

ANALYSE SUR LE BORD DES GROUPES

par **Peter Haïssinsky**

Ce sont des notes de cours de Master 2 donné au premier semestre 2006.

Il est possible qu'elles contiennent des coquilles. Les références sont réduites, et peut-être pas toujours les plus appropriées. J'espère que l'on ne m'en tiendra pas rigueur.

Tout commentaire visant à l'amélioration du texte sera le bienvenu.

TABLE DES MATIÈRES

1. Rappels sur les espaces hyperboliques	1
1.1. Espaces hyperboliques et arbres	2
1.2. Quasi-isométries et lemmes de poursuite	5
BIBLIOGRAPHIE	6
2. Métriques visuelles	1
2.1. Uniformisation d'espaces métriques hyperboliques géodésiques	1
2.2. Cas des groupes	10
2.3. Applications quasisymétriques et variantes	13
BIBLIOGRAPHIE	17
3. Dynamique conforme à l'infini	1
3.1. Quelques propriétés	5
3.2. Espace d'espaces	11
3.3. Propriétés analytiques	19
BIBLIOGRAPHIE	25
4. Jauge d'un groupe hyperbolique	1
BIBLIOGRAPHIE	4

1. RAPPELS SUR LES ESPACES HYPERBOLIQUES

Notations. On notera parfois la métrique $d(x, y) = |x - y|$. Si a, b sont des réelles positifs, on notera $a \asymp b$ s'il existe une constante universelle $u \geq 1$ telle que $a/u \leq b \leq ua$ et $a \sim b$ s'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que $|a - b| \leq C$.

Une boule sera notée $B = B(x_B, r_B) = \{y, |x_B - y| < r_B\}$. On notera $\lambda B = B(x_B, \lambda r_B)$ où $\lambda > 0$.

Soit (X, d) un espace métrique géodésique propre (les boules fermées sont compactes).

Définitions. Si X, Y sont deux espaces métriques, une application $f : X \rightarrow Y$ est un *plongement isométrique* si pour tous $x, x' \in X$, $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$; on dira que f est une *isométrie* si f est un plongement isométrique surjectif.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow X$ un plongement isométrique. On dit que f , ou $f(I)$, est une *géodésique* si $I = \mathbb{R}$, un *rayon* (géodésique) si $I = \mathbb{R}_+$ et un *segment* (géodésique) si I est un intervalle compact.

Un segment géodésique d'extrémités x et y sera noté $[x, y]$, même s'il n'est pas unique.

Produit de Gromov. Soient $w, x, y \in X$. On note

$$(x|y)_w = (1/2)\{|x - w| + |y - w| - |x - y|\}.$$

Si $w' \in X$, alors $|(x|y)_{w'} - (x|y)_w| \leq |w - w'|$. De plus, si X est un arbre, il existe un unique $c \in [w, y] \cap [w, x] \cap [x, y]$ et $(x|y)_w = |w - c|$.

Définition. Un espace métrique est δ -hyperbolique si pour tous w, x, y, z , on a

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta.$$

Triangles. Un triangle Δ est la donnée de trois points x, y, z et de trois segments géodésiques $[x, y]$, $[x, z]$ et $[y, z]$.

A un triangle, on associe un tripode T défini par trois extrémités $\bar{x}, \bar{y}$, et $\bar{z}$ et de centre c , tels que $|\bar{x} - c| = (y|z)_x$, $|\bar{y} - c| = (x|z)_y$ et $|\bar{z} - c| = (y|x)_z$. On constate que $|\bar{x} - \bar{y}| = |x - y|$, et de même pour les autres distances. Ainsi, il existe une application surjective $f_\Delta : \Delta \rightarrow T$ qui est une isométrie lorsqu'elle est restreinte à un segment. On appelle $f_\Delta^{-1}(c)$ le triple inscrit de Δ .

On dit que Δ est un triangle δ -fin si pour tout $u, v \in \Delta$, on a $|u - v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$.

LEMME 1.1. — Si X est δ -hyperbolique, alors les triangles sont 4δ -fins et

$$(x|y)_w \leq d(w, [x, y]) \leq (x|y)_w + 4\delta.$$

THÉORÈME 1.2. — Soit X un espace géodésique.

- Si tous les triangles sont δ -fins alors X est 2δ -hyperbolique.
- Si X est δ -hyperbolique, alors, il vérifie la condition de Rips : dans tout triangle, la distance d'un point aux deux côtés opposés est plus petite que 4δ .

DÉMONSTRATION. Voir la Proposition 2.21 de [2].

1.1. Espaces hyperboliques et arbres

DÉFINITION 1.3. — Un arbre métrique est un arbre simplicial muni d'une distance de longueur. Un arbre réel est un espace métrique uniquement géodésique tel que si γ et γ' sont deux segments géodésiques tels que $\gamma \cap \gamma'$ est un singleton, alors $\gamma \cup \gamma'$ est un segment géodésique.

On rappelle qu'un espace 0-hyperbolique se plonge isométriquement dans un arbre réel.

Arbres approximatifs. Soient (X, w) un espace δ -hyperbolique et $k \geq 0$.

- (i) Si $|X| \leq 2^k + 2$, alors il existe un arbre métrique pointé fini T et $\phi : X \rightarrow T$ tels que :
- $\forall x \in X, |\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|,$
 - $\forall x, y \in X, |x - y| - 2k\delta \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|.$
- (ii) S'il existe des sous-rayons $(X_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $n \leq 2^k$ tel que $X = \cup X_i$, alors, en notant $c = \max\{|w - w_i|\}$, il existe un arbre réel pointé T et $\phi : X \rightarrow T$ tels que
- $\forall x \in X, |\phi(x) - \phi(w)| = |x - w|,$
 - $\forall x, y \in X, |x - y| - 2(k + 1)\delta - 4c \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|.$

Ce résultat permet d'exploiter simplement l'hyperbolicité de X comme nous le verrons par la suite. Sa démonstration requiert l'établissement de trois résultats intermédiaires.

LEMME 1.4. — Soit X un espace δ -hyperbolique. On note

- $(x|y)' = \sup \min\{(x_{i-1}|x_i), 2 \leq i \leq L\}$, où le supremum est pris sur toutes chaînes finies $x_1, \dots, x_L$ avec $x_1 = x$ et $x_L = y$,
- $|x - y|' = |x - w| + |y - w| - 2(x|y)',$
- $x \sim y$ si $|x - y|' = 0.$

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence et $|\cdot|'$ est une distance sur $X/\sim$ qui en fait un espace 0-hyperbolique. De plus, pour tout $x \in X$, on a $|x - w|' = |x - w|$, et pour tous $x, y \in X$, $|x - y|' \leq |x - y|.$

DÉMONSTRATION. Montrons que $|x - z|' \leq |x - y|' + |y - z|'$. Soient $\varepsilon > 0$, $(x_1, \dots, x_L)$ et $(y_1, \dots, y_M)$ tels que $x_1 = x$, $x_L = y_1 = y$, $y_M = z$, et $\min\{(x_{i-1}|x_i)\} \geq (x|y)' - \varepsilon$ et $\min\{(y_{i-1}|y_i)\} \geq (y|z)' - \varepsilon$. Posons $z_i = x_i$ si $1 \leq i \leq L$ et $z_i = y_{i-L+1}$ si $L + 1 \leq i \leq L + M - 1$. Donc $(x|z)' \geq \min\{(z_{i-1}|z_i)\} \geq \min\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$.

De plus, $|y - w| \geq \max\{(y|z_{L-1}), (y|z_{L+1})\} \geq \max\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$, donc

$$(x|y)' + (y|z)' \leq (x|z)' + |y - w| + 2\varepsilon.$$

En utilisant la définition de $|\cdot|'$, on obtient l'inégalité triangulaire.

Par conséquent, $\sim$ est une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire implique la transitivité), et $|\cdot|'$ est une métrique sur $X/\sim$ qui en fait un espace 0-hyperbolique puisque $(x|z)' \geq \min\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (cf. ci-dessus).

D'autre part, pour tout $x \in X$, $(x|w) = 0$ ce qui implique $(x|w)' = 0$, donc

$$|x - w|' = |x - w| - 2(x|w)' = |x - w|.$$

De même, $(x|y)' \geq (x|y)$ donc $|x - y|' \leq |x - y|$. ■

LEMME 1.5. — Si $|X| \leq 2^k + 2$ alors pour toute chaîne $x_1, \dots, x_L \in X$, on a

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j)\} - k\delta.$$

DÉMONSTRATION. S'il existe j tel que $x_j = w$, alors $(x_1|x_L) \geq 0 = (x_{j-1}|x_j)$. On suppose donc que w ne figure pas dans la chaîne. De plus, si $L = 3$ et $k \geq 1$, cela découle de la définition de l'hyperbolicité. On suppose donc $4 \leq L$. On traite d'abord le cas de $L \leq 2^k + 1$ par récurrence sur k . Si $k = 0$, alors $|X| \leq 3$ et c'est bon car $L \leq 2$. Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $k-1$: on note $K = \lfloor L/2 \rfloor$, donc $2 \leq K \leq 2^{k-1} + 1$ et $L - K + 1 \leq L/2 \leq 2^{k-1} + 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$(x_1|x_K) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j), 2 \leq j \leq K\} - (k-1)\delta$$

et

$$(x_K|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j), K+1 \leq j \leq L\} - (k-1)\delta.$$

Or $(x_1|x_L) \geq \min\{(x_1|x_K), (x_K|x_L)\} - \delta$, donc

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j), 2 \leq j \leq L\} - k\delta.$$

On suppose toujours que $w \notin \{x_j\}_{1 \leq j \leq L}$. On dit que $(y_1, \dots, y_M)$ est une sous-chaîne de $\{x_j\}$ si pour tout i , il existe j tel que $y_i = x_j$ et $y_{i+1} = x_{j+1}$. Du coup, $\min\{(y_{j-1}|y_j)\} \geq \min\{(x_{j-1}|x_j)\}$.

Si $x_1, \dots, x_L$ est une chaîne avec $L \geq 2^k + 2$, alors il existe une sous-chaîne $(y_1, \dots, y_K)$ avec $K \leq 2^k + 1$: en effet, $L \geq 2^k + 2$ implique qu'il existe $p < q$ tels que $x_p = x_q$: $x_1, \dots, x_p, x_{q+1}, \dots, x_L$ est une sous-chaîne de longueur $< L$. Tant que la longueur est au moins $2^k + 2$, on peut la réduire. Il s'ensuit que l'on se ramène au cas précédent, qui permet de conclure. ■

LEMME 1.6. — Soit $X = \cup_{i=1}^n X_i$ avec (X_i, w_i) qui se plonge isométriquement dans $(\mathbb{R}_+, 0)$. Si $n \leq 2^k$ alors

$$(x_1|x_L) \geq \min_{2 \leq j \leq L} \{(x_{j-1}|x_j)\} - (k+1)\delta - 2c.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a $(x|y)_w \leq \min\{|x-w|, |y-w|\}$, et si $x, y \in X_i$ alors $(x|y)_{w_i} = \min\{|x-w_i|, |y-w_i|\}$, et $|x-w_i| \geq |x-w| - |w-w_i| \geq |x-w| - c$. De même, $|y-w_i| \geq |y-w| - c$. Par suite, $(x|y)_{w_i} \geq \min\{|x-w|, |y-w|\} - c$ et

$$(x|y)_w \geq (x|y)_{w_i} - c \geq \min\{|x-w|, |y-w|\} - 2c \geq \min\{(x|x')_w, (y|y')_w\} - 2c$$

pour tous $x', y' \in X$.

Soit $x_1, \dots, x_L \in X$ une chaîne. Ou bien, pour tout $j \geq 2$, $x_j \notin X(x_1)$, ou bien il existe $j > 1$ (maximal) tel que $x_j \in X(x_1)$. Du coup, $(x_1|x_j) \geq \min_{2 \leq i \leq j} \{(x_{i-1}|x_i)\} - 2c$ d'après ci-dessus. On considère alors $x_1, x_j, x_{j+1}, \dots, x_L$.

De proche en proche, on extrait une chaîne (x'_i) de longueur au plus $2n \leq 2^{k+1} + 1$ qui contient x_1 et x_L et telle qu'au plus deux termes sont dans un même X_i , et alors ils sont consécutifs. Il découle du Lemme 1.5 et de ci-dessus que

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x'_{i-1}|x'_i)\} - (k+1)\delta \geq \min\{(x_{i-1}|x_i)\} - (k+1)\delta - 2c.$$

■

DÉMONSTRATION DES ARBRES APPROXIMATIFS. Il suffit de trouver $\phi : X \rightarrow T$ avec T 0-hyperbolique. D'après le Lemme 1.4, on a $X/\sim$ 0-hyperbolique et $\phi : X \rightarrow X/\sim$ qui vérifie $|\phi(x) - \phi(w)|' = |x - w|$ et $|\phi(x) - \phi(y)|' \leq |x - y|$.

Dans le cas (i), le Lemme 1.5 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - k\delta$, soit

$$|\phi(x) - \phi(y)|' \geq |x - y| - 2k\delta.$$

Dans le cas (ii), le Lemme 1.6 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - (k+1)\delta - 2c$, soit

$$|\phi(x) - \phi(y)|' \geq |x - y| - 2(k+1)\delta - 4c.$$

■

Notation. — Dans la suite, si on approxime un ensemble F par un arbre, on notera $\bar{x}$ l'image de $x \in F$ dans l'arbre.

On cite deux corollaires qui découlent de l'approximation par les arbres.

COROLLAIRE 1.7. — S'il existe $\delta > 0$ et $w \in X$ tels que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

alors X est 6δ -hyperbolique.

COROLLAIRE 1.8. — Il existe deux constantes $C_1 = C_1(\delta)$ et $C_2 = C_2(\delta)$ telles que si x, y, z, w sont quatre points deux à deux distincts tels que $d([x, y], [z, w]) \geq C_1(\delta)$, alors

$$\max\{d([x, z], [y, w]), d([x, w], [y, z])\} \leq C_2(\delta).$$

DÉMONSTRATION. On considère l'arbre associé à ces quatre points. Si $d([x, y], [z, w])$ est assez grand, alors l'arbre ressemble à des poteaux de rugby.

■

1.2. Quasi-isométries et lemmes de poursuite

DÉFINITION 1.9 (quasi-isométries). — Soient X, Y deux espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un plongement (λ, c) -quasi-isométrique si pour tout $x, x' \in X$, on a

$$\frac{1}{\lambda}|x - x'| - c \leq |f(x) - f(x')| \leq \lambda|x - x'| + c.$$

On dit tout simplement que f est une (λ, c) -quasi-isométrie s'il existe g telle que $|f \circ g(x) - x| \leq C$

PROPOSITION 1.10. — Soit G un groupe de type fini. Si X et X' sont deux graphes de Cayley associés à deux systèmes de générateurs finis, alors X et X' sont quasi-isométriques.

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{S} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ et $\mathcal{S}' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m\}$ les systèmes de générateurs de X et X' . On note $\ell(\gamma_i)$ la longueur de γ_i exprimée dans $\mathcal{S}'$ et $\ell(\gamma'_i)$ la longueur de γ'_i exprimée dans $\mathcal{S}$. Soient $\ell = \max\{\ell(\gamma_i), \gamma_i \in \mathcal{S}\}$ et $\ell' = \max\{\ell(\gamma'_i), \gamma'_i \in \mathcal{S}'\}$.

On considère l'application $Id : X \rightarrow X'$. On a $d(g_1, g_2) = d(Id, g_2g_1^{-1})$, et $d'(g_1, g_2) = d'(Id, g_2g_1^{-1})$. Si $g_2g_1^{-1}$ est de longueur m dans X , alors $g_2g_1^{-1}$ sera de longueur au plus $\ell \cdot m$, et si $g_2g_1^{-1}$ est de longueur m' dans X' , alors $g_2g_1^{-1}$ sera de longueur au plus $\ell' \cdot m'$, donc Id est une $(\max\{\ell, \ell'\}, 0)$ -quasi-isométrie. ■

DÉFINITION 1.11. — On dit qu'un groupe de type fini est quasi-isométrique à un espace si celui-ci est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini.

Soit Γ un groupe d'isométries de X . On dit que l'action est proprement discontinue si, pour tout $x \in X$, et tout $r > 0$, $|\{\gamma \in \Gamma, B(x, r) \cap \gamma B(x, r) \neq \emptyset\}| < \infty$. On dit que l'action de Γ est cocompacte si X/Γ est compact. Enfin, on parle d'action géométrique si elle est à la fois proprement discontinue, cocompacte et par isométries.

Rappelons le résultat suivant :

LEMME 1.12. — [Svarc, Milnor] Si Γ agit géométriquement sur un espace géodésique X , alors Γ est de type fini et Γ est quasi-isométrique à X .

DÉMONSTRATION. Voir la Proposition 3.19 de [2].

DÉFINITION 1.13 (groupe hyperbolique). — *Un groupe Γ est hyperbolique s'il opère géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique.*

Quasigéodésiques. Une (λ, c) -quasigéodésique est un plongement quasi-isométrique de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On parle de quasigéodésique locale si l'inégalité n'est vraie que pour $|s - t| \leq L$.

THÉORÈME 1.14. —

- Si f, g sont deux rayons géodésiques tels que $d_H(f, g) < \infty$ alors il existe $t_0 \geq u \geq 0$ tels que $|f(t) - g(t - u)| \leq 16\delta$.
- Si f est un (λ, c) -quasirayon alors il existe un rayon r telle que $d_H(f, g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.
- Si f est une (λ, c) -quasigéodésique alors il existe une géodésique g telle que $d_H(f, g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.

