point  $p_0$ , et qui décroît le long des orbites i.e., pour tout  $p$ ,

$$\frac{d}{dt}L \circ \phi_t(p)|_{t=0} \leq 0.$$

Si l'inégalité est stricte, alors on parle de *fonction de Liapunov stricte*.

**Remarque.** Pour vérifier qu'une fonction est de Liapunov, il est inutile de résoudre l'équation différentielle associée au champ de vecteurs. En effet, on a

$$\frac{d}{dt}L \circ \phi_t(p)|_{t=0} = (\nabla L)(p) \cdot X(p).$$

**Théorème 2.10** *Si  $L$  est une fonction de Liapunov stricte, alors  $p_0$  est l'unique point d'équilibre dans  $U$ , et il est asymptotiquement stable. Si  $L$  n'est pas stricte, alors  $p_0$  est un point d'équilibre stable. Si  $(\nabla L)(p) \cdot X(p) = 0$  pour tout  $p \in U$ , alors  $p_0$  est un centre si  $X$  a ses zéros isolés.*

DÉMONSTRATION. Pour  $r > 0$ , on note  $\Sigma_r = \{p, L(p) = r\}$ . Si  $r$  est assez petit, alors  $\Sigma_r$  est un cercle topologique qui entoure  $p_0$  car  $p_0$  est l'unique minimum, sa valeur est 0, et  $L^{-1}(\{r\})$  est une variété compacte de dimension 1. La condition de décroissance de  $L$  le long des orbites montre que  $\Sigma_r$  est une barrière, et que le champ de vecteurs pointe à l'intérieur  $U_r = \{p, L(r) \leq r\}$  de  $\Sigma_r$ . Par suite, le Corrolaire 2.9 montre que  $\phi_t(p) \in U_r$  pour tout  $t > 0$  et tout  $p \in U_r$ . En particulier, l'orbite positive de  $p_0$  ne peut pas traverser  $\Sigma_r$  pour tout  $r > 0$ . Donc,  $p_0$  est un point d'équilibre. De plus, pour  $p \in \Sigma_r$ ,  $\phi_t(p)$  est défini pour tout  $t > 0$  et n'en sort pas. Donc  $p_0$  est un point d'équilibre stable.

Supposons maintenant que  $L$  est stricte. Pour  $p \neq p_0$ , la fonction  $t \mapsto L \circ \phi_t(p)$  est décroissante minorée, donc elle admet une limite. Par le théorème des accroissement finis, il existe une suite  $t_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left. \frac{d}{dt} L \circ \phi_t(p) \right|_{t=t_n} = 0.$$

Donc  $\lim L \circ \phi_t(p) = 0$  car  $L$  est stricte, et il s'ensuit que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(p) = p_0$ . Donc  $p_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Si  $(\nabla L)(p) \cdot X(p) = 0$  pour tout  $p \in U$ , alors les solutions sont contenues dans les lignes de niveau de  $L$ . Comme celles-ci sont des courbes de Jordan qui entourent  $p_0$ , on en déduit que  $p_0$  est un centre puisque les points d'équilibre sont isolés. ■

**Exercice 21** *On considère*

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1), \\ y' = -x(z - 1), \\ z' = xy. \end{cases}$$

*Montrer que l'origine est un point d'équilibre qui admet une fonction de Liapunov de la forme  $L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  (voir Exemple 1 du §9.3 de [6]). Que peut-on dire des orbites au voisinage de  $(0, 0, 0)$  ?*

**Exercice 22 Pendule avec friction (champ dissipatif).**

*On considère  $\theta'' = -K \sin \theta - \varepsilon \theta'$  (cf. Exemple 6.5.4 de [8]).*

1. *Transformer cette équation en un système du premier ordre.*
2. *Déterminer la nature du point d'équilibre.*

**Exercice 23 (Système gradient).** *On considère*

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial V}{\partial y}(x, y), \end{cases}$$

*où  $V$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  (cf. §9.4 de [6] et §2.14 de [10]).*

1. Soit  $u$  une solution du système. Montrer que  $\frac{d}{dt}(V \circ u) \leq 0$  et  $\frac{d}{dt}(V \circ u) = 0$  si et seulement si  $u$  est un point d'équilibre.
2. En déduire que si  $x_0$  est un minimum isolé de  $V$  alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.
3. Montrer que les orbites sont orthogonales aux lignes de niveaux de  $V$ .
4. Etudier le système donné par  $V(x, y) = x^2(x - 1)^2 + y^2$ .

On applique le Théorème 2.10 pour établir les critères suivants.

**Corollaire 2.11** *Supposons que  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$  tel que  $X(0) = 0$ , et tel que  $D_0X$  n'a pas de valeurs propres de partie réelle nulle. Alors*

- Si les valeurs propres ont leurs parties réelles toutes négatives, on a affaire à un puits.
- Si les valeurs propres ont leurs parties réelles toutes positives, on a affaire à une source.

Plus précisément, si  $0$  est un foyer de  $D_0X$  (resp. un nœud) alors  $0$  est aussi un foyer de  $X$  (resp. un nœud).

DÉMONSTRATION. Supposons que  $0$  est un nœud attractif de  $D_0X$ . Par un changement de variables linéaire, on se ramène au cas où les vecteurs propres sont parallèles aux axes i.e.,

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + P(x, y), \\ y' = \lambda_2 y + Q(x, y), \end{cases}$$

avec  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ,  $P = o(|p|)$ ,  $D_p P = O(|p|)$ ,  $Q = o(|p|)$  et  $D_p Q = O(|p|)$ .

Posons alors  $L(x, y) = (1/2) \cdot (|\lambda_2|x^2 + |\lambda_1|y^2)$ . Montrons que c'est une fonction de Liapunov stricte pour  $p$  assez proche de  $0$ .

$$\left. \frac{d}{dt} L \circ \phi_t(p) \right|_{t=0} = -|\lambda_1 \cdot \lambda_2| \cdot |p|^2 + o(|p|^2),$$

Donc  $(\nabla L) \cdot X(p) < 0$  si  $p$  est assez proche de  $0$ . Donc  $0$  est un puits.

Montrons que  $0$  est un nœud. Pour  $\alpha > 0$ , on considère  $S_\alpha = \{(x, y), |y| \geq \alpha|x|\}$ . Donc  $|p| \asymp |y|$ . Il existe  $\delta_\alpha > 0$  tel que  $\lambda_2 y + Q(x, y) < 0$  dès que  $p \in S_\alpha$  et  $|p| < \delta_\alpha$ . Donc, si  $u$  est une solution qui est contenue dans  $S_\alpha$ , alors  $t \mapsto y(t)$  est un difféomorphisme et on peut considérer la fonction  $y \mapsto x(y)$ . On aura

$$x' = \frac{\lambda_1 x + P(x, y)}{\lambda_2 y + Q(x, y)} := Y(x, y).$$

Soit  $0 < \beta < \alpha$ , et montrons que  $p(y) = \beta y$  est une barrière supérieure de  $Y$  :

$$Y(\beta y, y) = \beta \cdot \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} \cdot \left[ \frac{1 + P(\beta y, y)/(\lambda_1 \beta y)}{1 + Q(\beta y, y)/(\lambda_2 y)} \right].$$



Donc  $Y(\beta y, y) < \beta$  dès que  $|y|$  est assez petit car  $|p| = O(|y|)$  dans ces secteurs.