DÉMONSTRATION. Voir le Théorème 5.11, le Théorème 5.25 et la Proposition 7.2 de [2]. ■

COROLLAIRE 1.15. — *Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une quasi-isométrie entre espaces métriques géodésiques propres.*

Alors X est hyperbolique si et seulement si Y l'est.

DÉMONSTRATION. Supposons que X est hyperbolique, et montrons que Y aussi. On utilise la caractérisation par la condition de Rips: soit Δ un triangle dans Y . Alors $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un "quasitriangle", dans l'ombre d'un réel triangle qui vérifie la condition de Rips. Du coup, un côté de $\varphi^{-1}(\Delta)$ est dans un voisinage des deux autres. Cette propriété se transporte bien par quasi-isométries. et on en déduit que Δ vérifie la condition de Rips aussi. ■

COROLLAIRE 1.16. — *Un groupe Γ est hyperbolique si et seulement si n'importe quel graphe de Cayley localement fini de Γ est hyperbolique.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire découle du corollaire ?? avec le Lemme 1.12. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Ghys and P. de la Harpe (éditeurs), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

2. MÉTRIQUES VISUELLES

2.1. Uniformisation d'espaces métriques hyperboliques géodésiques

Soit (X, w) un espace propre géodésique complet et δ -hyperbolique. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on a, dans le cadre des espaces hyperboliques l'analogue du modèle de la boule pour les espaces hyperboliques "standards" $\mathbb{H}^n$. On montrera que ce modèle est un espace métrique uniforme.

DÉFINITION 2.1 (espace uniforme). — *Un espace métrique non complet X connexe par arcs rectifiables est uniforme s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tous $x, y \in X$, il existe une courbe γ qui relie x à y telle que*

$$\begin{cases} \ell(\gamma) < A|x - y| \\ \forall z \in \gamma, d(z, \partial X) \geq A \min\{|z - x|, |z - y|\}, \end{cases}$$

où ∂X est le complémentaire de X dans son espace complété.

Intégration le long d'une courbe. Dans ce paragraphe, on définit l'intégration de fonctions le long de courbes rectifiables dans X

DÉFINITION 2.2 (courbe rectifiable). — *Soient $a < b$ deux réels (finis). On dit qu'une application $f : [a, b] \rightarrow X$ représente une courbe rectifiable si f est de variation bornée (VB) i.e., s'il existe $M < \infty$ telle que $\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq M$ pour toute subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. On note $\ell(f, [a, b])$ le plus petit M , et on l'appelle la longueur de $f([a, b])$. On définit enfin la fonction croissante $s_f(t) = \sup \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$, où le supremum est pris sur les subdivisions de $[a, t]$.*

LEMME 2.3. — Si $f : [a, b] \rightarrow X$ est un chemin rectifiable, alors $s_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est absolument continue.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que s_f est continue en montrant la contraposée. Supposons par exemple que s_f n'est pas continue à gauche en $b' \in (a, b]$, i.e. on a $s(b') - \limsup_{t \rightarrow b'_-} s(t) = \delta > 0$. Comme f est continue, il existe $a' < b'$ telle que, si $a' < t < b'$ alors $|f(t) - f(b')| < \delta/3$.

Assertion. Si $c \in (a', b')$ alors il existe $d \in (c, b')$ tel que $\ell(f(c, d)) \geq \delta/3$.

En appliquant inductivement cette assertion, on construit une suite $t_0 = a' < t_1 < \dots < t_n < \dots < b'$ telle que $\ell(f(t_i, t_{i+1})) \geq \delta/3$, ce qui contredit la condition VB.

Montrons l'assertion. Comme $\ell(f(c, b')) = s_f(b') - s_f(c) > \delta$, il existe une subdivision $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de cet intervalle telle que $\sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \geq (2/3)\delta$. Or, $|f(t_{n-1}) - f(b')| < \delta/3$. Donc, en posant $d = t_{n-1}$, on obtient

$$\ell(f(c, d)) \geq \sum_{0 \leq i \leq n-2} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \geq \delta/3$$

ce qui prouve l'assertion. ■

Nous aurons recours aussi à la notion d'absolue continuité.

DÉFINITION 2.4. — Soient $a < b$ deux réels (finis). On dit qu'une application $f : [a, b] \rightarrow X$ est absolument continue (AC) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \dots < b_n \leq b$ tel que $\sum |b_i - a_i| < \delta$, on ait $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

PROPOSITION 2.5. — Soit $f : [a, b] \rightarrow X$ rectifiable, alors il existe un chemin AC $\gamma : [0, s_f(b)] \rightarrow X$ tel que $f = \gamma \circ s_f$.

DÉMONSTRATION. Comme s_f est continue et croissante, on en déduit que pour tout $x \in [0, s_f(b)]$, il existe $t \in [a, b]$ tel que $s_f(t) = x$. On pose alors $\gamma(x) = f(t)$, qui est bien définie car si $s_f(t) = s_f(t')$ alors f est constante sur $[t, t']$ et $f(t) = f(t')$. Comme $s_\gamma(t) = t$, on en déduit que γ est AC. ■

Dorénavant, on supposera que tout chemin rectifiable est représenté par une telle fonction γ . On dit alors que le chemin est paramétré par longueur d'arc. En effet, on peut remarquer que $s_f(b) = \ell(f([a, b]))$, et que, pour tout $0 \leq t \leq t' \leq \ell(f([a, b]))$, on a $\ell(\gamma([t, t'])) = |t' - t|$.

DÉFINITION 2.6 (Intégration le long d'une courbe). — Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ une courbe et $\rho : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Si γ n'est pas rectifiable, on pose

$$\int_\gamma \rho = \infty$$

et si γ est rectifiable, on suppose que γ est paramétré par longueur d'arc, et on définit

$$\int_\gamma \rho = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma(t) dt.$$

On note $\rho_\varepsilon(x) = \exp -\varepsilon|x - w|$. On remarque que l'on a les inégalités de type Harnack suivantes :

$$e^{-\varepsilon|x-y|} \leq \frac{\rho_\varepsilon(x)}{\rho_\varepsilon(y)} \leq e^{\varepsilon|x-y|}.$$

On définit une nouvelle métrique sur X par

$$d_\varepsilon(x, y) = \inf_\gamma \int_\gamma \rho$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes qui joignent x et y .

On remarque que pour tout $x \in X$, on a

$$d_\varepsilon(w, x) \leq \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} dt = 1/\varepsilon$$

donc $\text{diam } X \leq 2/\varepsilon$.

Cette approche des espaces hyperboliques repose de manière essentielle sur ce théorème de M. Bonk, J. Heinonen et P. Koskela [1].

THÉORÈME 2.7 (à la Gehring-Hayman). — *Il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ et une constante $M > 0$ telles que, pour tous $x, y \in X$, toute géodésique $[x, y]$, on ait*

$$\ell_{\rho_\varepsilon}([x, y]) \leq M d_\varepsilon(x, y)$$

et

$$d_\varepsilon(x, y) \asymp \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\},$$

où ℓ_{ρ_ε} désigne la longueur d'une courbe mesurée dans la métrique d_ε .

La démonstration est préparée par, d'une part, une estimation de la longueur de segments géodésiques, et d'autre part, par une version locale de ce théorème. Cette approche, bien qu'inspirée par celle donnée dans [1], est beaucoup plus efficace que l'originale (il faut noter que leur résultat part d'hypothèses plus générales).

Dans la suite, on notera $\ell_{\rho_\varepsilon} = \ell_\rho$ afin d'alléger un peu les notations.

LEMME 2.8. — Si γ est un segment géodésique reliant deux points x à y , alors

$$\ell_\rho(\gamma) \leq C \cdot \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\}.$$

DÉMONSTRATION. On considère un triangle (w, x, y) et on note $c \in [x, y]$ le point qui correspond au centre du tripode. On a donc, pour $z \in [x, y]$, $|w - z| \sim (x|y)_w + |c - z|$.

Donc

$$\begin{aligned} \ell_\rho(\gamma) &\lesssim e^{-\varepsilon(x|y)_w} \left(\int_0^{|x-c|} \exp(-\varepsilon t) dt + \int_0^{|y-c|} \exp(-\varepsilon t) dt \right) \\ &\lesssim \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} (2 - \exp(-\varepsilon|x - c|) - \exp(-\varepsilon|y - c|)). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon|x - y| \leq 1$ alors $2 - e^{-\varepsilon|x-c|} - e^{-\varepsilon|y-c|} \leq C \cdot \varepsilon(|x - c| + |y - c|) \lesssim \varepsilon|x - y|$. Sinon, $2 - e^{-\varepsilon|x-c|} - e^{-\varepsilon|y-c|} \leq 2$. Donc

$$\ell_\rho(\gamma) \lesssim \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\}.$$

■

LEMME 2.9. — Si $|x - y| \leq R$, alors, pour toute courbe γ qui joint x et y , on a

$$\ell_\rho(\gamma) \gtrsim e^{-2R\varepsilon} e^{-\varepsilon(x|y)_w} |x - y|.$$

DÉMONSTRATION. Soit c le milieu d'un segment $[x, y]$. On a

$$(x|y)_w = (1/2)(|x - w| + |y - w| - |x - y|) \geq |w - c| - |x - y| \geq |w - c| - R.$$

De plus, pour tout $z \in B(c, R)$, on a $|w - z| \leq |w - c| + R$.

Soit γ une courbe qui joint x à y . On distingue deux cas.

Premier cas. Si $\gamma \subset B(c, R)$, alors

$$\ell_\rho(\gamma) \geq \int_{[x, y]} \exp -\varepsilon(|w - c| + R) \geq |x - y| \exp -\varepsilon(|w - c| + R).$$

Donc $\ell_\rho(\gamma) \geq e^{-2\varepsilon R} e^{-\varepsilon(x|y)_w} |x - y|$.

Second cas. La courbe γ sort de la boule $B(c, R)$. On extrait alors de γ deux courbes γ_x et γ_y disjointes qui joignent x à un point de $\partial B(c, R)$ et y à un (autre) point de $\partial B(c, R)$ respectivement. Du coup, on a

$$\begin{aligned} \ell_\rho(\gamma) &\geq \ell_\rho(\gamma_x) + \ell_\rho(\gamma_y) \geq \int_{\gamma_x \cup \gamma_y} \exp -\varepsilon(|w - c| + R) \\ &\geq e^{-2\varepsilon R} e^{-\varepsilon(x|y)_w} \ell(\gamma_x \cup \gamma_y) \geq e^{-2\varepsilon R} e^{-\varepsilon(x|y)_w} R \geq e^{-2\varepsilon R} e^{-\varepsilon(x|y)_w} |x - y|. \end{aligned}$$

■

LEMME 2.10. — Soit $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $q(x, y) = q(y, x)$ et $q(x, z) \leq K \max\{q(x, y), q(y, z)\}$ pour une constante $K > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $q_\varepsilon = q^\varepsilon$.

Si $\varepsilon \leq \log \sqrt{2} / \log K$, alors, pour toute chaîne finie $x_0, \dots, x_k$, on a

$$\sum q_\varepsilon(x_{j-1}, x_j) \geq K^{-2\varepsilon} q_\varepsilon(x_0, x_k).$$

DÉMONSTRATION. Montrons par récurrence sur la longueur $k+1$ d'une chaîne $x_0, \dots, x_{k+1}$ reliant x à y que

$$q_\varepsilon(x, y) \leq K^{2\varepsilon} \sum_{j=0}^k q_\varepsilon(x_j, x_{j+1}).$$

Si $k = 1$, alors

$$q_\varepsilon(x_0, x_2) \leq K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_1), q_\varepsilon(x_2, x_1)\} \leq K^{2\varepsilon} (q_\varepsilon(x_0, x_1) + q_\varepsilon(x_2, x_1)).$$

Supposons que l'assertion soit vraie pour toute chaîne de longueur $k+1$, et étudions une chaîne $x_0, \dots, x_{k+2}$ de longueur $k+2$: on note $R = \sum q_\varepsilon(x_j, x_{j+1})$; soit p le plus grand

indice telle que $\sum_{k=0}^{p-1} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1}) \leq R/2$. Du coup, on a aussi $\sum_{j=p+1}^{k+1} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1}) \leq R/2$. Il vient

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x, y) &\leq K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_p), q_\varepsilon(x_p, y)\} \\ &\leq K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_p), K^\varepsilon q_\varepsilon(x_p, x_{p+1}), K^\varepsilon q_\varepsilon(x_{p+1}, y)\} \\ &\leq K^\varepsilon \max\{K^{2\varepsilon} R/2, K^\varepsilon R, K^{3\varepsilon} R/2\}. \end{aligned}$$

Par suite, on a $q_\varepsilon(x, y) \leq K^{2\varepsilon} R$ si $K^{2\varepsilon} \leq 2$, et le lemme en découle. ■

REMARQUE 2.11. — On peut aussi déduire du lemme précédent l'existence d'une métrique d_ε bi-Lipschitz équivalente à q_ε , si $q(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, en posant

$$d_\varepsilon(x, y) = \inf \sum_{j=0}^k q_\varepsilon(x_j, x_{j+1})$$

où l'infimum est pris sur toutes les chaînes finies $x_0, \dots, x_{k+1}$ avec $x_0 = x$ et $x_{k+1} = y$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.7. On choisit

$$\varepsilon \leq \log \sqrt{2}/\delta.$$

Si $|x - y| \leq 2/\varepsilon$, alors le Lemme 2.9 implique que

$$d_\varepsilon(x, y) \geq C e^{-\varepsilon(x|y)_w} |x - y| \geq C \cdot \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\}.$$

Sinon, soit γ une courbe qui relie x à y . On considère une $(2/\varepsilon)$ -approximation (x_i) qui soit $(1/\varepsilon)$ -séparée. On a

$$\ell_\rho(\gamma) \geq \sum d_\varepsilon(x_i, x_{i+1}) \geq C \sum e^{-\varepsilon(x_i|x_{i+1})_w} |x_i - x_{i+1}| \geq (C/\varepsilon) \sum e^{-\varepsilon(x_i|x_{i+1})_w}.$$

Or, le Lemme 2.10 montre que $\sum e^{-\varepsilon(x_i|x_{i+1})_w} \geq c \cdot e^{-\varepsilon(x|y)_w}$ pour toute chaîne qui relie x à y . Donc

$$\ell_\rho(\gamma) \geq C \cdot \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \geq C \cdot \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\}.$$

Le Lemme 2.8 montre alors que $d_\varepsilon(x, y) \geq (1/M) \cdot \ell_\rho([x, y])$, où M est une constante universelle. Comme (X, d_ε) est un espace de longueur, on en déduit que $d_\varepsilon(x, y) \leq \ell_\rho([x, y])$ et donc

$$d_\varepsilon(x, y) \asymp \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_w}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\}.$$

■

Si r est un rayon issu de w , alors la suite $(r(n))_n$ est une suite de Cauchy de convergente.

DÉFINITION 2.12. — On note $\overline{X}_\varepsilon$ le complété de (X, d_ε) , et on définit le bord de X par

$$\partial X = \overline{X}_\varepsilon \setminus X.$$

Considérons une suite de Cauchy (x_n) pour la métrique d_ε . Si cette suite est une suite bornée dans la métrique initiale d_0 , alors elle est aussi une suite de Cauchy pour cette métrique, et donc (x_n) est convergente dans X (pour toutes les métriques). Les points rajoutés sont donc des points qui se trouvent “à l’infini” pour la métrique initiale. On a $X = B_\varepsilon(w, 1/\varepsilon)$ et

$$\partial_\varepsilon X = \{x \in \overline{X}_\varepsilon, d_\varepsilon(w, x) = (1/\varepsilon)\}.$$

PROPOSITION 2.13 (Visibilité du bord). — On étudie les prolongements de géodésiques au bord.

- (1) Pour tout $a \in \partial X$ et tout $x \in X$, il existe un rayon r issu de x qui tend vers a .
- (2) Pour tous $a, b \in \partial X$, $a \neq b$, il existe une géodésique qui tend vers a et b .

DÉMONSTRATION.

- (1) Soit $a \in \partial X$, et soit $(a_n)_n \subset X$ une suite qui tend vers a . On considère des segments géodésiques $\gamma_n : [0, |x - a_n|] \rightarrow X$ qui relient x à a_n . Sur tout compact de $\mathbb{R}_+$, la famille (γ_n) est uniformément équicontinue puisqu’il s’agit de plongements isométriques. De plus, $\gamma_n(0) = x$ pour tout n , donc le théorème d’Ascoli s’applique et on peut extraire une sous-suite convergente vers un rayon géodésique $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Le rayon admet un point limite $b \in \partial X$. Soit V un voisinage de b . Il contient un sous-rayon $\gamma([t_0, \infty[)$. Pour tout $t_1 > t_0$, et tout n assez grand, $\gamma_n([t_0, t_1])$ est contenu dans V aussi.

Pour tout $|x_n| \geq t > 0$, on a

$$\begin{aligned} |b - a|_\varepsilon &\leq |b - \gamma(t)|_\varepsilon + |\gamma(t) - \gamma_n(t)|_\varepsilon + |\gamma_n(t) - a_n|_\varepsilon + |a_n - a|_\varepsilon \\ &\leq |\gamma(t) - \gamma_n(t)|_\varepsilon + (2/\varepsilon)e^{-\varepsilon t} + |a_n - a|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$; si t est assez grand, alors $(2/\varepsilon)e^{-\varepsilon t} \leq \eta/3$. De plus, si n est assez grand alors $|a - a_n|_\varepsilon \leq \eta/3$ et $|\gamma_n(t) - \gamma(t)|_\varepsilon \leq \eta/3$. Donc $|a - b|_\varepsilon \leq \eta$, et $a = b$.