De même, on trouve que  $Y(-\beta y, y) > -\beta$  dès que  $y$  est assez petit. Par suite,  $S_\beta$  est la réunion d'un drain (pour  $y > 0$ ) et d'un anti-drain (pour  $y < 0$ ). Montrons que l'anti-drain ne contient qu'une seule orbite: on suppose que  $u_1, u_2$  sont deux solutions contenues dans l'anti-drain telles que  $u_2 \geq u_1$ , et on considère l'application  $\gamma = u_2 - u_1$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note que  $0 \leq \gamma(y) \leq 2\beta|y|$ .

Par commodité d'écriture, on note  $P_j = P(u_j(y), y)$  et  $Q_j = Q(u_j(y), y)$  pour  $j = 1, 2$ . On a

$$\gamma'(y) = Y(u_2(y), y) - Y(u_1(y), y) = \frac{(\lambda_1 u_2 + P_2)(\lambda_2 y + Q_1) - (\lambda_1 u_1 + P_1)(\lambda_2 y + Q_2)}{(\lambda_2 y + Q_1)(\lambda_2 y + Q_2)}.$$

Pour le numérateur, on obtient

$$N = \lambda_1 \lambda_2 y \gamma(y) + \lambda_1 u_2 Q_1 + P_2(\lambda_2 y + Q_1) - \lambda_1 u_1 Q_2 - P_1(\lambda_2 y + Q_2)$$

Or  $P_2 = P_1 + \partial_x P(u_1(y), y)\gamma + o(y\gamma)$  et  $Q_2 = Q_1 + \partial_x Q(u_1(y), y)\gamma + o(y\gamma)$ , donc

$$\lambda_1 u_2 Q_1 - \lambda_1 u_1 Q_2 = \lambda_1 \gamma Q_1 + o(y^2 \gamma),$$

$$P_2 \lambda_2 y - P_1 \lambda_2 y = \lambda_2 y \gamma + o(y \gamma),$$

et

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = \gamma o(y \gamma).$$

Par suite,

$$N = \lambda_1 \lambda_2 y \gamma(y) + o(y \gamma).$$

Pour le dénominateur, on obtient

$$D = (\lambda_2 y)^2 + o(y^2)$$

donc

$$\gamma'(y) = \frac{\lambda_1 \gamma(y)}{\lambda_2 y} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}$$

donc il existe  $\alpha \in ]\lambda_1/\lambda_2, 1[$  telle que, si  $|y|$  est assez petit, alors

$$\gamma'(y) \geq \alpha \frac{\gamma(y)}{y}.$$

Du coup, il existe  $y_0$  assez petit telle que, pour  $y_0 \leq y < 0$ , on ait

$$\gamma(y) \geq \gamma(y_0) \left| \frac{y}{y_0} \right|^\alpha.$$

Pour que cette inégalité soit compatible avec  $0 \leq \gamma(y) \leq 2\beta|y|$ , il faut que  $\gamma(y_0) = 0$ , donc  $u_1 = u_2$ .

Par conséquent, il n'existe qu'une seule orbite dans  $S_\beta$  pour  $y < 0$ . Comme cela est vrai pour tout couple  $0 < \beta < \alpha$ , on en déduit que cette orbite est tangente à l'axe  $\{x = 0\}$  au point 0.

Pour étudier le cas  $y > 0$ , on étudie  $t \mapsto \phi_t(-p)$ . Le même calcul que ci-dessus nous montre l'unicité d'une orbite dans ce secteur.

Cela signifie que toutes les autres orbites attirées par 0 se trouvent à l'extérieur de  $S_\beta$  lorsqu'ils sont assez proches de l'origine, et ce, pour tout  $\beta > 0$ . Par suite, on en déduit qu'elles tendent vers 0 en étant tangentes à  $\{y = 0\}$ .

Donc 0 est bien un nœud pour  $X$ .

Si  $D_0X$  est un foyer attractif, on se ramène au cas où

$$D_0X = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Alors un calcul similaire montre que  $L(x, y) = (1/2) \cdot (x^2 + y^2)$  est une fonction de Liapunov stricte.

Pour voir que les orbites spiralent, on considère la variation de l'argument d'une solution, soit

$$\frac{y'x - x'y}{x^2 + y^2} = \beta^2 + \frac{xQ(x, y) - yP(x, y)}{|p|^2} = \beta^2 + o(1).$$

Donc l'orbite tourne autour de 0.

Dans le cas de foyer et de nœud répulsif, on se ramène au cas ci-dessus en considérant  $-X$ . ■

**Théorème 2.12 de la variété stable.** *Si  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $X(0) = 0$  et 0 est un point selle de  $D_0X$ , alors il existe exactement 2 orbites qui tendent vers 0 tangentiellement aux vecteurs propres associés à la valeur négative, 2 orbites qui tendent vers 0 négativement et tangentiellement aux vecteurs propres associés à la valeur positive.*

Ces 4 orbites particulières sont des *séparatrices* du système.

Un point d'équilibre qui vérifie les hypothèses du Corollaire 2.11 ou du Théorème 2.12 est un *point hyperbolique*.

**DÉMONSTRATION.** On suppose que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , et on procède comme pour le Corollaire 2.11. On se place dans un secteur  $S_\alpha = \{|x| > \alpha|y|\}$ . Du coup,  $|p| = O(|x|)$ . Donc si  $|x|$  est assez petit, alors  $\lambda_1 x + P(x, y) < 0$ , et on peut étudier

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2 y + Q(x, y)}{\lambda_1 x + P(x, y)}.$$

Pour  $x < 0$ , on montre que l'on obtient un anti-drain et que  $\partial_x(dy/dx) \geq 0$ . Donc le Théorème 1.10 nous donne l'existence d'une unique orbite qui reste dans  $S_\alpha$  avec  $x < 0$ . Comme cela est vraie pour tout  $\alpha > 0$ , on en déduit que cette orbite est tangente à l'axe des abscisses au point 0.

On procède de même en étudiant le passé pour  $x > 0$ , et en considérant  $-X$  pour obtenir des orbites tangentes à l'axe des ordonnées qui sont repoussées. ■

Les mêmes méthodes permettent aussi de montrer :

**Proposition 2.13** *Si 0 est un point d'équilibre stable, alors  $D_0X$  n'a pas de valeurs propres de partie réelle strictement positive.*

**Exercice 24 (Bifurcation de Hopf).** (voir Exemple 4.1 du §4.4 de [10]) On considère

$$\begin{cases} x' = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

1. Déterminer les points d'équilibre et étudier leur nature selon les valeurs de  $\mu \in \mathbb{R}$ .
2. Ecrire ce champ en coordonnée polaire.
3. En déduire que si  $\mu > 0$ , alors il existe une orbite périodique, et alors toute orbite non constante est attirée par cette orbite.

**Linéarisabilité.** Le résultat le plus propre que l'on puisse obtenir sur la dynamique au voisinage d'un point d'équilibre  $p_0$  est la linéarisabilité. On dit que  $X$  est *linéarisable* s'il existe un homéomorphisme  $\psi$  tel que  $\psi \circ \phi_t = \exp(t \cdot DX) \circ \psi$  au voisinage de 0. Cela revient à dire que le flot est conjugué au flot associé à  $D_{p_0}X$ . On obtient ainsi une description explicite de la dynamique au voisinage de  $p_0$ .