- (2) On considère deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ qui tendent respectivement vers a et b . On considère des segments géodésiques $[a_n, b_n]$. Puisque $a \neq b$, il existe une constante C telle que $(a_n|b_n)_w \leq C$ pour tout n . On considère $w_n \in [a_n, b_n]$ tel que $(a_n|b_n)_w \sim |w - w_n|$. On considère des paramétrages $\gamma_n : [-|w_n - a_n|, |w_n - b_n|] \rightarrow [a_n, b_n]$ tels que $\gamma_n(0) = w_n$. Par argument similaire à ci-dessus, on montre que (γ_n) tend vers une géodésique $[a, b]$. ■

On a aussi le théorème suivant.

THÉORÈME 2.14. — *Pour chaque $\varepsilon > 0$ assez petit, (X, d_ε) est un espace A -uniforme où $A = A(\delta)$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que les segments géodésiques vont nous fournir les courbes recherchées. D'après le Théorème 2.7, on sait déjà que pour tous $x, y \in X$, on a $\ell_\rho([x, y]) \asymp d_\varepsilon(x, y)$.

Soit $x \neq w \in X$, on a, pour tout $y \in X$, $(x|y)_w \leq |w-x|$ donc $d_\varepsilon(x, \partial X) \geq C \exp -\varepsilon|x-w|$ et $d_\varepsilon(w, \partial X) \geq 1/\varepsilon$. Du coup, si $z \in [x, w]$, on a

$$\begin{aligned} \ell_\rho([x, z]) &= (1/\varepsilon)(\exp -\varepsilon|w-z| - \exp -\varepsilon|w-x|) \\ &= \frac{\exp -\varepsilon|z-w|}{\varepsilon}(1 - \exp -\varepsilon|z-x|) \\ &\leq \frac{d_\varepsilon(z, \partial X)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Soient maintenant $x \neq y \in \partial X$ que l'on suppose différents de w . On considère un triangle $\Delta = \{x, y, w\}$ et son tripode associé $f_\Delta : \Delta \rightarrow T$.

On note $c \in [x, y]$ un point du triple inscrit, et on considère $z \in [x, c]$. On a donc, pour tout $t \in [x, z]$, $|w-t| \sim |w-z| + |c-t|$, donc

$$\begin{aligned} \ell_\rho([x, z]) &\asymp \frac{\exp -\varepsilon|z-w|}{\varepsilon}(1 - \exp -\varepsilon|z-x|) \\ &\leq C \cdot \frac{d_\varepsilon(z, \partial X)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le cas $z \in [c, y]$ se traite de la même façon. ■

M. Bonk, J. Heinonen et P. Koskela montrent aussi une réciproque à cette construction.

THÉORÈME 2.15. — *Si X un espace uniforme non complet, alors X muni de la métrique quasihyperbolique*

$$k(x, y) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{1}{d(z, \partial X)}$$

où l'infimum est pris sur les courbes qui joignent x et y , est hyperbolique.

Si on part d'un espace hyperbolique quasi-étoilé, que l'on uniformise, puis que l'on re-hyperbolise, on obtient un espace quasi-isométrique à l'espace de départ. Réciproquement, si on part d'un espace uniforme, alors on obtient un nouvel espace uniforme quasi-similaire à l'espace initial.

Deux (quasi)-rayons r_1 et r_2 sont équivalents si $d_H(r_1, r_2) < \infty$. Une suite (x_n) tend vers l'infini si $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i | x_j) = \infty$; on dit que $(x_n) \sim (y_n)$ si $\lim_{i,j \rightarrow \infty} (x_i | y_j) = \infty$.

En fait, on peut définir le bord de X sans construire de métriques.

PROPOSITION 2.16. — *On se fixe $\varepsilon > 0$ assez petit. On a les identifications suivantes :*

$$\partial X = \{\text{rayons issus de } w\} / \sim = \{\text{quasirayons}\} / \sim = \{\text{suites qui tendent vers } \infty\} / \sim .$$

DÉMONSTRATION. Si (x_n) tend vers $a \in \partial X$, alors $(|x_n - w|)_n$ tend vers l'infini et on peut supposer que $|x_n - x_m| \geq 1$ pour tout $n \neq m$. Du coup, $(x_n | x_m)_w$ tend vers l'infini. Réciproquement, si $(x_n | x_m)_w$ tend vers l'infini, alors

$$|x_n - x_m|_\varepsilon \lesssim e^{-\varepsilon(x_n | x_m)_w}$$

donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Chaque rayon converge à l'infini vers un unique point, et chaque point est l'aboutissement d'un rayon par la Proposition 2.13. Le Théorème 1.12 implique essentiellement que deux rayons à distance bornée ont même limites, ainsi que deux quasirayons. ■

Produit de Gromov au bord.

$$(a|b) = \sup_{x_i \rightarrow a, y_i \rightarrow b} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i | y_j)$$

Si $x_i \rightarrow a$ et $y_j \rightarrow b$ alors on a, d'après la Remarque 7.8 de [2], $(a|b) - 2\delta \leq \liminf (x_i | y_j) \leq (a|b)$. Un système de voisinage pour $a \in \partial X$ est donné par $\{b \in \partial X, (a|b) \geq R\}$. Cela confère une topologie sur ∂X qui le rend compact (voir Chap. 7, § 2 de [2]).

La métrique que l'on a construite ci-dessus est un exemple de métrique visuelle :

DÉFINITION 2.17 (métrique visuelle). — *Une métrique d sur ∂X telle que $d(x, y) \asymp \rho_\varepsilon$ est une métrique visuelle issue de w .*

Fonctions de Busemann. Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$ et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ un rayon géodésique tel que $h(0) = y$ et $\lim_\infty h = a$. On définit $\beta_a(x, h) = \limsup (|x - h(t)| - t)$, qui est bien défini par l'inégalité triangulaire, et

$$\beta_a(x, y) = \sup \{\beta_a(x, h), \text{ avec } h \text{ comme ci-dessus}\} .$$

Tout rayon est une bonne approximation : si t est assez grand alors

$$|\beta_a(x, y) - (|x - h(t)| - t)| \leq 40\delta.$$

De plus, β_a est presque un cocycle :

$$\begin{cases} |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, x)| \leq 120\delta \\ |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, z) + \beta_a(z, x)| \leq 200\delta \\ |\beta_a(x, y) - \beta_a(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| + 400\delta \end{cases}$$

Pour une démonstration, se référer au Lemme 8.1 et à la Proposition 8.2 de [2].

Produit de Gromov relatif à $a \in \partial X$ et $w \in X$. Si $x, y \in X$, on pose

$$(x|y)_{w,a} = \frac{1}{2}[\beta_a(x, w) + \beta_a(y, w) - |x - y|].$$

Si $b, c \in \partial X \setminus \{a\}$, on pose

$$(b|c)_{w,a} = \sup_{h \rightarrow b, k \rightarrow c} \liminf_{t \rightarrow \infty} (h(t), k(t))_{w,a}.$$

Soit $\ell : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ un rayon géodésique qui joint w à $a \in \partial X$, alors

$$|(x|y)_{w,a} - [(x|y)_{\ell(t)} - t]| \leq 80\delta,$$

autrement dit $(x|y)_{w,a} \sim d(\ell(t), [x, y]) - |\ell(t) - w|$ (voir Lemme 8.3 de [2]).

Propriétés.

- (a) $(b|c)_{w,a} = (c|b)_{w,a}$,
- (b) $(b|c)_{w,a} = \infty$ si et seulement si $b = c$,
- (c) $(b|d)_{w,a} \geq \min\{(b|c)_{w,a}, (c|d)_{w,a}\} - 1200\delta$.

Pour une démonstration, se référer au Lemme 8.5 de [2].

REMARQUE 2.18 (Le modèle du demi-espace). — Soit $a \in \partial X$. On note $\rho_{a,w,\varepsilon}(x) = \exp \varepsilon \beta_a(w, x)$.

On définit une nouvelle métrique sur X par

$$d_{a,w,\varepsilon}(x, y) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho_{a,w,\varepsilon}$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes qui joignent x et y .

Comme dans le modèle de la boule, on peut approcher cette distance par la longueur des géodésiques hyperboliques : il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ et une constante $M > 0$ telles que, pour tous $x, y \in X$, toute géodésique $[x, y]$, on ait

$$\ell_{\rho_a}([x, y]) \geq M d_a(x, y)$$

et

$$d_a(x, y) \asymp \frac{e^{-\varepsilon(x|y)_{a,w}}}{\varepsilon} \min\{1, \varepsilon|x - y|\},$$

où ℓ_{ρ_a} désigne la longueur d'une courbe mesurée dans la métrique d_a . La démonstration est similaire à celle du Théorème 2.7.

Le complété de cet espace s'identifie naturellement à $X \cup (\partial X \setminus \{a\})$.

On a aussi l'analogie du Théorème 2.14 : pour chaque $\varepsilon > 0$ assez petit, (X, d_ε) est un espace A -uniforme où $A = A(\delta)$.

2.2. Cas des groupes

THÉORÈME 2.19. — *Si $\varphi : X \rightarrow X$ est une isométrie alors φ se prolonge à $\varphi : \partial X \rightarrow \partial X$ continûment et, pour d_ε avec $\varepsilon > 0$ assez petit,*

- (i) *il existe $L = L(\varepsilon, |w - \varphi(w)|) > 0$ telle que φ soit L -Lipschitz.*
- (ii) *il existe $K = K_\varepsilon \geq 1$ et $\eta = \eta_{\varepsilon, |w - \varphi(w)|}$ telles que φ est K -quasiconforme et est η -quasisymétrique. De plus, il existe un homéomorphisme η_L croissant et linéaire de $\mathbb{R}_+$ qui ne dépend que de δ et ε , tel que, pour tout $a \in \partial X$, il existe un voisinage V de a tel que la restriction de φ à V soit η_L -quasisymétrique.*
- (iii) *il existe $C = C(\varepsilon) > 0$ telle que φ est η -quasimöbius, avec $\eta(t) = C \cdot t$.*

REMARQUE 2.20. — Chaque propriété a son propre intérêt. La propriété Lipschitz globale est intéressante, mais pas indépendante de l'isométrie. En revanche, elle est uniforme localement, ce qui ne suffit pas toujours. Il en est de même pour les conditions quasiconforme et quasisymétrique. La propriété quasimöbius est donc particulièrement intéressante puisqu'elle est à la fois globale et uniforme.

Pour obtenir la constante de Lipschitz indépendante de l'isométrie, on utilise le résultat suivant.

PROPOSITION 2.21. — *Soit γ une isométrie. Si $a \in \partial X$, $b, c \in X$ et $d_{w,\varepsilon}(a, b), d_{w,\varepsilon}(a, c) < C e^{-\varepsilon|w - \gamma^{-1}(w)|}$, alors*

$$(1/C) e^{\varepsilon\beta_a(w, \gamma^{-1}(w))} \leq \frac{d_{w,\varepsilon}(\gamma b, \gamma c)}{d_{w,\varepsilon}(b, c)} \leq C e^{\varepsilon\beta_a(w, \gamma^{-1}(w))}.$$

LEMME 2.22. — Soient $w, w' \in X$; si $(a|b)_w > C + |w - w'|$ alors $|\beta_a(w, w') - \beta_b(w, w')| \leq C(\delta)$, où on définit $\beta_a(w, w') = |w - a| - |w' - a|$ si $a \in X$.

DÉMONSTRATION. Si X est un arbre, alors $(a|b)_w > |w - w'|$ implique que $\beta_a(w, w') = \beta_b(w, w')$. Dans le cas général, on note $F = [w, w'] \cup [w, a] \cup [w, b]$, et on considère l'arbre approximatif associé.

Il existe donc une constante $C = C(\delta)$ telle que si $(a|b)_w > |w - w'| + C$ alors $(\bar{a}|\bar{b})_{\bar{w}} > |\bar{w} - \bar{w}'|$. Donc $\beta_{\bar{a}}(\bar{w}, \bar{w}') = \beta_{\bar{b}}(\bar{w}, \bar{w}')$ et $|\beta_a(w, w') - \beta_b(w, w')| \leq C(\delta)$. ■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.21. Soient $(b_n), (c_n)$ deux suites de X qui tendent vers b et c . On a

$$\begin{aligned} (\gamma b_n | \gamma c_n)_w - (b_n | c_n)_w &= \frac{1}{2} [|b_n - \gamma^{-1}w| - |b_n - w| + |c_n - \gamma^{-1}w| - |c_n - w|] \\ &\sim \frac{1}{2} [\beta_b(\gamma^{-1}w, w) + \beta_c(\gamma^{-1}w, w)]. \end{aligned}$$

Or le Lemme 2.22 implique que $\beta_b(\gamma^{-1}w, w) \sim \beta_c(\gamma^{-1}w, w) \sim \beta_a(\gamma^{-1}w, w)$, donc

$$|[(\gamma b | \gamma c)_w - (b | c)_w] - \beta_a(\gamma^{-1}w, w)| \leq C(\delta).$$

Par conséquent,

$$\frac{d_{w,\varepsilon}(\gamma b, \gamma c)}{d_{w,\varepsilon}(b, c)} \asymp e^{\varepsilon \beta_a(w, \gamma^{-1}w)}.$$

■

Birapport de quatre points. Si a, b, c, d sont dans X , on définit le *birapport hyperbolique* par

$$[a : b : c : d] = -(a|b)_w - (c|d)_w + (a|c)_w + (b|d)_w.$$

On constate alors que

$$[a : b : c : d] = (1/2)(|a - b| + |c - d| - |a - c| - |b - d|).$$

On a la relation $[a : b : c : d] = [c : d : a : b]$, et dans un arbre, $[a : b : c : d] = [b : a : c : d]$. Toujours, dans un arbre, on a les deux cas de figures suivant :

Donc, dans un arbre, $[a : b : c : d]$ correspond à la distance entre les segments géodésiques $[a, b]$ et $[c, d]$ au signe près. Autrement dit, le birapport entre 4 points mesure, à une constante $C(\delta)$ additive près et au signe près, la distance entre deux segments géodésiques.

Pour donner un sens à ce birapport à l'infini, on pose

$$[a : b : c : d]_\varepsilon = \exp -\varepsilon[a : b : c : d] \asymp \frac{d_\varepsilon(a, b) \cdot d_\varepsilon(c, d)}{d_\varepsilon(a, c) \cdot d_\varepsilon(b, d)}.$$

On retrouve ainsi la forme familière du birapport telle qu'il est défini sur la sphère de Riemann.

On remarque que l'on retrouve l'identité de H. Poincaré lorsqu'il définit la métrique hyperbolique sur le demi-plan supérieur dans son article originel [4] : soient $x, y \in X$ et γ une géodésique qui passe par (x, y) . Soient $a, b \in \partial X$ les points à l'infini de γ . On suppose que les points a, x, y, b sont dans cet ordre. On a $|x - y| \sim \log[a : x : y : b]_\varepsilon$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.19.

(i) On a

$$(\varphi(a)|\varphi(b))_w = (\varphi(a)|\varphi(b))_{\varphi w}$$

à $|w - \varphi(w)|$ près. Du coup, on en déduit que φ est bilipschitz avec

$$L \asymp e^{\varepsilon|w - \varphi(w)|}.$$

(ii) Comme φ est bilipschitz, φ est quasisymétrique (Lemme 2.27). On a la quasisymétrie locale indépendante de φ par la Proposition 2.21.

(iii) Soient $a, b, c, d \in X$. Comme φ est une isométrie et que le birapport mesure essentiellement la distance entre les segments géodésiques, le birapport est quasi-invariant. En passant à l'exponentielle et en utilisant que

$$d_\varepsilon(a, b) \asymp (1/\varepsilon) \exp -\varepsilon(a|b)_w \min\{1, \varepsilon|x - y|\},$$

on obtient

$$\frac{d_\varepsilon(\varphi(a), \varphi(b)) \cdot d_\varepsilon(\varphi(c), \varphi(d))}{d_\varepsilon(\varphi(a), \varphi(c)) \cdot d_\varepsilon(\varphi(b), \varphi(d))} \leq C_\varepsilon \cdot \frac{d_\varepsilon(a, b) \cdot d_\varepsilon(c, d)}{d_\varepsilon(a, c) \cdot d_\varepsilon(b, d)}.$$

■

PROPOSITION 2.23. — *Si X est un espace géodésique propre qui admet une action géométrique (proprement discontinue et cocompacte par isométries) d'un groupe G , alors X est quasi-étoilé.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, il existe une constante $C > 0$ et une géodésique γ qui passe à une distance au plus C de w . Puisque l'action de G est cocompacte, chaque point x de X a une géodésique γ_x qui passe à une distance au plus C' de x . En considérant un segment géodésique $[w, x]$ et une approximation par les arbres, on peut extraire un rayon quasi-géodésique issu de w qui passe près de x . Par le lemme de poursuite, on en déduit un rayon géodésique. ■

Ombre de boules. Etant donnés $w, x \in X$ et $R > 0$, on note

$$\mathcal{U}_w(x, R) = \{a \in \partial X, [w, a] \cap B(x, R) \neq \emptyset\}.$$

Sur un arbre, on a $\mathcal{U}_w(x, R) = \{a, (a|x)_w > |x - w| - R\}$.

LEMME 2.24. — Si $a \in \mathcal{U}_w(x, R)$ alors $|w - x| - 2R - C \leq \beta_a(w, x) \leq |x - w|$.

DÉMONSTRATION. On considère le triangle (w, a, x) et on considère le tripode associé. Le centre $\bar{c}$ vérifie $\bar{c} \in [\bar{w}, \bar{a}]$ tel que $|\bar{c} - \bar{x}| \leq R$.

On a $\beta_a(\bar{w}, \bar{x}) = |\bar{w} - \bar{c}| - |\bar{x} - \bar{c}| \leq |\bar{w} - \bar{x}| = |w - x|$. Donc $|\bar{c} - \bar{w}| \geq |\bar{w} - \bar{x}| - |\bar{c} - \bar{x}| \geq |\bar{x} - \bar{w}| - R$, et $\beta_a(\bar{w}, \bar{x}) \geq |\bar{w} - \bar{x}| - 2R$. ■

LEMME 2.25. — On a $\text{diam } \mathcal{U}_w(x, R) \leq C \cdot e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|x-w|}$.

DÉMONSTRATION. Soient $a, b \in \mathcal{U}_w(x, R)$, on considère $x_a, x_b \in B(x, R)$ tels que $x_a \in [w, a[$ et $x_b \in [w, b[$. On a $(a|b)_w \geq \min\{(a|x_a)_w, (x_a|x)_w, (b|x_b)_w, (x_b|x)_w\} - 2\delta$.

Or $(a|x_a)_w = |w - x_a| \geq |x - w| - R$, de même : $(b|x_b)_w \geq |x - w| - R$. De plus, $(x_a|x)_w = (1/2)(|x_a - w| + |x - w| - |x - x_a|) \geq |x - w| - R$ et $(x_b|x)_w \geq |x - w| - R$.

Du coup, $(a|b)_w \geq |x - w| - R - 2\delta$ et $d_{a,\varepsilon}(a, b) \leq e^{-\varepsilon(a|b)_w} \leq e^{2\delta} e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|x-w|}$. ■

LEMME 2.26. — Soit $x \in X$; il existe $C, C' > 0$ telles que s'il existe un rayon géodésique r tel que $d(x, r) \leq K$ et si $R > K + C$ alors $\mathcal{U}_w(x, R)$ contient une boule de rayon $(1/C')e^{R\varepsilon} e^{-\varepsilon|x-w|} e^{-2K\varepsilon}$.

DÉMONSTRATION. Soit a l'extrémité de r , et soit $c \in r$ tel que $|x - c| \leq K$. Alors $B(c, R - K) \subset B(x, R)$ donc $\mathcal{U}_w(c, R - K) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. Si $(a|b)_w > |c - w| + (R - K) + C$ alors $b \in \mathcal{U}_w(c, R - K)$ via les arbres. Par suite $B(a, (1/C') \exp(\varepsilon(R - K) - \varepsilon|w - c|)) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. Or $|w - c| < |w - x| + K$ donc $B(a, (1/C')e^{-2K\varepsilon} \exp(\varepsilon(R - |w - c|))) \subset \mathcal{U}_w(x, R)$. ■

Du coup, dans le cas d'un groupe les ombres des boules de rayon fixés suffisamment grands forment une base pour la topologie de ∂X .

2.3. Applications quasisymétriques et variantes

Une partie importante de ce paragraphe est issue de [3].

Définition. Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ une application. Etant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on dit que f est η -quasisymétrique si pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq$

$td(x, z)$, on ait $d'(fx, fy) \leq \eta(t)d'(fx, fz)$. On dira tout simplement que f est quasisymétrique s'il existe η telle que la relation ci-dessus soit vraie.

Si f est un homéomorphisme η -quasisymétrique alors f^{-1} est η' -quasisymétrique avec $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$.

LEMME 2.27. — Si f est L -bilipschitz alors f est quasisymétrique avec $\eta(t) = Lt$.

DÉMONSTRATION.

$$\frac{d'(f(x), f(y))}{d'(f(x), f(z))} \leq L^2 \frac{d'(x, y)}{d'(x, z)}.$$

■

LEMME 2.28. — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application η -quasisymétrique. Si $A \subset B$ avec $\text{diam } B < \infty$, alors $\text{diam } f(B) < \infty$ et

$$\frac{1}{2\eta\left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } A}\right)} \leq \frac{\text{diam } f(A)}{\text{diam } f(B)} \leq \eta\left(2\frac{\text{diam } A}{\text{diam } B}\right).$$

DÉMONSTRATION. Soient (b_n) et (b'_n) deux suites de B telles que $|b_n - b'_n| \geq 1/2 \text{diam } B$ et $\lim |b_n - b'_n| = \text{diam } B$. Pour tout $b \in B$, on a $|b - b_1| \leq \text{diam } B \leq 2|b_1 - b'_1|$. Par suite $|f(b) - f(b_1)| \leq \eta(2)|f(b_1) - f(b'_1)|$ et $\text{diam } f(B) < \infty$.

Soit maintenant $a \in A$; on $|b_n - b'_n| \leq |b_n - a| + |a - b'_n|$, donc on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, on ait $|b_n - a| \geq |b'_n - a|$. Du coup, pour tout $x \in A$, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq \eta\left(\frac{|x - a|}{|a - b_n|}\right) |f(a) - f(b_n)| \leq \eta\left(2\frac{\text{diam } A}{\text{diam } B}\right) \text{diam } f(B).$$

En appliquant cet argument à f^{-1} , on obtient l'autre inégalité. ■

THÉORÈME 2.29. — Soient (X, x_0) , (Y, y_0) , deux espaces métriques propres marqués, η un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}_+$, et $\mathcal{F}$ la famille d'applications η -quasiymétriques $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et telles qu'il existe un point $x'_0 \neq x_0$ et une constante $M < \infty$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $(1/M) \leq |f(x_0) - f(x'_0)| \leq M$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille compacte.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Quitte à échanger les rôles de x_0 et x'_0 , on peut supposer que $x \neq x_0$, voire même que $|x - x_0| \geq |x_0 - x'_0|/2$. Soit $x' \in X$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &\leq \eta\left(\frac{|x - x'|}{|x - x_0|}\right) |f(x_0) - f(x)| \\ &\leq \eta\left(2\frac{|x - x'|}{|x'_0 - x_0|}\right) \eta\left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x'_0|}\right) |f(x_0) - f(x'_0)| \\ &\leq \eta\left(2\frac{|x - x'|}{|x'_0 - x_0|}\right) \eta\left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x'_0|}\right) M \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur toute boule bornée $B(x_0, R)$: en effet, on obtient

$$|f(x) - f(x')| \leq \eta \left(2 \frac{|x - x'|}{|x'_0 - x_0|} \right) \eta \left(\frac{R}{|x_0 - x'_0|} \right) M \lesssim \eta \left(2 \frac{|x - x'|}{|x'_0 - x_0|} \right).$$

Comme Y est propre, les images de $B(x_0, R)$ par toutes les fonctions restant bornées, le thm d'Ascoli s'applique, et on peut extraire une suite convergente sur $B(x_0, R)$.

Par un procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite convergente vers une application continue f non constante. Il vient par passage à la limite que f est aussi η -quasisymétrique, et injective. ■

Applications quasimöbius. Une application $f : X \rightarrow X'$ est η -quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux disjoints, on a

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \cdot \frac{|f(b) - f(d)|}{|f(c) - f(d)|} \leq \eta \left(\frac{|a - b|}{|a - c|} \cdot \frac{|c - d|}{|b - d|} \right).$$

LEMME 2.30. — Soit X un espace métrique. Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points distincts de X , on définit

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \frac{\min\{|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|\}}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}.$$

Alors

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1, x_2, x_3, x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$$

où

$$\eta_0(t) = t + \sqrt{t^2 + t} \quad \text{and} \quad \eta_1(t) = t(2 + t).$$

DÉMONSTRATION. On suppose que $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$; il vient

$$\begin{cases} |x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_4| + |x_4 - x_3| \leq 2|x_4 - x_3| + |x_2 - x_4|; \\ |x_2 - x_4| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_3| + |x_3 - x_4| \leq 2|x_4 - x_3| + |x_1 - x_3|. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \max\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} &\leq 2|x_4 - x_3| + \min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\} \\ &\leq \left(2 + \frac{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}{|x_3 - x_4|} \right) |x_3 - x_4| \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle} \right) |x_3 - x_4|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3, x_4] &\geq \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle}\right)^{-1} \frac{|x_1 - x_2|}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}} \\ &\geq \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

En inversant la fonction de $\langle x_j \rangle$, on obtient

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4]).$$

On note que

$$\eta_0(t) \leq 3 \max\{t, \sqrt{t}\}.$$

En permutant les points, on a

$$[x_1, x_3, x_2, x_4] \geq \langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle}\right)^{-1}$$

et en passant à l'inverse, on trouve

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle).$$

■

Ce lemme signifie que l'on peut remplacer le birapport par cette nouvelle notion quantitativement, *a priori* plus intuitive.

THÉORÈME 2.31. — (i) *Une application quasisymétrique est quasimöbius.*

(ii) *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quasimöbius. Si X et Y sont non bornés, alors f est quasisymétrique si et seulement si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Si X et Y sont bornés et si, pour trois points $z_1, z_2, z_3 \in X$, on a $|z_i - z_j| \geq \text{diam } X/\lambda$ et $|f(z_i) - f(z_j)| \geq \text{diam } Y/\lambda$ pour un $\lambda > 0$, alors f est η -quasisymétrique, où η ne dépend que de λ et du contrôle de la distorsion des birapports.*

DÉMONSTRATION. Voir le Théorème 3.2, le Théorème 3.10 et le Théorème 3.12 de l'article [5] de J. Väisälä.

(i) Montrons que si f est η -quasisymétrique, alors

$$\langle f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4) \rangle \leq \eta(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle).$$

Supposons $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_4|$. On a $\min\{|f(x_1) - f(x_2)|, |f(x_3) - f(x_4)|\} \leq |f(x_1) - f(x_2)|$. D'autre part, on note

$$\min\{|f(x_1) - f(x_3)|, |f(x_2) - f(x_4)|\} = |f(x_i) - f(x_j)|$$

où on peut choisir $i \in \{1, 2\}$.

Du coup,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_i) - f(x_j)|} &\leq \eta \left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_i - x_j|} \right) \\ &\leq \eta \left(\frac{|x_1 - x_2|}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}} \right) \\ &\leq \eta(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle). \end{aligned}$$

Le Lemme 2.30 permet de conclure.

- (ii) Si X et Y sont non bornés, alors f ne peut être quasisymétrique que si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini d'après le Lemme 2.28. Dans ce cas, on fait tendre x_4 vers l'infini et on obtient que f est η -quasisymétrique.

Sinon, pour tout $x \in X$, il existe z_i, z_j tels que $|z_i - x| \geq \text{diam } X/2\lambda$ et $|z_j - x| \geq \text{diam } X/2\lambda$. De même, il existe z_k, z_m tels que $|f(z_k) - f(x)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$ et $|f(z_m) - f(x)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$.

Soient x_1, x_2, x_3 . On choisit z_i de sorte que $|z_i - x_2| \geq \text{diam } X/2\lambda$ et $|f(z_i) - f(x_3)| \geq \text{diam } Y/2\lambda$.

Du coup,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_3)|} &\leq \frac{|f(x_2) - f(z_i)|}{|f(x_3) - f(z_i)|} \eta([x_1, x_2, x_3, z_i]) \\ &\leq 2\lambda\eta \left(2\lambda \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_3|} \right). \end{aligned}$$

■

THÉORÈME 2.32. — *Soient X, Y deux espaces bornés. Soient $\lambda > 0$ et $x_1, x_2, x_3 \in X$ trois points tels que $|x_i - x_j| \geq \text{diam } X/\lambda$. Il existe un homéomorphisme $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour toute application η -quasimöbius $f : X \rightarrow Y$ telle que $|f(x_i) - f(x_j)| \geq \text{diam } Y/\lambda$, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mu \left(\frac{|x - y|}{\text{diam } X} \right) \cdot \text{diam } Y.$$

Autrement dit, l'ensemble de ces applications est équicontinue.

DÉMONSTRATION. Voir le Théorème 2.1 de [5].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Bonk, J. Heinonen & P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*, Astérisque No. 270, 2001.

- [2] E. Ghys and P. de la Harpe (éditeurs), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [3] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsien, *Acta math.* **1** (1882), 1–62.
- [5] J. Väisälä, Quasimöbius maps, *J. Analyse Math.* **44** (1984/85), 218–234.

3. DYNAMIQUE CONFORME À L'INFINI

La notion de groupe de convergence est due à F. Gehring et G. Martin, qui voulaient mettre en avant les propriétés dynamiques des groupes kleinéens comme système dynamique conforme. Cette partie est essentiellement tirée des travaux de B. Bowditch [5]. Au lieu de travailler en toute généralité comme le fait B. Bowditch, on ne s'intéresse ici qu'au cas métrique. La seule différence tient dans l'usage des suites plutôt que des filtres.

Etant donné un espace (métrique) X (avec au moins trois points), on note $\Delta \subset X^3$ l'ensemble des triplets (ordonnés) dont au moins deux termes sont identiques, $\Theta^0(X) = X^3 \setminus \Delta$ l'ensemble des triples (ordonnés) distincts. On considère aussi l'application $p : \Delta \rightarrow X$ définie par $p(\{x, x, y\}) = x$. On note $\partial\Theta^0(X) = \Delta/(p)$. Cet espace est naturellement homéomorphe à X .

Si X est (métrique) compact non vide et parfait alors $\Theta^0(X) \cup \partial\Theta^0(X)$ est aussi (métrique) compact et parfait. Le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit sur $\Theta^0(X) \cup \partial\Theta^0(X)$ par permutations sur les coordonnées. On définit alors

$$\Theta(X) = \Theta^0(X)/\mathfrak{S}_3 \quad \text{et} \quad \partial\Theta(X) = \partial\Theta^0(X)/\mathfrak{S}_3.$$

De plus, $\partial\Theta(X)$ est naturellement homéomorphe à X .

Avant de définir les groupes de convergence, on commence par étudier des propriétés de familles d'homéomorphismes qui caractériseront ces groupes.

DÉFINITION 3.1. — *On dit que Φ est proprement discontinu sur les triples si, pour tout compact $K \subset \Theta(X)$ et tout compact $L \subset \Theta(Y)$, l'ensemble*

$$\{\phi \in \Phi, \phi(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini.

On suppose dorénavant que X est un espace métrique compact.

LEMME 3.2. — Φ est proprement discontinu si et seulement si, quelles que soient les suites (x_n) , (y_n) et (z_n) de X qui convergent vers x , y et z dans X , et quelle que soit la suite d'éléments distincts (ϕ_n) de Φ telle que $\phi_n(x_n)$, $\phi_n(y_n)$ et $\phi_n(z_n)$ tendent vers x' , y' et z' dans Y , on a les propriétés suivantes.

Si $\{x, y, z\} \in \Theta(X)$ alors $\{x', y', z'\} \in \partial\Theta(Y)$.

Si $\{x', y', z'\} \in \Theta(Y)$ alors $\{x, y, z\} \in \partial\Theta(X)$.

DÉMONSTRATION. Supposons $\{x, y, z\} \in \Theta(X)$. Alors, pour n assez grand, on a $\{x_n, y_n, z_n\} \in \Theta(X)$. De même, si $\{x', y', z'\} \in \Theta(Y)$ alors, pour n assez grand, on a $\{\phi_n(x'_n), \phi_n(y'_n), \phi_n(z'_n)\} \in \Theta(Y)$. Du coup, si on choisit $K = \{x_n, y_n, z_n\} \cup \{x, y, z\}$ et $L = \{\phi_n(x'_n), \phi_n(y'_n), \phi_n(z'_n)\} \cup \{x', y', z'\}$, on viole la propre discontinuité de Φ .

Réciproquement, si K et L sont deux compacts de $\Theta(X)$ et de $\Theta(Y)$, et si on a une infinité de $\phi \in \Phi$ tels que $\phi(K) \cap L \neq \emptyset$, alors il existe des suites qui ne vérifient pas les propriétés du lemme, puisque les limites seront dans $\Theta(X)$ et $\Theta(Y)$. ■

DÉFINITION 3.3 (écroulement). — Soient X, Y deux espaces (métriques) compacts. Soit Φ un ensemble d'homéomorphismes de X dans Y . Etant donnés $x \in X$ et $y \in Y$, un sous-ensemble $\Phi' \subset \Phi$ est un écroulement de (x, y) si pour tout compact $K \subset X \setminus \{x\}$, et tout compact $L \subset Y \setminus \{y\}$, l'ensemble

$$\{\phi \in \Phi', \phi(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini.

On dit que Φ a la propriété de convergence si tout $\Phi' \subset \Phi$ infini contient un écroulement.

REMARQUE 3.4. — Si Φ est un écroulement de (x, y) alors Φ^{-1} est un écroulement de (y, x) .

LEMME 3.5. — Φ a la propriété de convergence si et seulement si, pour toute suite d'éléments distincts (ϕ_n) de Φ , il existe une sous-suite (n_k) et deux points $x \in X$ et $y \in Y$ tels que ϕ_{n_k} converge uniformément sur les compacts de $X \setminus \{x\}$ vers y .