**Théorème 2.14 (Hartman-Grobman)** *Supposons que  $X$  est un champ de classe  $\mathcal{C}^1$  ayant un point d'équilibre hyperbolique à l'origine. Alors il existe un homéomorphisme  $h : U \rightarrow V$  défini entre deux voisinages de l'origine tel que, pour tout  $p \in U$ , il existe un intervalle ouvert  $I_p$  contenant 0 tel que pour tout  $p \in U$ , tout  $t \in I_p$ , on ait*

$$h \circ \phi_t(p) = e^{t \cdot D_0 X} \circ h(p).$$

### 2.2.2 Etude globale

On considère une équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

L'étude globale ressemble beaucoup à celle en dimension 1. On peut en effet remarquer que dans le cas uni-dimensionnel, on s'est ramené implicitement à un système autonome. Elle consiste à découper le plan en zones invariantes dans lesquelles les trajectoires sont similaires. On s'intéresse donc aux orbites périodiques, aux ensembles limites, aux attracteurs que nous définirons, ainsi qu'aux séparatrices. On s'intéressera surtout aux trajectoires bornées. Pour les étudier, on définit les intégrales premières et les applications de premier retour. On décrira aussi la théorie de Poincaré-Bendixson, qui est particulière au plan.

**Orbites périodiques.** Il s'agit d'orbites définies sur  $\mathbb{R}$  pour lesquelles il existe un  $T > 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_{t+T}(p) = \phi_t(p)$ . En fait, il suffit d'avoir  $\phi_T(p) = p$ . Lorsqu'on a une orbite périodique  $\gamma$ , on peut, comme dans le cas des points d'équilibre s'intéresser aux phénomènes de stabilité: existe-t'il un voisinage  $V$  de  $\gamma$ , tel que, pour tout  $p \in V$ ,  $\phi_t(p) \in V$  pour tout  $t > 0$ , ou pour tout  $t < 0$ ? A-t'on  $dist(\phi_t(p), \gamma)$  tend vers zero quand  $t \rightarrow \pm\infty$ ?

**Intégrales premières.** Les intégrales premières sont des fonctions différentiables qui sont constantes le long des orbites (cf. les fonctions de Liapunov). En physique, cela correspond

en générale à la conservation de l'énergie totale du système. Cela signifie que les lignes de niveaux d'une intégrale première est une réunion d'orbites. Elles permettent entre autres de mettre en évidence des centres.

Une manière d'en obtenir est de considérer le rapport des équations ci-dessus, ce qui définit une équation différentielle du premier ordre de  $y$  en fonction de  $x$ . Ensuite, on peut étudier l'exactitude de cette équation (cf. Théorème 3).

**Exercice 25 (Proie/prédateur).** *On considère*

$$\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -by + fxy, \end{cases}$$

où les constantes sont positives (voir §6.3 de [8] et §12.2 de [6]).

1. *Etudier l'existence et l'unicité des solutions pour des conditions initiales positives.*
2. *Montrer qu'il existe une intégrale première  $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .*
3. *Montrer que  $F$  a un seul maximum. En déduire que les trajectoires sont périodiques.*

**Exercice 26 (Champ conservatif).** *On considère l'équation différentielle  $x'' = -V'(x)$ , où  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel de classe  $\mathcal{C}^1$  (voir Exemple 6.5.3 de [8]).*

1. *Transformer cette équation en un système du premier ordre.*
2. *Montrer que l'énergie du système  $E = (1/2) \cdot (x')^2 + V(x)$  est conservée i.e., si  $x$  est une solution, alors  $E(x(t))$  est une fonction constante de  $t$ .*
3. *Appliquer cette méthode au cas du pendule:  $\theta'' = -K \sin \theta$ . On distinguera les cas  $|E| < K$ ,  $E = \pm K$  et  $E > K$ .*

**Exercice 27 (Mécanique hamiltonienne).** *On considère*

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

où  $H$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  (voir §2.14 de [10]).

1. *Montrer que  $H$  est une intégrale première du système.*
2. *Montrer que si 0 est un foyer, alors 0 n'est pas un extremum strict de  $H$ .*
3. *Supposons  $H$  analytique. Montrer que si 0 est un point d'équilibre non dégénéré, alors il s'agit ou bien d'un col ou bien d'un centre. Montrer que si 0 est un col alors c'est un point selle de  $H$ ; si c'est un centre, alors c'est un extremum strict de  $H$ .*
4. *Montrer qu'un système newtonien  $x'' = f(x)$ , où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  se ramène à un système hamiltonien.*

**Exercice 28** 1. Soit

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Quel sont les champs de vecteurs orthogonaux à celui-ci ?

2. Montrer qu'un champ est hamiltonien si et seulement si ses champs orthogonaux sont des systèmes gradients.

**Ensembles invariants.** Un ensemble invariant  $E \subset \mathbb{R}^2$  est tel que, pour tout  $t > 0$  et pour tout  $p \in E$ , on ait  $\phi_t(p) \in E$ . Autrement dit, pour tout  $t > 0$ , on a  $\phi_t(E) \subset E$ . Donc le flot est défini sur  $\mathbb{R}_+$  pour  $p \in E$ . On dira que  $E$  est *totalelement invariant* si, de plus,  $\phi_t(E) \subset E$  pour  $t < 0$ .

On appelle *attracteur* un compact connexe totalement invariant  $A$  pour lequel il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que, pour tout  $p \in V$ ,  $d(\phi_t(p), A) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Ensembles limites.** Si  $p \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $\omega$ -limite de  $p$  est défini par

$$\omega(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_s(p), s \geq t\}}.$$

De manière analogue, l'ensemble  $\alpha$ -limite est

$$\alpha(p) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{\phi_s(p), s \leq t\}}.$$

L'ensemble  $\alpha(p)$  correspond à  $\omega(p)$  pour le champ  $-X$ . Du coup, on ne s'intéressera qu'aux ensembles  $\omega$ -limites.

Par conséquent, un point  $q \in \omega(p)$  si et seulement si il existe  $t_n \rightarrow \infty$  tels que  $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$ .

**Proposition 2.15 (Propriétés des ensembles  $\omega$ -limites)** Soit  $X$  un champ de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $p \in \mathbb{R}^2$ . On suppose qu'il existe un compact  $K$  tel que  $\phi_t(p) \in K$  pour tout  $t > 0$ . Alors

1.  $\omega(p)$  est un compact connexe non vide.
2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\omega(\phi_t(p)) = \omega(p)$ .
3.  $\omega(p)$  est totalement invariant.
4. Si  $q \in \omega(p)$ , alors  $\omega(q) \subset \omega(p)$ .

On en déduit que l'ensemble limite ne dépend que de l'orbite.

**DÉMONSTRATION.** Le théorème de l'explosion nous indique que  $\phi_t(p)$  est défini au moins sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Notons  $\omega_t(p) = \overline{\{\phi_s(p), s \geq t\}}$ . On a  $\omega_t(p) \subset K$ , donc  $\omega_t$  est compact et connexe (adhérence de l'ensemble connexe  $\{\phi_s(p), s \geq t\}$ ). De plus, si  $t' > t$ , alors  $\omega_{t'}(p) \subset \omega_t(p)$ . Donc  $\omega(p)$  est défini comme une intersection décroissante de compacts connexes non vides. Par suite,  $\omega(p)$  est compact connexe et non vide.
2. Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $u > 0$ , on a  $\omega_u(\phi_t(p)) = \omega_{t+u}(p)$ . Comme on a affaire à des suites décroissantes, on en déduit que  $\omega(p) = \omega(\phi_t(p))$ .

3. Soit  $q \in \omega(p)$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Alors il existe  $t_n \rightarrow \infty$  tel que  $\phi_{t_n}(p) \rightarrow q$ . Donc  $\phi_{t_n+t}(p) = \phi_t(\phi_{t_n}(p)) \rightarrow \phi_t(q)$  par continuité du flot. Donc  $\phi_t(q) \in \omega(p)$  et  $\omega(p)$  est totalement invariant.
4. Si  $q \in \omega(p)$ , alors  $\omega_t(q) \in \omega(p)$  par 3 et 1. Du coup,  $\omega(q) \subset \omega(p)$ .

■

**Application de premier retour de Poincaré.** Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux sections transverses, alors l'holonomie du champ  $X$  est la fonction  $H : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  définie comme suit : pour tout  $p \in \Sigma_1$ , on note  $\tau(p) = \inf_{t>0} \{ \phi_t(p) \in \Sigma_2 \}$  s'il existe, et on pose  $H(p) = \phi_{\tau(p)}(p)$ . On remarque que même si  $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , alors  $\tau(p) > 0$ .

**Lemme 2.16** Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux sections transverses à un champ  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . S'il existe  $\tau > 0$  et  $p_0 \in \Sigma_1$  tels que  $\phi_\tau(p_0) \in \Sigma_2$ , alors l'holonomie est bien définie au voisinage de  $p_0$ . Si, ou bien  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  au voisinage de  $p_0$ , ou bien  $p_0 \notin \Sigma_1 \cap \overline{\Sigma_2}$ , ou bien, pour tout  $0 \leq t < \tau$ ,  $\phi_t(p) \notin \overline{\Sigma_2} \setminus \Sigma_2$  alors  $H$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $p_0$ .

DÉMONSTRATION. D'abord,  $\tau(p_0)$  est bien définie par hypothèse. On suppose que  $\Sigma_1$  est définie par un plongement  $\gamma_1 : ]-s_0, s_0[ \rightarrow \Sigma_1$  tel que  $\gamma_1(0) = p_0$ , et que  $\Sigma_2$  est définie au voisinage de  $\phi_{\tau(p_0)}(p_0)$  par une submersion  $\sigma_2$ . On considère alors l'équation

$$F(s, t) := \sigma_2 \circ \phi_t(\gamma_1(s)) = 0.$$

Le couple  $s = 0$  et  $t = \tau(p)$  est une solution. De plus,

$$\frac{dF}{dt}(0, \tau(p_0)) = D_{\phi_{\tau(p_0)}(p_0)} \sigma_2(X(\phi_{\tau(p_0)}(p_0))) \neq 0$$

car  $\Sigma_2$  est transverse au flot. Donc le théorème des fonctions implicites donne l'existence et l'unicité d'une application  $\tau$  de classe  $\mathcal{C}^1$  définie au voisinage de  $s = 0$  tel que  $\sigma_2 \circ \phi_{\tau(s)}(\gamma_1(s)) = 0$ .

Posons  $H(\gamma(s)) = \phi_{\tau(s)}(\gamma_1(s))$ . Alors  $H$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a

$$\phi_{-\tau(s)} \circ H(\gamma(s)) = \gamma(s)$$

donc  $H$  est un difféomorphisme. Pour vérifier que  $H$  est l'holonomie, il suffit de vérifier que pour  $s$  assez proche de 0,  $\phi_t(\gamma(s)) \notin \Sigma_2$  pour tout  $0 < t < \tau(s)$ . Supposons au contraire qu'il existe  $s_n \rightarrow 0$  et  $0 < t_n < \tau(s_n)$  tel que  $\phi_{t_n}(\gamma_1(s_n)) \in \Sigma_2$ . Quitte à extraire une sous-suite, on a  $t_n \rightarrow \hat{t}$  pour un certain  $\hat{t} \geq 0$ . Par continuité, on obtient  $\phi_{\hat{t}}(p_0) \in \overline{\Sigma_2}$ . Ou bien  $\hat{t} = 0$  et alors  $p_0 \in \overline{\Sigma_2}$ . En ce cas,  $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$  au voisinage de  $p_0$ . Sinon,  $\hat{t} > 0$ , et si  $\hat{t} < \tau(p_0)$ , alors  $\phi_{\hat{t}}(p_0) \in (\overline{\Sigma_2} \setminus \Sigma_2)$  par définition de  $\tau(p_0)$ . ■

**Exercice 29** Montrer que si le champ de vecteur est de classe  $\mathcal{C}^r$ , il en est de même de l'holonomie.

**Définition.** Etant donnée une section transverse  $\Sigma$ , l'application de premier retour  $P_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  est l'holonomie  $H : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . *A priori*, l'application de premier retour n'est pas continue. Cependant, étudier l'itération de  $P_\Sigma$  peut être plus simple que d'étudier le flot. Par exemple, si  $p \in \Sigma$  vérifie  $P_\Sigma(p) = p$  alors son orbite est périodique et ne coupe qu'une fois  $\Sigma$ .

**Lemme 2.17** *Si l'orbite de  $p_0$  est  $T$ -périodique, si  $\Sigma$  est une section transverse à  $X$  en  $p_0$  assez petite, alors  $P_\Sigma$  est bien définie au voisinage de  $p_0$ , et est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

*De plus, si  $p_1$  et  $p_2$  sont deux points d'une orbite  $T$ -périodique,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux sections transverses au champ en  $p_1$  et  $p_2$ , alors les applications de Poincaré  $P_1$  et  $P_2$  sont conjuguées au voisinage de  $p_1$  et  $p_2$  par un difféomorphisme local qui transforme  $p_1$  en  $p_2$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $\Sigma$  est assez petite, alors  $\phi_t(p_0) \notin \overline{\Sigma} \setminus \Sigma$  pour tout  $0 \leq t < T$  car l'orbite de  $p_0$  est compacte. Par le Lemme 2.16, on en déduit que  $P_\Sigma$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Quant à l'unicité, on a  $P_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$  définie par  $P_1(p) = \phi_{\tau_1(p)}(p)$  et  $P_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  définie par  $P_2(p) = \phi_{\tau_2(p)}(p)$ .

Il existe  $t_p > 0$  tel que  $\phi_{t_p}(p_1) = p_2$ . Par suite, le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'une unique application  $\tau$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\tau(p_1) = t_p$ , pour tout  $p \in \Sigma_1$  assez proche de  $p_1$ , on ait  $H(p) = \phi_{\tau(p)}(p) \in \Sigma_2$ , et telle que  $H(p_1) = p_2$ . De plus,  $H$  est inversible.

Posons  $Q : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  définie par  $Q(p) = H \circ P_1 \circ H^{-1}(p)$ . Cette application est bien de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $Q(p_2) = p_2$ , et  $Q(p) = \phi_{\hat{\tau}(p)}(p)$ , où

$$\hat{\tau}(p) = \tau(P_1 \circ H^{-1}(p)) + \tau_1(H^{-1}(p)) - \tau(H^{-1}(p)).$$

Or  $\hat{\tau}$  est différentiable, et pour  $p = p_2$ , on obtient  $\tau(p_1) + \tau_1(p_1) - \tau(p_1) = T = \tau_2(p_2)$ . Donc l'unicité du Théorème des fonctions implicites montre que l'on a égalité, et donc que  $Q = P_2$ . ■

**Corollaire 2.18 (Nature d'une orbite périodique).** *Soit  $p_0$  ayant une orbite  $T$ -périodique  $\gamma$ , et soit  $P_\Sigma$  une application de Poincaré définie sur une section transverse. Alors*

- (i) *la classe de similitude de  $D_{p_0}P_\Sigma$  est une donnée intrinsèque,*
- (ii) *la stabilité de  $\gamma$  est déterminée par la dynamique de  $P_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . En particulier, si  $|D_{p_0}P_\Sigma| < 1$ , alors l'orbite périodique est asymptotiquement stable.*