DÉMONSTRATION. Si Φ a la propriété de convergence et si (ϕ_n) est une suite, alors il existe une sous-suite (n_k) et deux points $x \in X$ et $y \in Y$ tels que (ϕ_{n_k}) est un écroulement de $\{x, y\}$. Forcément, $\phi_n(z)$ tend vers y pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, sinon on contredirait la condition de l'écroulement. Si la convergence n'est pas uniforme sur les compacts de $X \setminus \{x\}$, alors on peut trouver un compact $L \subset Y \setminus \{y\}$ qui contient une infinité de termes de $\phi_n(K)$, avec n distincts.

La réciproque est du même ordre. ■

PROPOSITION 3.6. — Un ensemble Φ a la propriété de convergence si et seulement si Φ est proprement discontinu sur $\Theta(X)$.

DÉMONSTRATION. Supposons que Φ ait la propriété de convergence. Soit (ϕ_n) une suite d'éléments distincts. Supposons qu'il existe des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) qui convergent respectivement vers x , y et z et telles que les suites $(\phi_n(x_n))$, $(\phi_n(y_n))$ et $(\phi_n(z_n))$ convergent vers x' , y' et z' . Si x , y et z sont trois points distincts de X , alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe $a \in X$ et $b \in Y$ tels que $(\phi_n|_{X \setminus \{a\}})$ converge uniformément sur les compacts vers b . On peut de plus supposer que $x, y \neq a$. Du coup, $(\phi_n(x_n))$ et $(\phi_n(y_n))$ tendent vers b i.e., $x' = y' = b$. Ceci montre que Φ est proprement discontinu.

Réciproquement, supposons que Φ est proprement discontinu. Soit (ϕ_n) une suite d'éléments distincts. Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) des suites qui convergent respectivement vers x , y et z . Supposons que les limites sont distinctes. Du coup, quitte à extraire une sous-suite il existe $b, b' \in Y$, tels que, $(\phi_n(x_n))$ et $(\phi_n(y_n))$ tendent vers b et $(\phi_n(z_n))$ tend vers b' .

On distingue deux cas. Le premier est $b \neq b'$.

Soit c différent de b et b' . On a $(\phi_n(x_n), \phi_n(z_n), c)$ qui tend dans $\Theta(Y)$ vers (b, b', c) , donc $\phi_n^{-1}(\phi_n(x_n), \phi_n(z_n), c) = (x_n, z_n, \phi_n^{-1}(c))$ tend vers le bord de $\Theta(X)$: $\phi_n^{-1}(c)$ tend vers

x ou z . Si on remplace x et x_n par y et y_n , alors $\phi_n^{-1}(c)$ tend vers y ou z : $\phi_n^{-1}(c)$ ne peut tendre que vers z .

Nous allons alors montrer que, quitte à extraire une sous-suite, $(\phi_n|_{X \setminus \{z\}})$ converge uniformément sur les compacts vers b .

Soit maintenant K un compact de $X \setminus \{z\}$, et supposons que la convergence n'est pas uniforme vers b . Il existe une suite (w_n) de K telle que $\phi_n(w_n)$ reste hors d'un voisinage de b . Puisque K est compact, on peut supposer que la suite est convergente vers un point w , et que $w \neq x$ (sinon, on remplace x par y dans l'argument qui suit).

Les triplets (w_n, x_n, z_n) restent dans un compact de $\Theta(X)$, donc $\phi_n(w_n, x_n, z_n)$ tend vers le bord : $\phi_n(w_n)$ tend vers b ou b' . Or, $(\phi_n^{-1}(c), w_n, x_n)$ reste aussi dans un compact de $\Theta(X)$, donc $\phi_n(w_n)$ tend vers c ou b : il s'agit de b . On obtient ainsi une contradiction.

Le second cas ($b = b'$) se ramène au premier avec l'astuce de ci-dessus : considérons $c \in Y \setminus \{b\}$, et notons $c_n = \phi_n^{-1}(c)$. Quitte à extraire une sous-suite, (c_n) tend vers un point $c' \in X$. On remplace (z_n) par (c_n) et on obtient le même résultat : Φ a la propriété de convergence. ■

On peut légèrement améliorer cette proposition :

PROPOSITION 3.7. — *Si Φ est proprement discontinu sur $\Theta(X)$ alors Φ a la propriété de convergence sur $\Theta(X) \cup \partial\Theta(X)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas d'une suite (ϕ_n) d'éléments distincts telle que $(\phi_n|_{\partial\Theta(X) \setminus \{a\}})$ converge sur les compacts vers $b \in \partial\Theta(Y)$ et de montrer que la convergence est uniforme sur les compacts de $(\Theta(X) \cup \partial\Theta(X)) \setminus \{x\}$. On considère n'importe quelle sous-suite (φ_n) de (ϕ_n) et une suite (θ_n) de $\Theta(X)$ (le cas $\partial\Theta(X)$ est connu par la Proposition 3.6). On écrit $\theta_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ et on suppose que cette suite converge vers $\theta = \{x, y, z\}$.

Si $\theta \in \Theta(X)$, alors on peut supposer que $x, y \neq a$. Du coup, $(\varphi_n(x_n))$ et $(\varphi_n(y_n))$ tendent vers b et $\varphi_n(\theta_n)$ aussi dans $\Theta(X) \cup \partial\Theta(X)$.

Si $\theta \in \partial\Theta(X) \setminus \{a\}$, alors θ correspond à un point $x \in X \setminus \{a\}$. Du coup, on peut supposer que (x_n) et (y_n) tendent vers x . Comme $x \neq a$, les suites $\varphi_n(x_n)$ et $\varphi_n(y_n)$ tendent toutes deux vers b . Donc $\varphi_n(\theta_n)$ tend vers b . ■

DÉFINITION 3.8 (Groupe de convergence). — *Un groupe Γ est un groupe de convergence si Γ agit par homéomorphismes sur un compact (métrique) et que cette action est proprement discontinue sur les triples. On dit que l'action est uniforme si l'action est cocompacte sur $\Theta(X)$.*

REMARQUE 3.9. — Soit Γ est un groupe de convergence qui opère sur un espace X ; si $(\gamma_n)_n$ est un écroulement de base (a, b) , alors $(\gamma \circ \gamma_n)_n$ est un écroulement de base $(a, \gamma(b))$, et $(\gamma \circ \gamma_n \circ \gamma^{-1})_n$ est un écroulement de base $(\gamma(a), \gamma(b))$.

DÉFINITION 3.10 (Ensemble limite). — *L'ensemble limite d'un groupe de convergence Γ est l'ensemble des points qui sont base d'un écroulement de Γ .*

Si Γ est un groupe de convergence uniforme, on verra que l'ensemble limite est tout X .

THÉORÈME 3.11. — *Si Γ agit proprement et discontinûment sur un espace hyperbolique géodésique propre X par isométries, alors Γ est un groupe de convergence uniforme sur ∂X et $X \cup \partial X$.*

La démonstration repose de manière essentielle sur l'observation fondamentale suivante.

Supposons que Γ agisse par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et que $f : X \rightarrow Y$ est une application continue surjective propre et Γ -équivariante.

- *Γ agit proprement discontinûment sur X si et seulement si Γ agit proprement discontinûment sur Y .*
- *L'action de Γ est cocompacte sur X si et seulement si l'action de Γ est cocompacte sur Y .*

DÉMONSTRATION. On suppose que X est δ -hyperbolique. On considère l'ensemble $Y \subset X \times \Theta(\partial X)$ des points $(a, \{x_1, x_2, x_3\})$ tels qu'il existe un triangle géodésique $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$ dont la distance de a à chaque côté est au plus une constante $D \geq 4\delta$. Comme les triangles sont 4δ -fins, cet ensemble est non vide et fermé. On peut choisir D assez grand de sorte que la projection de Y sur X soit surjective. De plus, les projections de Y sur $\Theta(\partial X)$ et X sont continues surjectives et Γ -équivariantes. Donc l'action propre, discontinue et cocompacte de Γ sur X induit une action propre, discontinue et cocompacte de Γ sur Y , puis sur $\Theta(\partial X)$. Donc Γ est un groupe de convergence uniforme sur ∂X .

Le passage à $X \cup \partial X$ se fait en remarquant que Γ agit par homéomorphismes uniformément quasimöbius sur $X \cup \partial X$ en considérant la métrique uniformisante. Par suite, la convergence vers un point de ∂X est uniforme sur $\partial X \cup X$. ■

En fait, B. Bowditch montre aussi la réciproque [6] :

THÉORÈME 3.12. — *Si Γ est un groupe de convergence uniforme, alors Γ est hyperbolique et son bord est homéomorphe à X .*

DÉMONSTRATION. Voir la démonstration du Théorème 0.1 dans [6]. Elle consiste en plusieurs étapes. D'abord, il s'agit de construire une notion de birapport $[\cdot]$ sur X quasi-invariant par l'action du groupe Γ . Ce birapport permet alors de définir une "quasimétrique" q sur $\Theta(X)$ au sens que l'inégalité triangulaire n'est vérifiée qu'à l'ajout d'une constante additive près : si $\theta = (x_j)$ et $\theta' = (x'_j)$ sont des points de $\Theta(X)$, on note

$$q(\theta, \theta') = \max \log[x_i, x'_k, x_j, x'_l].$$

Dans la troisième étape, on montre que les ensembles finis de $(\Theta(X), q)$ sont bien approximés par les arbres, ce qui permet d'avoir une hyperbolicité grossière sur $\Theta(X)$.

Enfin, puisque Γ est un groupe de convergence uniforme, on montre que cette hyperbolicité grossière se traduit par l'hyperbolicité du groupe.

En conclusion, on remarque que la donnée d'un groupe hyperbolique est équivalente à celle d'un groupe de convergence uniforme. De plus, en considérant des métriques dans la jauge conforme d'une métrique visuelle, ce groupe de convergence est aussi un groupe uniforme d'homéomorphismes quasimöbius (*cf.* Théorème 2.19). Cette remarque est le point de départ des travaux de M. Bonk et B. Kleiner et suggère une approche inspirée de la dynamique conforme : la définition de groupe de convergence uniforme implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, quel que soit $\{x, y, z\} \in \Theta(\partial X)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que $\min\{d_\varepsilon(\gamma x, \gamma y), d_\varepsilon(\gamma x, \gamma z), d_\varepsilon(\gamma z, \gamma y)\} \geq C$. Comme Γ est un groupe uniformément quasimöbius, on est dans la situation "expansion et distorsion bornée" qui a été tant exploitée par D. Sullivan dans le cadre des groupes kleinéens et des fractions rationnelles (voir aussi le Corollaire 3.25).

3.1. Quelques propriétés

DÉFINITION 3.13. — Soit $h : X \rightarrow X$ un homéomorphisme.

- (1) L'homéomorphisme h est hyperbolique si h a deux points fixes a et b et, pour tout voisinage U de a et V de b , il existe n tel que $h(X \setminus V) \subset U$ et $h(X \setminus U) \subset V$; de plus, $(X \setminus \{a, b\})/(h)$ est compact.
- (2) L'homéomorphisme h est parabolique si h a un seul point fixe a , et pour tous voisinages U, V de a , il existe n tel que $h^n(X \setminus U) \subset V$.
- (3) L'homéomorphisme h est elliptique s'il existe $k \geq 1$ tel que $h^k = \text{id}$.

PROPOSITION 3.14. — Soient Γ un groupe de convergence. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ est ou bien hyperbolique, ou bien parabolique, ou encore elliptique.

Commençons par un lemme qui nous permettra de reconnaître un élément hyperbolique.

LEMME 3.15. — S'il existe un ouvert U tel que $\overline{\gamma(U)} \subset U$, γ non elliptique, alors γ est hyperbolique, U contient le point attractif a , son complémentaire le point répulsif b , et

$$(X \setminus \{a, b\})/(\gamma) \simeq (\overline{U} \setminus \gamma(U))/(\gamma)$$

est compact.

DÉMONSTRATION. On note $A = \bigcap_{n \geq 0} \gamma^n(U)$ et $B = \bigcap_{n \leq 0} \gamma^n(X \setminus U)$. Les ensembles A et B sont compacts et disjoints. Puisque γ n'est pas elliptique, (γ^n) contient un écroulement de base (a, b) .

Pour tout x dans $U \setminus \{b\}$, on sait que $\gamma^n(x)$ tend vers a . De plus, toute limite de $(\gamma^n(x))_n$ doit être dans A par définition (intersection décroissante) et compacité de A : donc a doit être dans A . Le même raisonnement s'applique aussi à B et b . Donc on a $a \in A$ et $b \in B$. De plus, $\gamma(B) \subset B$ et, pour tout $x \neq a$, il existe (n_k) telle que $\gamma^{n_k}(x)$

tende vers a . En particulier, $B = \{b\}$ et de même, $A = \{a\}$. Du coup, a et b sont des points fixes. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.14. Si γ n'est pas d'ordre fini, alors la suite (γ^n) est infini. Il existe donc une sous-suite (n_k) et deux points $a, b \in X$ tels que γ^{n_k} tend vers b sur $X \setminus \{a\}$.

Si $a \neq b$, il existe un voisinage U de b et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\gamma^k(U)$ est relativement compact dans U . On en déduit que γ^k est hyperbolique par le Lemme 3.15, de points fixes a', b' . Pour tout $x \in U$, on a $\gamma^{nk+1}(x) = \gamma(\gamma^{nk}(x))$ qui tend vers $\gamma(b')$; mais on a aussi $\gamma^{nk+1}(x) = \gamma^{nk}(\gamma(x))$, donc si $\gamma(x) \neq a'$, alors $\gamma^{nk+1}(x)$ tend aussi vers b' . Donc $\gamma(b') = b'$. Du coup $b' = b$. De même pour a .

Soient U et V des voisinages de a et b respectivement de fermeture disjointes. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $\gamma^n(X \setminus U) \subset V$ et $\gamma^{-n}(X \setminus V) \subset U$. On note $K = X \setminus (\gamma^{n_0}(X \setminus \overline{U}) \cup \gamma^{-n_0}(X \setminus \overline{V}))$. Il s'agit d'un compact de $X \setminus \{a, b\}$.

Soit $x \in \gamma^{-n_0}(X \setminus V)$; il existe $m \geq 0$ tel que $\gamma^m(x) \in \gamma^{-n_0}(X \setminus V)$, mais $\gamma^{m+n}(x) \notin \gamma^{-n_0}(X \setminus V)$ pour tout $n \geq 1$. Du coup, $\gamma^m(x) \in U$, donc $\gamma^{m+n_0}(x) \notin \gamma^{n_0}(U)$. Par suite, $\gamma^{m+n_0}(x) \in K$. En procédant ainsi avec U , on en déduit que K contient un domaine fondamental de $X \setminus \{a, b\}$.

Si $a = b$, alors pour tout $x \notin \{a, \gamma^{-1}(a)\}$, on a $\gamma^n(a)$ qui tend vers a . On en déduit que $\gamma(a) = a$ comme ci-dessus. ■

LEMME 3.16. — Soit Γ un groupe de convergence sur X . Si (γ_n) est un écoulement de base (a, b) avec $a \neq b$, alors γ_n est hyperbolique pour tout n assez grand.

DÉMONSTRATION. Soient U et V des voisinages de a et b respectivement de fermeture disjointes. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $\gamma_n(X \setminus U) \subset V$ et $\gamma_n^{-1}(X \setminus V) \subset U$. Par le Lemme 3.15, on en déduit que γ_n admet un point fixe dans $\overline{U}$ et dans $\overline{V}$. ■

LEMME 3.17. — Soit Γ un groupe de convergence.

- (i) Un élément parabolique et un élément hyperbolique n'ont pas de points fixes en commun. Par conséquent, ils ne peuvent pas commuter.
- (ii) Deux éléments hyperboliques ont ou bien leurs points fixes disjoints ou bien confondus.

DÉMONSTRATION. (i) Soient h hyperbolique et p parabolique. On suppose que le point fixe a de p est attractif pour h . Notons b l'autre point fixe de h . On note $p_n = h^{-n} \circ p \circ h^n$. On a $p_n(a) = a$ et $p_n(b)$ qui tend vers b . Or les p_n sont tous disjoints car $h^n(p(b)) \neq b$ pour tout $n \geq 1$. Du coup, (p_n) contient un écoulement de base (a, b) et p_n est hyperbolique en vertu du Lemme 3.16 pour n assez grand. Ceci contredit que p est parabolique.

Si h et p permutent et a est le point fixe de p , alors $h(p^n(x)) = p^n(h(x))$ tend vers a pour tout x , donc $h(a) = a$.

(ii) Soient h_1 et h_2 deux transformations hyperboliques de points fixes (a_j, b_j) , $j = 1, 2$. On suppose que $a_1 = a_2 = a$ et $b_1 \neq b_2$. En vertu du Lemme 3.14, il existe un domaine fondamental compact K_j de h_j dans $X \setminus \{a_j, b_j\}$ pour $j = 1, 2$.

Si n est assez grand, alors $L = h_1^n(K_1)$ est dans un voisinage de a , mais a n'est pas dans L car h_1 est un homéomorphisme qui fixe a ; donc en particulier, L est disjoint de a et b_2 . Puisque K_2 est un domaine fondamental pour l'action de h_2 sur le complémentaire de $\{a, b_2\}$, pour n'importe quel point x de L , il existe un itéré m tel que $h_2^m(x)$ est dans K_2 : autrement dit, pour n assez grand, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $h_n = h_2^m \circ h_1^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$. Soit $x_n \in K_1 \cap h_n^{-1}(K_2)$.