En fait, on peut même évaluer  $D_{p_0}P_\Sigma$  en dimension 2. D'abord,  $P'(p_0)$  ne dépend pas du point choisi d'après ci-dessus. Ensuite, on a

**Lemme 2.19** *Soit  $X$  un champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{R}^2$  tel que  $p_0$  ait une orbite  $T$ -périodique. Notons  $\Sigma$  une section transverse en  $p_0$  et  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  l'application de premier retour associée. On a*

$$P'(p_0) = \exp \int_0^T (\nabla \cdot X)(\phi_t(p_0)) dt.$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.18. Soient  $p_1, p_2$  deux points de l'orbite,  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux sections transverses en ces points, et  $P_1, P_2$  les applications de premier retour. On considère deux cartes  $\varphi_1, \varphi_2$  telles que  $\varphi_i(0) = p_i$  pour  $i = 1, 2$ . On note  $Q_i = \varphi_i^{-1} \circ P_i \circ \varphi_i$ . Alors  $Q_i(0) = 0$  et il existe un difféomorphisme  $H$  tel que  $Q_1 \circ H = H \circ Q_2$ . On dérive, et on trouve :

$$D_0Q_1 \cdot D_0H = D_0H \cdot D_0Q_2.$$

Par suite, on a même décomposition de Jordan.

En effet, si l'orbite d'un point  $q$  est attirée par  $\gamma$ , alors elle doit rentrer dans une boîte à flot de  $p_0$ . Dire qu'elle est attirée signifie justement que  $|P_\Sigma^n(q) - p_0| \rightarrow 0$ .

Supposons que  $D_{p_0}P$  est un puits hyperbolique. Alors il existe un voisinage  $V \subset \Sigma$  de  $p_0$  tel que  $|D_pP| < 1$  pour tout  $p \in V$ . On en déduit grâce au Théorème du point fixe que  $P_\Sigma^n(p) \rightarrow p_0$  pour tout  $p \in V$ . On a, par définition, l'existence d'une suite  $t_n \rightarrow \infty$  telle que  $\phi_{t_n}(p) \rightarrow p_0$ . De plus, au voisinage de  $p_0$ , on a  $\tau(p) < T + \varepsilon$ , donc  $t_{n+1} - t_n$  est une suite bornée. Du coup, Pour tout  $t > 0$  assez grand, il existe  $n$  tel que  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Donc

$$|\phi_t(p) - \phi_t(p_0)| = |\phi_{t-t_n} \circ P^n(p) - \phi_{t-t_n} \circ P^n(p_0)| \leq \sup |D_q\phi_s| \cdot |P^n(p) - p_0|,$$

où le sup est pris sur les points  $q$  d'un voisinage compact de  $p_0$  et sur les  $s \in [0, T]$ . ■

En fait, on peut même évaluer  $D_{p_0}P$  en fonction de  $D_{p_0}\phi_T$ . Comme  $\phi_{T+t}(p_0) = \phi_t(p_0)$ , on a

$$X(p_0) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(p_0) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \phi_T \circ \phi_t(p_0) \right|_{t=0} = D_{p_0}\phi_T \cdot X(p_0).$$

Par suite,  $X(p_0)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de  $D_{p_0}\phi_T$ .

En faisant un changement de coordonnées affine, on se ramène au cas où  $p_0 = 0$ ,  $X(0) = (1, 0)$  et  $\Sigma$  est l'hyperplan orthogonal à  $X(0)$ . Or  $P(p) = \phi_{\tau(p)}(p)$ , donc

$$D_0P = D_0\phi_T|_\Sigma + X(0) \cdot D_0\tau|_\Sigma.$$

Le terme de droite est nul, donc  $D_0P$  correspond à la restriction de  $D_0\phi_T$  à l'espace  $\Sigma$ .

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.19. D'après ce qui précède, on a  $P'(p_0) = \det D_{p_0}\phi_T$ . Or, pour tout  $t, h$ , on a

$$\det D_{p_0}\phi_{t+h} = \det D_{p_0}(\phi_t \circ \phi_h) = \det D_{p_0}\phi_t \cdot \det D_{\phi_t(p_0)}\phi_h.$$

Donc

$$\det D_{\phi_t(p_0)}\phi_h = \det (I + D_{\phi_t(p_0)}X(h)D_{\phi_t(p_0)}\phi_0 + o(h)) = 1 + (\nabla \cdot X)(\phi_t(p_0)) \cdot h + o(h).$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \det D_{p_0}\phi_t = (\nabla \cdot X)(\phi_t(p_0)) \cdot \det D_{p_0}\phi_t.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire que l'on sait intégrer. Du coup,

$$\det D_{p_0}\phi_T = \det D_{p_0}\phi_0 \cdot \exp \left( \int_0^T (\nabla \cdot X)(\phi_s(p_0)) ds \right).$$

et

$$P'(p_0) = \exp \left( \int_0^T \nabla \cdot X(\phi_s(p_0)) ds \right).$$

■

**Remarque.** La démonstration de ce lemme nous montre que si  $\nabla \cdot X = 0$ , alors le jacobien de  $\phi_t$  est constant, donc égale à 1 car  $\phi_0$  est l'identité. En ce cas, la mesure de Lebesgue est invariante sous l'action du flot *i.e.*, pour tout ensemble mesurable  $A$ , on a  $|\phi_t(A)| = |A|$ , où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue.



**Exercice 30** On suppose que  $0$  est un foyer attractif hyperbolique d'un champ de vecteurs  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $\Sigma = \{(x, 0), x > 0\}$  et  $\phi_t$  le flot de  $X$ .

1. On note  $A = D_0X$  que l'on suppose diagonale. Montrer que l'application de premier retour  $P_A : \Sigma \rightarrow \Sigma$  est bien définie et déterminer-la.
2. Montrer que l'application de premier retour  $P_X : \Sigma \rightarrow \Sigma$  est bien définie sur un intervalle  $]0, x_0[$ , et que  $P_X(x) < x$ .
3. Déterminer  $\lim_0 P'_X$  et  $\lim_0 \tau_X$ .
4. On note  $\gamma_0 : [P_A(x_0), x_0] \rightarrow [P_X(x_0), x_0]$  l'application définie par

$$\gamma_0(x)P_{x_0} \cdot \frac{x - x_0}{P_A(x_0) - x_0} + x_0 \frac{P_A(x_0) - x}{P_A(x_0) - x_0}.$$

Montrer qu'il existe un homéomorphisme  $\gamma : ]0, x_0[ \rightarrow ]0, x_0[$  tel que  $\gamma \circ P_A = P_X \circ \gamma$  et  $\gamma = \gamma_0$  sur  $[P_A(x_0), x_0]$ . En déduire l'existence d'un homéomorphisme  $H$  défini au voisinage de l'origine qui conjugue le flot de  $A$  à celui de  $X$ .

**Exercice 31** On suppose que  $0$  est un centre d'un champ de vecteurs  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Montrer que  $D_0X$  a ses valeurs propres imaginaires pures.
2. Adapter l'exercice précédent à cette situation.

**Exercice 32** On suppose que  $0$  est un point selle hyperbolique d'un champ de vecteurs  $X$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose aussi que  $A = D_0X$  est diagonale. En utilisant l'holonomie entre des segments parallèles aux axes et les premières bissectrices, montrer qu'il existe un homéomorphisme  $H$  défini au voisinage de l'origine qui conjugue le flot de  $A$  à celui de  $X$ .

**Théorie de Poincaré-Bendixson.** C'est une théorie particulière aux champs autonomes de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, dans ce cas, nous avons à disposition le théorème de Jordan sur les courbes fermées simples, et la relation d'ordre sur les sections transverses qui ne sont que des courbes. Cette conjonction permet d'étudier les ensembles  $\omega$ -limites de trajectoires qui restent dans un compact.

**Lemme 2.20** Soit  $\Sigma$  une section transverse munie d'une application de premier retour  $P$ , alors, si  $p \in \Sigma$ , la courbe de Jordan définie par  $\gamma = [p, P(p)] \cup \{\phi_t(p), 0 \leq t \leq \tau(p)\}$ , où  $[p, P(p)] \subset \Sigma$ , est une barrière. Par suite, la fermeture de la composante bornée est invariante pour  $\phi_t$  en temps positif ou en temps négatif. Par conséquent

- (i) Une orbite périodique ne coupe  $\Sigma$  qu'au plus une fois.
- (ii)  $P$  est croissante pour une orientation fixée sur  $\Sigma$ .
- (iii) Si  $(P^k(p))_{0 \leq k \leq n}$  sont bien définies, alors il existe une orientation sur  $\Sigma$  tel que  $P^k(p) < P^{k+1}(p)$ .

**DÉMONSTRATION.** Le théorème de Jordan affirme que le complémentaire de  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^2$  consiste en deux composantes connexes simplement connexes. De plus,  $\gamma$  est une barrière car cette

courbe est composée d'un morceau d'orbite et d'une section transverse. Sur  $\Sigma$ , le flot pointe ou bien vers la composante bornée, ou bien vers la composante non bornée. Quitte à renverser le temps, on suppose qu'il pointe vers l'intérieur. En ce cas, une orbite de l'intérieur ne peut sortir par le Corollaire 2.9.

(i) On suppose que  $p \in \Sigma$  est une orbite périodique et que  $P(p) \neq p$ . On associe  $\gamma$  comme ci-dessus. Une boîte à flot centrée en  $P(p)$  montre que  $\phi_t(P(p))$  est dans la composante bornée de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  pour  $t > 0$  assez petit. Donc l'orbite ne peut se refermer.

(ii) Soient  $p_1, p_2 \in \Sigma$ . On définit  $\gamma_1$  la courbe constituée de  $\phi_t(p_1)$  pour  $0 \leq t \leq \tau(p_1)$  et le segment de  $\Sigma$  qui relie  $p_1$  à  $P(p_1)$ . Cela implique qu'un bout de  $\Sigma$  est à l'intérieur et l'autre bout est à l'extérieur. On a donc une orientation induite sur  $\Sigma$  par l'intérieur, le milieu et l'extérieur.

Supposons que le domaine borné par  $\gamma_1$  soit invariant. Alors  $P(p_1)$  est plus à l'intérieur que  $p_1$ . Si  $p_2$  est à l'intérieur ou sur le bord, alors  $P(p_2)$  est à l'intérieur, donc cela ne change pas l'ordre des points. S'il est à l'extérieur, ou bien il y reste, donc sa position relative ne change pas, ou bien il appartient au segment du milieu, mais il est encore plus à l'extérieur que  $P(p_1)$ .

Si le domaine borné n'est pas invariant, on renverse le temps et l'application de premier retour : le cas précédent s'applique.

(iii) C'est une conséquence de (ii). ■

**Corollaire 2.21** *Soient  $p \in \mathbb{R}^2$  et  $q$  un point de  $\omega(p)$ , et supposons que  $q$  soit régulier. L'application de premier retour est bien définie sur une section transverse en  $q$ . De plus, il ne peut y avoir deux points distincts  $q_1, q_2$  d'un ensemble limite  $\omega(p)$  sur une même section.*

**DÉMONSTRATION.** On considère une boîte à flot  $V$  au voisinage de  $q$  donnée par le Lemme 2.6. Il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\phi_{t_0}(p) \in V$ . Donc il existe  $t_1$  tel que  $\phi_{t_1}(p) \in \Sigma$ . Ensuite, il existe  $t_2 > t_1$  tel que, après être sorti de la boîte, le point  $p$  revienne vers  $q$ . Si on choisit bien  $t_2$ , on aura  $\phi_{t_2}(p) = P(\phi_{t_1}(p))$ . La monotonie de  $P$  implique que  $\phi_{t_n}(p)$  est du même côté de  $y_0$  dans  $\Sigma$ . Donc l'application de premier retour est bien définie sur  $[\phi_{t_1}(p), y[ \subset \Sigma$ .

Si on avait deux points de  $\omega(p)$  sur la section, on contredirait la monotonie de  $P$ . ■

**Théorème 2.22 de Poincaré-Bendixson.** *Un ensemble limite  $\omega(p)$  non vide et compact qui ne contient pas de point d'équilibre est une orbite périodique.*

**DÉMONSTRATION.** On exhibe d'abord une orbite périodique, puis on montre que c'est la seule.

Soit  $q \in \omega(p)$ . Comme  $\omega(p)$  est compact et que  $\omega(q) \subset \omega(p)$ , on en déduit que  $\omega(q)$  est compact et n'a pas de point d'équilibre. Soit alors  $q' \in \omega(q)$ . On considère une section transverse en  $q'$ . Par suite, l'orbite de  $q$  coupe une infinité de fois  $\Sigma$ , ce qui implique, d'après le Corollaire 2.21, que  $q$  est périodique.

Si l'orbite de  $q$  n'est pas tout  $\omega(p)$ , son complémentaire, qui serait un ouvert non vide ne pourrait pas être fermé par connexité de  $\omega(p)$ . Donc il existe un point d'accumulation dans l'orbite de  $q$  du complémentaire de  $\omega(q)$  dans  $\omega(p)$ . Si on prend une section transverse en ce

point, on aurait donc un point du complémentaire de  $\omega(q)$  dans  $\omega(p)$  sur cette section. Le Corollaire 2.21 permet encore de conclure. ■

**Corollaire 2.23** *L'ensemble  $\omega$ -limite borné d'un point d'un champ ayant ses points d'équilibre isolés de  $\mathbb{R}^2$  est :*

- (i) *un point d'équilibre, ou*
- (ii) *une orbite périodique, ou*
- (iv) *une réunion de points d'équilibre et de séparatrices qui forment une courbe de Jordan.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons qu'il existe  $q \in \omega(p)$  régulier. Alors la démonstration du Théorème de Poincaré-Bendixson montre que si  $q$  n'est pas périodique, alors  $\omega(q)$  ne contient que des points d'équilibre. Donc  $\omega(q)$  est un point d'équilibre. De plus, on a  $\alpha(q) \subset \omega(p)$ , donc le même raisonnement montre que  $\alpha(q)$  est un point d'équilibre. ■

**Résumé.** On se place dans le plan des portraits de phases i.e., le plan des couples  $(x, y)$ . Les étapes principales d'études sont les suivantes.

1. On trace les isoclines  $\{x' = 0\}$  et  $\{y' = 0\}$ . Sur chacune d'elle on trace le champ de vecteur (direction et sens).
2. On en déduit les points d'équilibres et l'allure du champ de vecteurs dans le reste du plan.
3. On étudie la nature des points d'équilibre.
4. On cherche aussi des séparatrices i.e., des réunions finies d'orbites et de points d'équilibre qui découpent le plan.
5. A l'aide des séparatrices et des barrières, on met en évidence des ensembles invariants.
6. On met en évidence les solutions périodiques ...