Du coup, $\theta_n = (x_n, a, h_1^{-n}(b_2))$ reste dans un compact de $\Theta(X)$ car $x_n \in K_1$ et $h_1^{-n}(b_2)$ tend vers b_1 . Or $h_n(x_n) \in K_2$, $h_n(a) = a$ et $h_n(h_1^{-n}(b_2)) = b_2$, donc $h_n(\theta_n)$ reste aussi dans un compact de $\Theta(X)$. Du coup, on en déduit par propre discontinuité que $h_n = h_m$ pour certains n et m , et les points fixes de h_1 et h_2 coïncident. ■

COROLLAIRE 3.18. — *Si un groupe de convergence fixe un point $a \in X$, alors l'ensemble limite est constitué de un ou deux points.*

On dit qu'un groupe de convergence est *élémentaire* si son ensemble limite ne contient qu'un ou deux éléments.

PROPOSITION 3.19. — *Soit Γ un groupe de convergence non élémentaire d'ensemble limite X .*

- (1) *Si $a \neq b$ sont des points limites, alors il existe un écroulement de base (a, b) .*
- (2) *Les paires de points fixes d'éléments hyperboliques sont denses de $X \times X$.*

DÉMONSTRATION.

- (1) Soient $(\gamma_n)_n$ un écroulement de base (a, b') et $\tilde{\gamma}_n$ un écroulement associé ainsi à b (et a'). Si $a' = a$ ou $b' = b$, on a l'écroulement recherché. Sinon, soient $a_0, a'_0 \in X \setminus \{a, b\}$ distincts. On note $a_n = \gamma_n^{-1}(a_0)$ et $a'_n = \gamma_n^{-1}(a'_0)$. Ce sont deux suites distinctes qui convergent vers a .

Quitte à composer un des écroulements par un élément $\gamma \in \Gamma$, on peut supposer que $a' \neq b'$. Notons $\hat{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_n^{-1} \circ \gamma_n$, et soit $x \neq a$. On a $\gamma_n(x)$ qui tend vers $b' \neq a'$, donc $\hat{\gamma}_n(x)$ tend vers b par convergence uniforme. De même, $\hat{\gamma}_n^{-1}(x)$ tend vers a si $x \neq b$. Donc $(\hat{\gamma}_n)_n$ est un écroulement de base (a, b) .

- (2) Il suffit de montrer que les points fixes sont denses hors de la diagonale. Soient $a \neq b$. D'après ci-dessus, il existe un écroulement (γ_n) de base (a, b) . D'après le Lemme 3.16, γ_n est hyperbolique et ses points fixes sont aussi proches que l'on veut de a et b .

■

Points coniques. On dit qu'un point $x \in X$ est un *point conique* d'un groupe de convergence s'il existe une suite de points (x_n) qui tend vers x , $\theta \in \Theta$ et une suite d'homéomorphismes $\gamma_n \in \Gamma$ tels que, pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, $\gamma_n(x, x_n, z)$ tend vers θ .

LEMME 3.20. — Un point limite x est un point conique de Γ , si et seulement si Γ contient un écoulement (x, y) pour un certain point $y \in X \setminus \{x\}$ tel que $\gamma_n(x)$ ne tend pas vers y .

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $(\gamma_n)_n$ est un écoulement de base (b, a) . Puisque $\gamma_n(x, x_n, z)$ tend vers θ pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, le point a correspond à la limite commune de $(\gamma_n(z))_n$. De même, puisque la limite n'est pas uniforme au voisinage de x , on a $b = x$. Si $a = x$, on peut trouver $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = y \neq a$ puisque Γ est non élémentaire. Du coup, $(\gamma \circ \gamma_n)$ est un écoulement de base (x, y) , avec $x \neq y$.

Inversement, si (γ_n) est un écoulement de base (x, y) , et si $(\gamma_n(x))$ ne tend pas vers y , alors on se fixe $x_0 \in X \setminus \{\gamma_n(x), y\}$, et on note $x_n = \gamma_n^{-1}(x_0)$; cette suite tend vers x et $\gamma_n(z)$ tend vers y pour tout $z \neq x$. Du coup, x est conique. ■

REMARQUE 3.21. — Si x est un point limite non conique, alors pour tout écoulement de base (x, y) , on a $\gamma_n(z)$ qui tend vers y pour tout $z \in X$.

LEMME 3.22. — Un point parabolique n'est pas un point conique dans un groupe de convergence.

DÉMONSTRATION. Supposons que a est un point conique et qu'il existe un écoulement (γ_n) de base (a, b) avec a point fixe parabolique de $p \in \Gamma$, et $b \neq a$. Pour tout n assez grand, γ_n est hyperbolique, et $\gamma_n^{-1}\gamma_m$ aussi, pour m fixé et n assez grand. Posons $g_n = \gamma_n \circ p \circ \gamma_n^{-1}$. Cette suite est bien infinie, sinon un élément parabolique commuterait avec un élément hyperbolique. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (g_n) est un écoulement. Or $(\gamma_n(a))$ tend vers un point $c \neq b$, donc $g_n(\gamma_n(a)) = \gamma_n(a) \rightarrow c$; de même, $\gamma_n(z)$ tend vers b , donc $g_n(\gamma_n(z)) = \gamma_n(p(z))$ tend vers b si $p(z) \neq a$. On en déduit que (g_n) est un écoulement de base (a, b) , et donc que g_n est hyperbolique pour n assez grand (Lemme 3.15), ce qui contredit le fait que p est parabolique. ■

PROPOSITION 3.23. — *Soit Γ un groupe de convergence uniforme non élémentaire d'ensemble limite X alors tous les points sont coniques et il n'y a pas de points paraboliques.*

REMARQUE 3.24. — En fait, B. Bowditch montre aussi que si tous les points de X sont coniques pour un groupe de convergence qui opère sur un compact métrique parfait, alors il s'agit en fait d'un groupe de convergence uniforme (cf. Théorème 8.1 de [6]).

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$; comme X est parfait, il existe une suite (x_n) qui tend vers x . Soit $y \in X \setminus \{x\}$. Par cocompacité de l'action de G , il existe une suite (g_n) qui sépare les points $\{x, x_n, y\}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il s'agit d'un écroulement de base $\{a, b\}$. Le point répulsif est forcément $b = x$. Pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, $(g_n(x))$ tend donc vers a . Puisque tous les points sont coniques, on n'a pas d'éléments paraboliques en vertu du Lemme 3.22. ■

COROLLAIRE 3.25. — *La dynamique d'un groupe hyperbolique est minimale et, pour tout ouvert U , il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tels que $X \subset \cup \gamma_j(U)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Pour tout $a \neq x$, on considère $b \notin \{a, x\}$ et un écroulement de base (a, b) . Du coup, $\gamma_n(x)$ tend vers a .

Soit U un ouvert de X et soit V un autre ouvert. Il existe $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique avec ses points fixes dans U disjoints de V . Du coup, pour n assez grand, on a $\gamma^n(V) \subset U$ et $V \subset \gamma^{-n}(U)$. Du coup, $\Gamma.U$ recouvre X , et on peut en extraire un sous-recouvrement fini. ■

Propriétés topologiques du compact. On applique les résultats précédents pour en déduire des propriétés topologiques.

PROPOSITION 3.26. — *Si X est de dimension topologique n , alors tout ouvert est de dimension topologique n .*

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert de dimension minimale. Il en est de même de tous ses ouverts. Or le Corollaire 3.25 implique l'existence de $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$ tels que $X \subset \cup \gamma_j(U)$, donc X est de la même dimension que U . ■

PROPOSITION 3.27. — *Si X admet un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors X est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le Corollaire 3.25 implique l'existence de $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$ tels que $X \subset \cup \gamma_j(U)$, donc X est une variété topologique compacte de dimension n .

Soit γ un élément hyperbolique de points fixes a et b ; on considère des voisinages U et V de a et b homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ et de fermetures disjointes; on note $f_U, f_V : \mathbb{R}^n \rightarrow U, V$ ces homéomorphismes. Quitte à itérer γ , on peut supposer que $\gamma(X \setminus V) \subset U$. On écrit $B = f_U(B(0, 1))$. Quitte à itérer γ , on peut supposer que $\gamma(X \setminus f_U(B(0, 1/2))) \subset U$. On a donc $X = V \cup \gamma B$.

Il suffit de montrer que $V \setminus \overline{\gamma f_U(B(0, 1))}$ est une boule pour conclure. Notons $S = f_V^{-1} \gamma f_U(\mathbb{S}^{n-1})$: il s'agit d'une sphère plongée dans $\mathbb{R}^n$, donc son complémentaire à deux composantes connexes par un théorème de Brouwer. La composante non bornée correspond à $\gamma(B)$, et c'est donc une boule. Pour l'autre composante, le théorème de Schönflies généralisé permet de conclure puisque S admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times]-1, 1[$.

Autre méthode. On considère un élément hyperbolique $g \in G$ de points fixes a et b . Soit U un voisinage de a disjoint de b ; quitte à prendre un itéré de g , on peut supposer que $g(U)$ est relativement compact dans U . Du coup, pour U homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $X \setminus \{a\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Du coup X est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$. ■

Capacité de Bowditch. On suppose ici que G est un groupe de convergence uniforme opérant sur un espace compact X parfait non vide.

Un anneau de X est par définition une paire ordonnée de compacts non vides disjoints $A = (A^-, A^+)$ tels que $X \setminus (A^- \cup A^+) \neq \emptyset$.

Si K est compact, on écrit $K < A$ si K est contenu dans l'intérieur de A^- et $K > A$ si K est contenu dans l'intérieur de A^+ . Si A et B sont des anneaux, on écrit $A < B$ si $\overline{X \setminus A^+} < B$.

Puisque l'action est cocompacte, il existe un compact $\Theta_0 \subset \Theta(X)$ tel que, pour $\theta \in \Theta(X)$, il existe $g \in G$ tel que $g(\theta) \in \Theta_0$. On choisit un recouvrement fini $\{\overline{U_j(\theta^j)} = U(x_1^j) \times U(x_2^j) \times U(x_3^j)\}_{j=1, \dots, \ell}$, où les $U(x_k^j)$ sont des voisinages de x_k^j , où $X \setminus \bigcup_k U(x_k^j) \neq \emptyset$, et où $\theta^j = (x_i^j) \in \Theta_0$.

On note $\mathcal{A}_0$ l'ensemble de tous les anneaux de la forme $(\overline{U(x_a^j)}, \overline{U(x_b^j)})$ lorsque l'on parcourt $\{x_1^j, x_2^j, x_3^j\}$, $j = 1, \dots, \ell$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des anneaux obtenus en faisant opérer G sur $\mathcal{A}_0$.

DÉFINITION 3.28 (capacité de Bowditch). — Si K et L sont disjoints, on note $Cap(K, L)$ l'inverse du supremum des entiers $n \geq 1$ tels qu'il existe des anneaux $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathcal{A}$ tels que $K < A_1 < \dots < A_n < L$, et ∞ s'il n'y en a pas.

LEMME 3.29. — Soient E, F deux compacts disjoints. Si $Cap(E, F)$ est nulle, alors E ou F est un singleton.

DÉMONSTRATION. Par définition, pour chaque entier n , il existe n anneaux tels que

$$E < A_1^n < A_2^n < \dots < A_n^n < F.$$

Pour chaque anneau, on considère $g_j^n \in G$ tel que $g_j^n(A_j^n) \in \mathcal{A}_0$.

L'ensemble $H = \{g_j^n\}_{j,n}$ est infini, car $\mathcal{A}_0$ est fini. De plus, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'un seul anneau $A \in \mathcal{A}_0$ est atteint. H étant infini, il contient donc un écoulement (g_n) de base $\{a, b\}$: convergence vers a sur $X \setminus \{b\}$. Or, a ne peut être dans A^- et dans A^+ à la fois, donc on peut supposer qu'il n'est pas dans A^- . Par suite, $g_n^{-1}|_{A^-}$ tend uniformément vers b , et $g_n^{-1}(A^-)$ contient E par construction. On en déduit que E est un seul point : b . ■

Réciproquement, on a aussi.

LEMME 3.30. — Soit K un compact strict de X . Soit $x \in X \setminus K$. Alors $Cap(\{x\}, K) \leq 1$, et la capacité est en fait nulle.

DÉMONSTRATION. Soit (x_n) tendant vers x . Il existe un écroulement (g_n) de base (x, a) tel que, pour tout $y \in X$, $g_n(x, x_n, y) \in \Theta_0$. Puisque K ne contient pas x , $(g_n(K))$ tend vers b uniformément. Par construction de $\mathcal{A}_0$, il existe un anneau $A \in \mathcal{A}_0$ tel que $g_n(x) < A < b$. Du coup, pour n assez grand, on a aussi $g_n(x) < A < g_n(K)$, soit $x < g_n^{-1}(A) < K$, et $Cap(\{x\}, K) \leq 1$. Par récurrence, on construit une suite d'anneaux "emboîtés" (A_n) en considérant les paires (x, A_n^+) . ■

Notes. Cette capacité est introduite par B. Bowditch pour démontrer le Théorème 3.12 : cela lui permet de définir un birapport *hyperbolique* invariant par l'action du groupe (et lui donner ainsi une structure de groupe quasimöbius).

3.2. Espace d'espaces

Le but de ce paragraphe est de définir une topologie sur l'ensemble des espaces métriques et de donner des critères de compacité.

3.2.1. *Distance de Hausdorff dans un espace fixé.* Soit Z un espace métrique. Si $X, Y \subset Z$, on note

$$\partial(X, Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

On a $\partial(X, Y) = 0$ si et seulement si $\overline{X} \subset \overline{Y}$. On définit par

$$d_H(X, Y) = \max\{\partial(X, Y), \partial(Y, X)\}$$

la *distance de Hausdorff* entre X et Y . On dira qu'une suite $X_n \subset Z$ tend vers X si $d_H(X_n, X) \rightarrow 0$. En notant $V_\varepsilon(X) = \{x \in Z, d(x, X) < \varepsilon\}$, cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $X_n \subset V_\varepsilon(X)$ et $X \subset V_\varepsilon(X_n)$.

PROPOSITION 3.31. — *Soit X un espace métrique propre. L'ensemble des compacts non vides de X muni de la distance de Hausdorff est un espace métrique complet.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que d_H est une distance sur les compacts non vides de Z . Soient A, B et C des compacts de Z . On suppose que $\partial(A, C) = d(a, C)$. Soient $b \in B$ et $c \in C$; on a

$$\partial(A, C) \leq |a - b| + |b - c| \leq d(a, B) + d(b, C)$$

si b et c sont bien choisis. Du coup

$$\partial(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$$

et on obtient l'inégalité triangulaire en permutant les rôles de A et C .

Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de compacts (non vides). Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d_H(K_n, K_{n_0}) \leq 1$, donc $\cup K_n$ est relativement compact puisque X est supposé propre.

On note

$$L_n = \overline{\cup_{m \geq n} K_m}.$$

La suite (L_n) est une suite décroissante de compacts non vides, donc l'intersection L est compacte non vide.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe n_ε tel que, si $n \geq n_\varepsilon$, alors $d_H(K_n, K_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$ donc $d_H(L_{n_\varepsilon}, K_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$ et $d_H(L_{n_\varepsilon}, L) \leq \varepsilon$. On en déduit que (K_n) tend vers L . ■

Application. Système itéré de fonctions. Soit $A_1, \dots, A_n$ des applications affines contractantes. Il existe un unique compact K tel que $K = \cup A_j(K)$.

Une ε -approximation Y d'un espace X est un sous-ensemble $Y \subset X$ tel que $d_H(Y, X) < \varepsilon$. On dira qu'un ensemble Y est ε -séparé si, pour tout $y \in Y$, $d(y, Y \setminus \{y\}) \geq \varepsilon$. Rappelons qu'un ε -réseau $R \subset X$ est une ε -approximation de X qui est ε -séparé. On parlera de $(\varepsilon, \varepsilon')$ -réseau pour une ε -approximation ε' -séparée. L'existence de réseaux peut être déduit du Lemme de Zorn.

PROPOSITION 3.32 (Critère de convergence). — *Soient Z un espace métrique et $(X_n), X \subset Z$ des ensembles fermés.*

- (a) *Si $X_n \rightarrow X$, alors pour tous $\varepsilon' > \varepsilon > 0$, pour tout ε -réseau R de X , il existe une suite R_n de $(\varepsilon', \varepsilon/3)$ -réseaux de X_n tels que $d_H(R, R_n) \rightarrow 0$.*
- (b) *Si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε -réseau R de X et une suite de ε -réseaux $R_n \subset X_n$ telle que $d_H(R_n, R) \rightarrow 0$, alors $d_H(X_n, X) \rightarrow 0$.*

DÉMONSTRATION.

- (a) Soient $\varepsilon > 0$ et R un ε -réseau de X . Soit $0 < \eta < \varepsilon/3$. Il existe n_η tel que, pour $n \geq n_\eta$, on ait $d_H(X_n, X) < \eta$. De plus, pour tout $x_i \in R$, il existe $x_i^n \in X_n$ tel que $|x_i - x_i^n| < \eta$.

On note $R_n = \{x_i^n\}$. Montrons que si $\eta < \min\{\varepsilon, (\varepsilon' - \varepsilon)\}/3$, alors R_n est un $(\varepsilon', \varepsilon/3)$ -réseau de X_n .