**Exercice 33 (Equation de Van der Pol).** *On considère*

$$\begin{cases} x' = y - (x - x^3), \\ y' = -x \end{cases}$$

*Ce système est une forme de l'équation de Lienard (voir [6] §10.3 et [10] §3.8 et Exercice 34 ci-après).*

1. *On pose  $W(x, y) = (1/2) \cdot (x^2 + y^2)$ . Calculer la dérivée en fonction du temps de  $W$  pris le long d'une orbite.*
2. *Tracer les isoclines parallèles aux axes.*
3. *Déterminer les points d'équilibre et leur nature.*
4. *Etudier les symétries du système.*

5. Montrer que l'on peut définir des holonomies entre les isoclines. On pourra s'aider de la symétrie et de la droite d'équations  $x = 1$ . On notera  $H_v : \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-$  l'holonomie entre  $\Sigma_+ = \{(0, y), y > 0\}$  et  $\Sigma_- = \{(0, y), y < 0\}$  et  $H_h : \Sigma_+ \rightarrow \Sigma_0$  l'holonomie entre  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_0 = \{(x, 0), x > 0\}$ . En déduire l'existence d'une application de premier retour  $P$  sur  $\Sigma_+$ .
6. Etant donné un point  $p \in \Sigma_+$ , on considère  $\phi(p) = W(H_v(p)) - W(p)$ . Montrer que  $p \in \Sigma_+$  appartient à une orbite périodique si et seulement si  $\phi(p) = 0$ .
7. Montrer que si  $H_0(p) \leq 1$ , alors  $\phi(p) > 0$ .
8. Montrer que  $y \in [H_h^{-1}(1), +\infty[ \mapsto \phi(y) \in ]-\infty, \phi(H_h^{-1}(1))]$  est décroissante. En déduire qu'il existe exactement une seule orbite périodique, et que cette orbite attire tous les points (non nuls).

**Exercice 34 (Equation de Lienard).** On considère

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x), \end{cases}$$

où  $F, g$  sont des fonctions impaires de classe  $C^1$  telles que  $xg(x) > 0$  pour  $x \neq 0$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) < 0$ ,  $F$  a une unique racine positive  $a$ , et  $F$  croît à l'infini pour  $x \geq a$ .

1. Représenter l'allure des isoclines et du champ de vecteurs.
2. On pose  $W(x, y) = (1/2) \cdot (G(x) + y^2)$ , où  $G$  est la primitive de  $g$  telle que  $G(0) = 0$ . Calculer la dérivée en fonction du temps de  $W$  pris le long d'une orbite.
3. En s'inspirant de l'Exercice 33, montrer qu'il existe une seule orbite périodique stable.

**Le seizième problème de Hilbert.** Pour conclure, rappelons que Hilbert a dressé une liste de 23 problèmes de mathématiques au début du XX<sup>e</sup> siècle. L'un d'eux concerne les champs de vecteurs du plan. Il s'agit de déterminer quel est le nombre maximal de cycle limite d'un champ de vecteurs polynomial en fonction de son degré. En 1923, H. Dulac a énoncé que ces nombres étaient toujours finis (une erreur dans sa preuve a été récemment trouvée et comblée). Cependant, même pour les polynômes quadratiques, ce nombre n'est toujours pas connu. La conjecture actuelle affirme qu'il ne peut y en avoir plus de 4. Ce problème a inspiré de nombreux travaux, et en inspire encore...

## A Théorème de Cauchy-Peano

On montre que si on suppose  $X$  seulement continue, alors on a l'existence de solutions locales (sans unicité).

**Théorème A.1** Soit  $X$  un champ de vecteur continue défini sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $x_0$ , il existe une solution locale de  $x' = X(x)$  tel que  $x(0) = x_0$ .

DÉMONSTRATION. La démonstration traditionnelle utilise l'existence de solutions approchées obtenues par la méthode d'Euler. La démonstration que nous proposons repose sur la même méthode, excepté que nous utiliserons le Théorème de Cauchy-Lipschitz pour des approximations de  $X$ .

On considère une approximation de l'identité à support compact  $\varphi_\varepsilon$ , ainsi qu'une fonction teste radiale et plateau  $\chi$  qui vaut 1 au voisinage de  $x_0$ . On définit  $X_\varepsilon = (X * \varphi_\varepsilon) \cdot \chi$ . On a  $X_\varepsilon \rightarrow X$  uniformément sur  $\{\chi = 1\}$ .

Les champs  $X_\varepsilon$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence et l'unicité d'une solution  $u_\varepsilon$  telle que  $u'_\varepsilon = X_\varepsilon(u_\varepsilon)$  et  $u_\varepsilon(0) = x_0$ . En fait, ces solutions sont même définies sur tout  $\mathbb{R}$  par le Théorème de l'explosion (toute solution avec une condition initiale en dehors du support de  $\chi$  est constante). Notre objectif est de montrer que l'on peut passer à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour cela, nous allons utiliser le théorème d'Ascoli. En fait, comme le support de  $X_\varepsilon$  est un compact indépendant de  $\varepsilon$ , on a  $|u'_\varepsilon| \leq C$  uniformément. Donc, on a bien l'équicontinuité de la famille  $u_\varepsilon$ . On extrait une suite convergente  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . A la limite, on obtient une application  $u$ . Pour montrer que  $u$  vérifie l'équation différentielle on considère l'équation intégrale associée. Tant que l'on intègre sur un compact  $[0, t]$ , on n'a pas de problèmes d'interversion des limites. ■

## B Théorème de Frobenius

Le but de cet appendice est de généraliser la notion d'équation différentielle en dimension supérieure. On se donne donc un champ de plans *e.g.* sur  $\mathbb{R}^3$  i.e., une application  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  de la forme  $\mathcal{P}(p) = (p, X(p), Y(p))$ , et on cherche à savoir s'il existe des surfaces  $S \subset \mathbb{R}^3$  dont le plan tangent en tout point  $p$  est engendré par  $(X(p), Y(p))$ . Le Théorème de Frobenius répond à cette question. Les applications  $X$  et  $Y$  sont donc des champs de vecteurs autonomes. Dans la suite, on supposera qu'ils sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Afin d'énoncer ce résultat, nous devons d'abord introduire quelques outils.

Un champ de vecteurs autonome  $X$  agit sur les fonctions comme un dérivation. Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on définit  $X \cdot f$  par  $X \cdot f(p) = D_p f(X(p))$ , i.e., la dérivée partielle de  $f$  en  $p$  dans la direction  $X(p)$ . Il s'agit d'une dérivation au sens que  $X \cdot (fg) = f(X \cdot g) + g(X \cdot f)$ .

Cette action permet de définir un produit interne et plus précisément d'étudier les propriétés de commutation de champs de vecteurs. Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs autonomes de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on définit leur crochet de Lie  $[X, Y]$  en considérant leur action sur les fonctions : si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on pose

$$[X, Y](f) = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Le théorème de Schwarz permet de montrer que  $[X, Y]$  définit bien un champ de vecteurs (il suffit de calculer  $[X, Y](f)$  lorsque  $X$  et  $Y$  sont donnés par des coordonnées). C'est une forme bilinéaire alternée.

**Théorème B.1 de Frobenius (dans  $\mathbb{R}^3$ ).** *Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs autonomes de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose que pour tout  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $X(p)$  et  $Y(p)$  sont indépendants. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a)  $[X, Y] \in X \oplus Y$ .

(b) Pour tout  $p \in \mathbb{R}^3$ , il existe une surface (locale)  $S$  qui contient  $p$  telle que, pour tout  $q \in S$ ,  $T_q S = X(q) \oplus Y(q)$ .

L'implication (b)  $\Rightarrow$  (a) est facile. En revanche, la réciproque demande plus de travail : on montre d'abord que l'on peut se ramener au cas où  $[X, Y] = 0$ ; cette condition est montrée équivalente à ce que les flots de  $X$  et  $Y$  commutent ; ceci permet de définir une immersion qui répondra à la question.