Soit $x^n \in X_n$. Il existe $x \in X$ tel que $|x - x^n| < \eta$. De plus, il existe $x_i \in R$ tel que $|x - x_i| \leq \varepsilon$, donc $|x^n - x_i^n| \leq \varepsilon + 2\eta \leq (2/3)\varepsilon' + (1/3)\varepsilon \leq \varepsilon'$. Donc R_n est une ε' -approximation de X_n . De plus,

$$|x_i^n - x_j^n| \geq |x_i - x_j| - (|x_i^n - x_i| + |x_j^n - x_j|) \geq \varepsilon - 2\eta \geq \varepsilon/3.$$

Donc R_n est aussi $(\varepsilon/3)$ -séparé.

Par conséquent, pour tout n assez grand, il existe n_k et un $(\varepsilon', \varepsilon/3)$ -réseau R_{n_k} de X_{n_k} tel que $d_H(X_{n_k}, X) \leq 1/k$. Or $||x_i^k - x_j^k| - |x_i - x_j|| \leq 2/k$, donc

$$\begin{cases} |x_i^k - x_j^k| \leq (1 + 2/k\varepsilon)|x_i - x_j| \\ |x_i - x_j| \leq (1 + 2/k\varepsilon)|x_i^k - x_j^k| \end{cases}$$

et $d_L(R, R_{n_k})$ tend vers 0.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $R_n(\varepsilon)$ tend vers $R(\varepsilon)$, alors

$$d_H(X, X_n) \leq 2\varepsilon + d_H(R_n(\varepsilon), R(\varepsilon)) \leq 3\varepsilon.$$

■

THÉORÈME 3.33. — *Si Z est un espace métrique compact, alors l'ensemble des compacts non vide de Z forme un ensemble séquentiellement compact pour la topologie de Hausdorff.*

LEMME 3.34. — Si Z est un espace métrique compact, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que tout compact K de Z peut être recouvert par $N(\varepsilon)$ boules de rayon ε centrées sur K .

DÉMONSTRATION. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on considère un recouvrement fini de Z par des boules de rayon $\varepsilon/2$. On note $N(\varepsilon)$ le nombre de ces boules. Pour chacune de ces boules B , pour chaque $x \in B$, on a $B \subset B(x, \varepsilon)$. Donc, si K est compact, alors il est recouvert par au plus $N(\varepsilon)$ boules. ■

Soit K un espace métrique compact. On considère la suite $(N_k)_{k \geq 1}$ des entiers obtenus par le lemme précédent en prenant $\varepsilon = 1/2^k$.

On note

$$A_k = \left\{ (n_j)_{1 \leq j \leq k} \in \prod_{1 \leq j \leq k} [1, N_j] \right\} \quad \text{et } p_k : A_{k+1} \rightarrow A_k$$

l'application $(n_j)_{1 \leq j \leq k+1} \mapsto (n_j)_{1 \leq j \leq k}$. On définit

$$A = \varprojlim (A_k, p_k) = \left\{ (a_k) \in \prod_{k \geq 1} A_k, p_k(a_{k+1}) = a_k \right\}.$$

Cet espace est compact, et on peut définir une ultra-métrique d_A comme suit.

$$d_A((a_k), (b_k)) = \frac{1}{2^{\min\{j, a_j \neq b_j\}}}.$$

LEMME 3.35. — Il existe une application $I : A \rightarrow K$ surjective et 2-Lipschitz.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}^1 = \{B_j^1\}_{1 \leq j \leq N_1}$ un recouvrement par N_1 boules de rayon $1/2$. On définit $I_1(n) = x_n$, le centre de B_n^1 . On suppose que, jusqu'au rang $n \geq 1$, on a construit des applications $I_k : A_k \rightarrow K$ telles que

- (a) $I_k(A_k)$ est une $(1/2^k)$ -approximation de K ;
- (b) Pour chaque k , $I_{k+1}(a) \in B(I_k p_k(a), 1/2^k)$, pour tout $a \in A_{k+1}$.

Pour chaque $a \in A_n$, $B_a = B(I_n(a), 1/2^n)$ est recouvert par N_{n+1} boules

$$\mathcal{B}_a = \{B(x_j^a, 1/2^{n+1})\}_{1 \leq j \leq N_{n+1}}.$$

On définit $I_{n+1}(a, j) = x_j^a$. Par définition, $I_{n+1}(\{a\} \times [1, N_{n+1}])$ est une $1/2^{n+1}$ -approximation de B_a . Puisque ces boules recouvrent K , on obtient (a) pour $k = n + 1$. De même, (b) est vérifié par construction puisque $p_n(a, j) = a$.

D'après (b), si $a = (a_k) \in A$, alors $(I_k(a_k))_k$ est une suite de Cauchy. On définit alors

$$I(a) = \lim I_k(a_k).$$

On note que $I(a) \in B(I_k(a_k), 1/2^k)$ pour chaque k .

D'après (a) et (b), pour tout $x \in K$, on peut trouver une suite de boules dans chaque recouvrement qui contiennent x . Autrement dit, I est surjective.

Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ des points de A . On suppose que $d_A(a, b) = 1/2^k$. Du coup, $a_k = b_k$, et $I(a), I(b) \in B(I_k(a_k), 1/2^k)$, donc $|I(a) - I(b)| \leq 1/2^{k-1} \leq 2d_A(a, b)$. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.33. Soit (X_n) une suite de compacts de Z . Le lemme précédent nous construit un espace métrique A et une suite d'applications $I^n : A \rightarrow Z$ 2-lipschitziennes telles que $I^n(A) = X_n$. Cette suite est donc équicontinue et le théorème d'Ascoli nous extrait une sous-suite convergente vers une application 2-lipschitzienne $I : A \rightarrow K$. On note $X = I(A)$. On a

$$d_H(X_n, X) \leq \sup_{a \in A} |I_n(a) - I(a)|$$

d'où le théorème. ■

3.2.2. Distance de Hausdorff-Gromov. On étend la topologie de Hausdorff aux espaces métriques de la manière suivante [8]. Si X et Y sont deux espaces métriques, on note

$$d_{HG}(X, Y) = \inf d_H(f(X), g(Y))$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$ dans un espace métrique Z que l'on fait aussi varier. On peut bien sûr se restreindre à $Z = f(X) \cup g(Y)$.

LEMME 3.36. — Deux espaces métriques compacts sont à distance nulle pour la métrique de Hausdorff-Gromov si et seulement si ils sont isométriques. La métrique de Hausdorff-Gromov définit une distance sur les espaces compacts à isométrie près.

DÉMONSTRATION. Si X et Y sont deux espaces isométriques alors ils sont à distance nulle pour la métrique de Hausdorff-Gromov par définition. Réciproquement, s'ils sont à distance nulles, alors il existe des espaces métriques (Z_n) et des plongements isométriques $f_n : X \rightarrow Z_n$ et $g_n : Y \rightarrow Z_n$ tels que $d_H(f_n(X), g_n(Y)) \leq 1/n$.

Du coup, si $x \in X$, il existe pour chaque n un point $y_n = y_n(x) \in Y$ tel que $|f_n(x) - g_n(y_n)| \leq 1/n$. L'espace Y étant supposé compact, on peut extraire une sous-suite convergente dans Y de $\{y_n\}$.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble dénombrable dense de X . Par un procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite telle que, pour chaque $x \in \mathcal{D}$, la suite $\{y_n(x)\}$ converge dans Y vers un point $\iota(x)$.

On remarque que si $x, x' \in \mathcal{D}$, alors

$$|y_n(x) - y_n(x')| = |x - x'| \pm (|x - y_n(x)| + |x' - y_n(x')|) = |x - x'| \pm 2/n.$$

Du coup, on a

$$|\iota(x) - \iota(x')| = |x - x'|$$

et cette application admet un prolongement unique en un plongement isométrique $\iota : X \rightarrow Y$.

Il reste à montrer que ι est une surjection. Pour cela, on considère $y \in Y$. Pour chaque n , il existe $\hat{x}_n \in X$ tel que $|f_n(\hat{x}_n) - g_n(y)| \leq 1/n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $(\hat{x}_n)$ est convergente vers un point $\hat{x} \in X$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - \hat{x}| \leq \varepsilon$. Si n est assez grand, alors $|\hat{x} - \hat{x}_n| \leq \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y| &\leq |g_n(y_n(x)) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\hat{x})| + |f_n(\hat{x}) - f_n(\hat{x}_n)| + |f_n(\hat{x}_n) - g_n(y)| \\ &\leq (1/n) + |x - \hat{x}| + |\hat{x} - \hat{x}_n| + 1/n \\ &\leq (2/n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que ι est surjective, donc une isométrie entre X et Y .

Il reste l'inégalité triangulaire à montrer. Soient X, Y, Z trois espaces métriques compacts. On note d_1 la métrique sur $X \cup Y$ et d_2 sur $Y \cup Z$ les métriques qui réalisent la distance de Hausdorff-Gromov à ε près et qui coïncident avec les métriques intrinsèques de X, Y et Z . On définit, pour $x \in X$ et $z \in Z$,

$$d_3(x, z) = \inf_{y \in Y} \{d_1(x, y) + d_2(y, z)\}.$$

Il faut vérifier la validité de l'inégalité triangulaire pour d_3 , qui est laissée au lecteur; la conclusion suit. ■

DÉFINITION 3.37 (Famille uniformément compacte). — *On dit qu'une famille de compacts est uniformément compacte si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que chaque compact de la famille puisse être recouvert par $N(\varepsilon)$ boules de rayon ε .*

Les compacts non vides d'un espace métrique compact forment une famille uniformément compacte.

M. Gromov montre

THÉORÈME 3.38. — *Une famille d'espace uniformément compacte est relativement compacte pour la topologie de Hausdorff-Gromov.*

La démonstration originale (§6 dans [7]) montre que l'on peut se ramener au cas précédent :

LEMME 3.39. — Si (X_n) est une suite d'espaces métriques uniformément compacts, alors il existe un espace métrique compact Z et des plongements isométriques $h_n : X_n \rightarrow Z$.

DÉMONSTRATION. Puisque les X_n sont uniformément compacts, le Lemme 3.35 nous construit un espace métrique A et une suite d'applications $I^n : A \rightarrow X_n$ 2-lipschitziennes et surjective.

Soit Z l'ensemble des applications 2-lipschitziennes de A à valeurs réelles modulo les constantes. Cet espace est compact par le théorème d'Ascoli.

Les applications

$$h_n : x \in X_n \mapsto (a \in A \mapsto |x - I^n(a)|)$$

sont des plongements isométriques de X_n dans Z . En effet, pour tout $a \in A$, on a $|(h_n(x) - h_n(y))(a)| \leq |x - y|$ par l'inégalité triangulaire ; de plus, pour chaque $x \in X_n$, il existe $a \in A$ tel que $I^n(a) = x$. Du coup,

$$|(h_n(x) - h_n(y))(a)| = |y - I^n(a)| = |x - y|,$$

ce qui montre que h_n est bien une isométrie. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.38. On applique le Lemme 3.39 à $(X_n)_n$ qui nous construit un espace métrique compact Z , puis le Théorème 3.33 : la limite que l'on obtient dans Z est en particulier une limite au sens de Hausdorff-Gromov. ■

Convergence des fonctions. On étudie maintenant les limites de fonctions lorsque les espaces sont convergents. Si (X_n) tend vers X , on peut trouver des distances d_n sur $X_n \cup X$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand alors $d_H(X_n, X) < \varepsilon$ pour la métrique d_n dans $X_n \cup X$. Cette interprétation permet de parler de convergence de suites : une $(x'_n) \in \prod X_n$ converge vers $x' \in X$ si $d_n(x'_n, x') \rightarrow 0$.

DÉFINITION 3.40 (module de continuité). — *Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, un module de continuité est une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\omega(t) \rightarrow 0$ avec t et, pour tous $x, y \in X$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Une fonction f admet un module de continuité si et seulement si f est uniformément continue. L'implication est claire, pour la réciproque, on pose

$$\omega_f(r) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq r\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ telle que, pour $x, y \in X$ avec $|x - y| \leq \alpha$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Par suite, $\omega_f(\alpha) \leq \varepsilon$. On en déduit que ω_f est bien un module de continuité.

On remarque aussi que si une famille de fonctions est uniformément équicontinue, il existe un module de continuité qui ne dépend pas de la fonction de la famille.

DEFINITION. — Soient (X_n) et (Y_n) deux suites d'espaces métriques propres qui convergent vers des espaces X et Y . Soit $(f_n : X_n \rightarrow Y_n)$ une suite d'applications continues. On dit que (f_n) converge vers $f : X \rightarrow Y$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$, pour tout $z \in B_X(x, R)$, il existe $\alpha > 0$, tel que, pour tout n assez grand, si $z_n \in X_n$ vérifie $d_n(z_n, z) < \alpha$ alors $d_n(f_n(z_n), f(z)) < \varepsilon$.

On obtient ainsi

THÉORÈME 3.41. — Soient (X_n) et (Y_n) deux suites d'espaces métriques uniformément compacts qui convergent vers des espaces compacts X et Y . Soit $(f_n : X_n \rightarrow Y_n)$ une suite d'applications continues qui admet un module de continuité uniforme.

Il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers une application continue $f : X \rightarrow Y$.

En particulier, si la suite (f_n) est isométrique, L -Lipschitz, η -quasisymétrique, ou η -quasimöbius, il en est de même de la limite.

DÉMONSTRATION. Soit ω le module de continuité uniforme de (f_n) . On note A le compact obtenu par le Lemme 3.35 pour X_n , et on considère les espaces Z_X et Z_Y obtenus par le Lemme 3.39 pour X_n et Y_n respectivement. On identifie dans la suite X_n avec son plongement dans Z_X de sorte que I^n tend vers I uniformément.

On obtient ainsi une suite d'applications $g_n = h_n \circ f_n \circ I^n : A \rightarrow Z_Y$ uniformément équicontinue. Le théorème d'Ascoli nous permet d'extraire une sous-suite convergente vers une application $g : A \rightarrow Z_Y$. Soient $z, w \in X$. Il existe $a, b \in A$ tel que $I(a) = z$ et $I(b) = w$. Du coup,

$$|g(a) - g(b)| = |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))| \pm (|g_n(a) - g(a)| + |g_n(b) - g(b)|)$$

donc

$$|g(a) - g(b)| = \lim |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))|.$$

Du coup, $g(a) = g(b)$ si $I(a) = I(b)$. Autrement dit, il existe $f : X \rightarrow Z_Y$ telle que $g = f \circ I$. Cette application f a le même module de continuité :

$$|f(z) - f(w)| = \lim |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))| \leq \lim \omega(|I^n(a) - I^n(b)|) = \omega(|z - w|).$$

■

3.2.3. *Espaces métriques pointés.* Si (X, x) et (Y, y) sont des espaces métriques pointés, on définit

$$d_{HG}((X, x), (Y, y)) = \inf d_H(f(X), g(Y)) + |f(x) - g(y)|,$$

où les applications $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des plongements isométriques dans un espace métrique Z . Enfin, on dira qu'une suite (X_n, x_n) tend vers (X, x) si, pour tout $R > 0$, $d_{HG}(B(x_n, R_n), x_n), (B(x, R), x) \rightarrow 0$.

M. Gromov montre

THÉORÈME 3.42. — *Soit (X_n, x_n) une suite d'espaces métriques propres telles que les familles $\{\overline{B(x_n, r)}\}_n$ sont uniformément compactes pour chaque $r > 0$. Il existe une sous-suite (n_k) et un espace (X, x) tels que (X_{n_k}, x_{n_k}) tend vers (X, x) .*

L'espace limite X est donc propre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.42. Par procédé diagonal, le Théorème 3.38 permet d'extraire une sous-suite telle que, pour tout k , $(\overline{B(x_n, k)} \subset X_n)_n$ tend vers un espace métrique Z_k .

On remarque que le Théorème 3.41 nous fournit des plongements isométriques $\iota_i^j : Z_i \rightarrow Z_j$ pour $i \leq j$. On a donc affaire à un système inductif d'espaces métriques.

On note X la limite inductive de ces espaces. Par définition, X est un espace métrique fourni avec des plongements isométriques $\iota_k : Z_k \rightarrow X$ tels que

- (1) $X = \cup_{k \geq 1} \iota_k(Z_k)$;
- (2) si $i \leq j$, alors $\iota_i = \iota_j \circ \iota_i^j$.

■

Convergence de fonctions. On étend le Théorème 3.41 aux limites d'espaces pointés.

THÉORÈME 3.43. — *Soient (X_n, x_n) et (Y_n, y_n) deux suites d'espaces métriques propres qui convergent vers des espaces propres (X, x) et (Y, y) . On suppose que les boules de même rayon sont uniformément compactes. Soit $(f_n : X_n \rightarrow Y_n)$ une suite d'applications continues. Si*

- (i) $|f_n(x_n) - y_n|$ reste bornée,
- (ii) il existe un module de continuité uniforme de (f_n) sur chaque boule $B(x_n, R)$ et chaque R ,

alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers une application continue $f : X \rightarrow Y$.

En particulier, si la suite (f_n) est isométrique, L -Lipschitz, η -quasisymétrique, ou η -quasimöbius, il en est de même de la limite.