**Lemme B.2** Si  $S$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  telle que pour tout  $q \in S$ ,  $T_q S = X(q) \oplus Y(q)$ , alors  $[X, Y] \in X \oplus Y$ .

DÉMONSTRATION. Localement,  $S$  est définie par une immersion  $\iota : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Par hypothèses, on a  $X, Y \in \text{Im } D\iota$ . Comme le crochet de Lie est alterné, on obtient

$$[X, Y] = a \cdot D\iota \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot D\iota \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \left[ D\iota \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D\iota \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Le dernier terme est nul par le théorème de Schwarz. ■

Attaquons-nous maintenant à la réciproque.

**Lemme B.3** Si  $[X, Y] \in X \oplus Y$  alors, pour tout  $p$ , il existe un voisinage  $V(p)$  et deux champs de vecteurs indépendants  $S$  et  $T$  de classe  $C^\infty$  définis sur  $V$  tels que  $S, T \in X \oplus Y$  et  $[S, T] = 0$  sur  $V$ .

DÉMONSTRATION. Si  $\alpha, \beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions, on calcule

$$[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta[X, Y] - \beta(Y \cdot \alpha)X + \alpha(X \cdot \beta)Y,$$

donc

$$[\alpha X, \beta Y] = \beta(\alpha - (Y \cdot \alpha))X + \alpha(\beta + (X \cdot \beta))Y.$$

Cette quantité est nulle si  $\alpha - Y \cdot \alpha = 0$  et si  $\beta + (X \cdot \beta) = 0$ . Or, comme  $X$  et  $Y$  sont indépendants,  $p$  est une valeur régulière, donc il existe un voisinage de  $p$ , un difféomorphisme local  $\chi$  de  $\mathbb{R}^3$  qui conjugue  $Y$  à  ${}^t(1, 0, 0)$ . Dans ces coordonnées, l'équation devient

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha.$$

Une solution est donc  $\alpha(x, y, z) = \exp x$ . Par suite,  $\alpha \circ \chi$  est l'application recherchée. On procède de même avec  $X$ .

On pose alors  $S = \alpha X$  et  $T = \beta Y$ . ■

Dans la suite, on suppose que  $[X, Y] = 0$  sur un voisinage  $V$  d'un point  $p$ . On note  $(\phi_t)$  et  $(\psi_t)$  les flots de  $X$  et  $Y$  respectivement.

Le Théorème sera une conséquence de la proposition suivante :

**Proposition B.4**

$$[X, Y] = 0 \iff \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t.$$

On relie d'abord le crochet de Lie aux flots :

**Lemme B.5** *Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$ , alors*

$$[X, Y] \cdot f = \lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \cdot ((Y - D\phi_t(Y)) \cdot f) \circ \phi_t.$$

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que

$$X \cdot f = Df(X) = Df \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} f \circ \phi_t \Big|_{t=0}.$$

Donc

$$\begin{aligned} [X, Y] \cdot f &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (f \circ \psi_s \circ \phi_t - f \circ \phi_t \circ \psi_s) \Big|_{s,t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} ((Y \cdot f) \circ \phi_t - (D\phi_t(Y) \cdot f) \circ \phi_t) \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \cdot [(Y - D\phi_t(Y)) \cdot f] \circ \phi_t. \end{aligned}$$

■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION B.4. Le Lemme B.5 implique que

$$\begin{aligned} [X, Y] \cdot (f \circ \phi_{t_0}) &= \lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \cdot [(Y - D\phi_t(Y)) \cdot (f \circ \phi_{t_0})] \circ \phi_t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \cdot [(D\phi_{t_0}(Y) - D\phi_{t+t_0}(Y)) \cdot f] \circ \phi_t \\ &= \frac{\partial}{\partial t} D\phi_t(Y) \Big|_{t=t_0} \cdot f. \end{aligned}$$

Par suite,  $[X, Y] = 0$  est équivalent à  $D\phi_t(Y) = D\phi_0(Y) = Y$ . Or  $D\phi_t(Y)$  correspond au transport du champ  $Y$  par le difféomorphisme  $\phi_t$ . Donc, ceci équivaut à

$$\psi_s = \phi_t \circ \psi_s \circ \phi_t^{-1}.$$

■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.1. Le Lemme B.2 montre que (b) implique (a).

Réciproquement, on se ramène au cas  $[X, Y] = 0$  sur un voisinage de  $p$  par le Lemme B.3. Par la Proposition B.4, les flots de  $X$  et  $Y$  commutent. Donc, on définit, pour un voisinage  $U$  de  $0 \in \mathbb{R}^2$  l'application

$$\begin{aligned} \iota : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) &\mapsto \phi_t \circ \psi_s(p) \end{aligned}$$

Pour tout couple  $(t, s)$ , on a

$$\frac{\partial \iota}{\partial t}(s, t) = X(\phi_t \circ \psi_s(p)).$$

Comme les flots commutent, on obtient aussi

$$\frac{\partial \iota}{\partial s}(s, t) = Y(\psi_t \circ \phi_s(p)).$$

Donc  $\iota$  est une immersion, et l'espace tangent de la surface  $S = \iota(U)$  est engendré par  $(X, Y)$ . ■

**Notes bibliographiques.** La démonstration du Théorème de Cauchy-Lipschitz et du Théorème de l'explosion sont issues d'un polycopié de C. Goulaouic et Y. Meyer. L'essentiel du cours sur la dimension 1 est basée sur [7], ainsi que les exercices proposés. Le paragraphe sur les équations classiques est tiré de notes de cours de B. Coupet. La démonstration la dépendance  $\mathcal{C}^r$  du flot m'a été présentée par B. Coupet, et est due à ????. L'étude en dimension supérieure est un savant dosage entre [6, 8, 10]. L'ouvrage [10] ne produit pas toujours les démonstrations, mais se reporte sur [5, 6] notamment. Notons aussi que la démonstration du Théorème de Poincaré-Bendixson est basée sur un article de S. Cantat sur ce sujet. Outre ces références, j'ai bénéficié pour la rédaction de ces notes de polycopiés de T. Gallouët et F. Hubert, J-M Ghidaglia, et de J. Lelong-Ferrant. Le paragraphe §7.4 de l'ouvrage [3] de J.P. Demailly a servi pour l'exercice 19; on peut bien sûr s'y référer pour des compléments. Les ouvrages [1, 2, 4, 9, 11] n'ont pas été utilisés, mais sont aussi conseillés.

Les figures ont été emprunées de [7].

## References

- [1] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires. Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes, flots, systèmes linéaires, stabilités des positions d'équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés*, Traduit du russe par Djilali Embarek. Editions Mir, Moscou, 1974.
- [2] V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Traduit du russe par Djilali Embarek. Djilali Embarek. "Mir", Moscou, 1980.
- [3] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Manuel pour le Second Cycle de Mathématiques, Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [4] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1964.
- [6] M. Hirsch & S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 60. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.
- [7] J.H. Hubbard & B. West, *Differential equations: a dynamical systems approach. Part I. Ordinary differential equations*, Texts in Applied Mathematics, 5, Springer-Verlag, New York, 1991.



- [8] J.H. Hubbard & B. West, *Differential equations: a dynamical systems approach. Higher-dimensional systems*, Texts in Applied Mathematics, 18 Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] J. Palis & W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, traduit du portugais par A. K. Manning. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [10] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition, Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [11] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, 56. Société Mathématique de France, Paris, 1978.