DÉMONSTRATION. Pour tout $R > 0$, on note ω_R le module de continuité uniforme de (f_n) . On a $f_n(B(x_n, R)) \subset B(y_n, R')$, pour $R' = \omega_R(R) + \sup |f_n(x_n) - y_n|$. On note A_R le compact obtenu par le Lemme 3.35 pour les boules de rayon R de X_n , et on considère l'espace Z_R^Y obtenu par le Lemme 3.39 pour les boules $B(y_n, R')$ dans Y_n . Comme pour le Théorème 3.41, le théorème d'Ascoli nous permet d'extraire une sous-suite convergente vers une application $g : A_R \rightarrow Z_R^Y$, avec I^n tendant aussi vers une application $I : A_R \rightarrow X$. De plus,

$$|g(a) - g(b)| = \lim |f_n(I_n(a)) - f_n(I_n(b))|$$

donc $g(a) = g(b)$ si $I(a) = I(b)$. Autrement dit, il existe $f : B_X(x, R) \rightarrow Z_R^Y$ telle que $g = f \circ I$. Cette application f a le même module de continuité ω_R .

Par un procédé diagonal, on construit ainsi une sous-suite convergente sur tout X . ■

Espaces tangents. On dit que (X, d) est un espace doublant s'il existe une constante C_1 telle que tout ensemble de diamètre d peut être recouvert par au plus C_1 ensembles de diamètre au plus $d/2$. De manière équivalente, il existe une fonction $C_1 : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que tout ensemble de diamètre d peut être recouvert par au plus $C_1(\varepsilon)$ ensembles de diamètre au plus εd . Une telle fonction s'appelle une *fonction de recouvrement*. On peut toujours choisir $C_1(\varepsilon) = Ce^{-\beta}$.

Si X est un espace doublant, alors toutes les boules renormalisées sont uniformément compactes. Autrement dit, pour n'importe quelle suite (r_n) d'échelles, n'importe quelle suite de points (x_n) de X , la famille $\{(X, x_n, r_n d)\}$ est relativement compacte pour la topologie de Hausdorff-Gromov. On parle d'espaces tangents faibles pour ces limites, et d'espaces tangents quand (x_n) est constante et (r_n) tend vers ∞ .

3.3. Propriétés analytiques

On commence par un résultat d'unicité :

THÉORÈME 3.44. — *Soient X et X' deux espaces métriques compacts parfaits. On suppose qu'il existe un groupe Γ qui agit sur X et sur X' comme un groupe de convergence uniforme quasimöbius. Alors X et X' sont quasisymétriques.*

DÉMONSTRATION. Le Théorème 3.12 nous fournit un homéomorphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ Γ -équivariant. Il semble difficile de contourner cette théorie pour construire directement φ . L'idée serait de considérer $\theta \in \Theta(X)$ et $\theta' \in \Theta(Y)$, de définir $\phi : \Gamma.\theta \rightarrow \Gamma.\theta'$ en posant $\phi(\gamma.\theta) = \gamma.\theta'$, et de montrer que ϕ se prolonge en un homéomorphisme φ .

Si φ n'est pas quasisymétrique, alors il existe $t > 0$, $x_n, y_n, z_n \in X$ tels que $|x_n - y_n| \leq t|x_n - z_n|$ et $|\varphi x_n - \varphi y_n| \geq n|\varphi x_n - \varphi z_n|$. Puisque

$$\text{diam } X' \geq n|\varphi x_n - \varphi z_n|$$

on a $|x_n - z_n| \rightarrow 0$. Du coup, il existe un écroulement (γ_n) de base (a, b) tel que $(\gamma_n x_n, \gamma_n y_n, \gamma_n z_n)$ soit m -séparé. Par continuité uniforme de φ et φ^{-1} , les triplets-images par φ sont m' séparés pour une constante $m' > 0$.

Soit $w \in X \setminus \{a\}$; on a $|w - y_n| \leq 2|w - z_n|$ pour n assez grand et $d(\varphi w, \{\varphi x_n, \varphi y_n, \varphi z_n\}) \geq m'' > 0$. Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{nm''}{(\text{diam } X')^2} &\leq \frac{|\varphi x_n - \varphi y_n| |\varphi z_n - \varphi w|}{|\varphi x_n - \varphi z_n| |\varphi y_n - \varphi w|} \leq \eta \left(\frac{|\varphi \gamma_n x_n - \varphi \gamma_n y_n| |\varphi \gamma_n z_n - \varphi \gamma_n w|}{|\varphi \gamma_n x_n - \varphi \gamma_n z_n| |\varphi \gamma_n y_n - \varphi \gamma_n w|} \right) \\ &\leq \eta \left(\frac{(\text{diam } X')^2}{m' |\varphi \gamma_n y_n - \varphi \gamma_n w|} \right) \end{aligned}$$

donc $\gamma_n y_n$ tend vers b . En particulier, $|\gamma_n z_n - \gamma_n w| \geq m/2$ pour n assez grand. Or

$$\frac{m^2/2}{|\gamma_n y_n - \gamma_n w| \text{diam } X} \leq \frac{|\gamma_n x_n - \gamma_n y_n| |\gamma_n z_n - \gamma_n w|}{|\gamma_n x_n - \gamma_n z_n| |\gamma_n y_n - \gamma_n w|} \leq \eta \left(\frac{|x_n - y_n| |z_n - w|}{|x_n - z_n| |y_n - w|} \right) \leq \eta(2t)$$

ce qui est impossible. ■

PROPOSITION 3.45. — *Si G est un groupe de convergence uniforme quasimöbius qui opère sur un compact parfait non vide X , alors X est uniformément parfait.*

La démonstration suivra de plusieurs lemmes. Nous allons utiliser la capacité de Bowditch pour montrer la proposition. Pour cela, il faudra d'abord comparer cette capacité avec des données plus géométriques.

Nous allons définir un système d'anneaux $\mathcal{A}$ adapté à cette situation métrique. Il existe $m > 0$ telle que, pour $\theta \in \Theta(X)$, il existe $g \in G$ tel que $g(\theta)$ est m -séparé. On note Θ_0 l'ensemble des triplets m -séparés. On choisit un recouvrement fini $\{U_j(\theta^j) = B(x_1^j, m/3) \times B(x_2^j, m/3) \times B(x_3^j, m/3)\}_{j=1, \dots, \ell}$, où $\theta^j = (x_i^j) \in \Theta_0$, et on définit $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}$ comme avant.

Si E, F sont deux compacts disjoints de X , on définit leur distance relative par

$$\Delta(E, F) = \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}.$$

LEMME 3.46. — Il existe un homéomorphisme croissant $\widehat{\eta} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous compacts E, F disjoints, tout $g \in G$,

$$\Delta(g(E), g(F)) \leq \widehat{\eta}(\Delta(E, F)).$$

DÉMONSTRATION. Soient $x, y \in E \times F$ tels que $|gx - gy| = \text{dist}(gE, gF)$. On considère $z \in E$ et $w \in F$ tels que $|x - z| \geq \text{diam } E/2$, et $|y - w| \geq \text{diam } F/2$. On a

$$\frac{\text{dist}(gE, gF)}{\min\{\text{diam } gE, \text{diam } gF\}} \leq \langle gx, gy, gz, gw \rangle \leq \widehat{\eta}(\langle x, y, z, w \rangle) \leq \widehat{\eta}(2\Delta(E, F)).$$

■

LEMME 3.47. — Il existe une suite croissante (δ_k) telle que, si E, F sont des compacts disjoints, alors

$$\Delta(E, F) \leq \delta_k$$

si $\text{Cap}(E, F) \geq 1/k$.

DÉMONSTRATION. On procède par l'absurde. On suppose qu'il existe k et une suite (E_n, F_n) de compacts disjoints tels que $\text{Cap}(E_n, F_n) \geq 1/k$ mais $\Delta(E_n, F_n)$ tend vers l'infini. On suppose que $\text{diam } E_n \leq \text{diam } F_n$, et on choisit $x_n \in E$, $y_n, z_n \in F$ tels que $|x_n - y_n| = \text{dist}(E_n, F_n)$ et $|y_n - z_n| \geq \text{diam } F_n/2$.

On a $\text{dist}(E_n, F_n) = \text{diam } E_n \Delta(E_n, F_n)$, donc si la distance ne tend pas vers 0, alors $\text{diam } E_n$ tend vers 0, et on contredit la borne sur la capacité. De plus, $\text{diam } E_n \rightarrow 0$, car $\text{dist}(E_n, F_n) \leq \text{diam } X$.

On se donne $g_n \in G$ tel que $g_n(x_n, y_n, z_n) \in \Theta_0$.

L'ensemble $\{g_n\}_n$ est infini puisque $|x_n - y_n|$ tend vers 0.

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$d(g_n(x_n), g_n(F_n)) \geq c.$$

Pour chaque n , on prend $w_n \in F_n$ tel que $d(g_n(x_n), g_n(w_n)) = d(g_n(x_n), g_n(F_n))$. Si $g_n(w_n)$ a la même limite que $(g_n(z_n))$ pour tout n , alors on peut prendre $c = m/2$. Sinon, on peut supposer $|g_n(w_n) - g_n(z_n)| \geq c' > 0$, et on a

$$\frac{|g_n(w_n) - g_n(z_n)|}{|g_n(w_n) - g_n(x_n)|} \frac{|g_n(y_n) - g_n(x_n)|}{|g_n(z_n) - g_n(y_n)|} \leq \eta \left(\frac{|w_n - z_n|}{|w_n - x_n|} \frac{|y_n - x_n|}{|z_n - y_n|} \right).$$

Or $|w_n - x_n| \geq |y_n - x_n|$ et $|w_n - z_n| \leq \text{diam } F_n \leq 2|z_n - y_n|$ donc

$$\text{dist}(g_n(x_n), g_n(F_n)) \geq \frac{c'}{\text{diam}^2 X \cdot \eta(2)},$$

ce qui établit l'existence de c .

Or, on a $\Delta(g_n(E_n), g_n(F_n))$ qui tend vers l'infini, donc $\text{diam } g_n(E_n) \rightarrow 0$, ce qui montre que $\text{dist}(g_n(E_n), g_n(F_n)) \geq c/2$ pour n assez grand.

Quitte à extraire une sous-suite, on a $g_n(F_n)$ qui tend vers un compact K , $g_n(E_n)$ qui tend vers un point $x \notin K$. Or, $\text{Cap}(\{x\}, K)$ est nulle, donc $\text{Cap}(g_n(E_n), g_n(F_n))$ est certainement plus petit que $1/k$ pour n assez grand : contradiction. ■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.45. Soient $x \in X$ et $r \leq m/3$.

Si $B(x, r)$ n'est pas compact, alors il existe une suite (x_n) de $B(x, r)$ qui tend hors de la boule, donc $|x - x_n| \geq r/2$ pour n assez grand.

On note $E = B(x, r)$ et $F = X \setminus B(x, r)$ qui sont compacts, et $\text{diam } F \geq m$. Or $E \cup F = X$, donc $\text{Cap}(E, F) = \infty$. Du coup, $\Delta(E, F) \leq \delta_0$. Soient $y \in E$, $z \in F$ tels que $|y - z| = \text{dist}(E, F)$, et soit $y' \in E$, tel que $|x - y'| \geq \text{diam } E/2$. On a

$$|x - z| - |y - x| \leq |y - z| \leq \delta_0 \text{diam } E \leq 2\delta_0 |x - y'|,$$

donc

$$r \leq |y - x| + 2\delta_0 |x - y'|.$$

On conclut que

$$|x - y| \vee |x - y'| \geq r(1/2 \wedge 1/4\delta_0).$$

Donc il existe $\lambda \in]0, 1[$ telle que si $B(x, r)$ est compacte, $B(x, r) \setminus B(x, \lambda r) \neq \emptyset$.

Pour conclure, si $r \geq m/3$, on trouve une constante $\lambda_1 > 0$ telle que $B(x, r) \setminus B(x, \lambda_1 r) \neq \emptyset$ par compacité. ■

PROPOSITION 3.48. — *Si Γ est un groupe de convergence uniforme quasimöbius qui agit sur un espace métrique compact parfait X , alors X est uniformément parfait et doublant.*

DÉMONSTRATION. Le Théorème 3.12 implique que G est hyperbolique. Du coup, la Proposition 3.45 affirme que ∂G est uniformément parfait. Par le Théorème 3.44, X et ∂G sont quasisymétriques, donc X est uniformément parfait.

Montrons que X est doublant. Tout d'abord, pour tout $r \leq \text{diam } X$, tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel $N(r, \varepsilon)$ tel que si $K \subset X$ est de diamètre au moins r , alors K peut être recouvert par au plus $N(r, \varepsilon)$ boules de rayon $\varepsilon \text{diam } K$.

On se donne maintenant K un compact de petite taille ($\text{diam } K \leq m$). Soient $x, y \in K$ tels que $|x - y| = \text{diam } K$. Comme X est uniformément parfait, il existe $z \in B(x, |x - y|/2) \setminus \{x\}$ tel que $|x - z| \asymp \text{diam } K$.

Soit maintenant $\gamma \in \Gamma$ tel que $\{\gamma x, \gamma y, \gamma z\}$ soit un ensemble m -séparé. Du coup, γK est de diamètre au moins m .

On se fixe $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera ci-dessous. On recouvre γK par $N(m, \varepsilon)$ boules de rayon $\varepsilon \text{diam } \gamma K$. Soit B une de ces boules, on considère $a, b \in B$ tels que $|g^{-1}(a) - \gamma^{-1}b| \gtrsim \text{diam } \gamma^{-1}(B)$. D'après le Théorème 2.32 appliqué à $\gamma^{-1} : \gamma(K) \cup \{\gamma z\} \rightarrow K \cup \{z\}$, on obtient

$$\frac{\text{diam } \gamma^{-1}B}{\text{diam } K} \lesssim \frac{|\gamma^{-1}(a) - \gamma^{-1}(b)|}{\text{diam } K} \leq \mu_{-1} \left(\frac{|a - b|}{\text{diam } \gamma(K)} \right) \leq \mu_{-1}(\varepsilon).$$

Par suite, si ε est assez petit, alors $\text{diam } \gamma^{-1}B \leq \text{diam } K/2$, donc K peut être recouvert par $N(m, \varepsilon)$ ensembles de diamètre au plus $\text{diam } K/2$. Donc X est doublant. ■

Remarque. Il serait intéressant de trouver une démonstration de l'uniforme perfection de X sans utiliser le Théorème 3.12.

On déduit de cette proposition l'existence d'espaces tangents. Plus précisément, on a

COROLLAIRE 3.49. — *Supposons que Γ est un groupe de convergence uniforme quasimöbius sur un espace métrique parfait X . Soit (r_n) une suite qui tend vers 0, et soit (x_n) une suite de points de X . Pour tout espace tangent (Z, z) associé à cette suite, il existe $b \in X$ et un homéomorphisme quasimöbius $\varphi : Z \rightarrow X \setminus \{b\}$.*

DÉMONSTRATION. On suppose que $(X/r_n, x_n)$ tend vers un espace métrique (Z, z) . Pour tout n , on considère (y_n, z_n) tels que $|x_n - y_n|, |y_n - z_n|, |z_n - x_n| \asymp r_n$. Ceci est possible car X est uniformément parfait.

Soit maintenant $\gamma_n \in \Gamma$ tel que $\{\gamma_n x_n, \gamma_n y_n, \gamma_n z_n\}$ soit m -séparé.

Quitte à extraire une sous-suite, (γ_n) est un écroulement de $\{a, b\}$, et, quitte à renuméroter, on peut supposer que $\text{dist}(b, \{\gamma_n x_n, \gamma_n y_n\}) \geq (1/C) > 0$ car les points (x_n, y_n, z_n) étant r_n proches, la limite Z ne change pas vraiment en changeant un point base par un autre. Par suite, $\{x_n, y_n, z_n\}$ tend vers a .

Soit $w \in X \setminus \{b\}$, et soit $w' \in X \setminus \{a\}$. On peut supposer que $|\gamma_n x_n - w| \geq m/2$. Comme γ_n^{-1} est η -quasimöbius, il vient

$$\frac{|\gamma_n^{-1}w - x_n|}{|\gamma_n^{-1}w - w'|} \cdot \frac{|w' - y_n|}{|x_n - y_n|} \leq \eta \left(\frac{|w - \gamma_n x_n|}{|w - \gamma_n w'|} \cdot \frac{|\gamma_n w' - \gamma_n y_n|}{|\gamma_n x_n - \gamma_n y_n|} \right).$$

Mais puisque $\gamma_n w'$ tend vers b et $\gamma_n^{-1}w$ tend vers a , on obtient

$$(1/C) \cdot \frac{|\gamma_n^{-1}w - x_n|}{r_n} \leq \eta \left(\frac{(\text{diam } X)^2}{|w - b|m} \right).$$

Donc, pour tout compact $K \subset X \setminus \{b\}$, $(\gamma_n^{-1}|_K)$ est une famille uniformément équicontinue. On peut donc extraire une limite qui sera η -quasimöbius. ■

DÉFINITION 3.50 (quasiconvexité). — *Un espace métrique X est quasiconvexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x, y \in X$, il existe une courbe γ qui relie x à y telle que $\text{diam } \gamma \leq C|x - y|$.*

PROPOSITION 3.51 (M. Bonk & B. Kleiner). — *Sous les mêmes hypothèses, si on suppose que X est connexe et sans point de coupure globale, alors X est quasiconvexe, donc localement connexe.*

DÉMONSTRATION. Comme X est connexe, pour toute paire de points $\{x, y\}$, il existe une chaîne $\{x_j\}_{0 \leq j \leq N}$ telle que $x_0 = x$, $x_N = y$ et $|x_j - x_{j+1}| \leq |x - y|/2$. Montrons que N peut être choisi indépendant de (x, y) .

On procède par l'absurde. On considère une suite (x_n, y_n) telle que la longueur de toute chaîne est au moins n . Si $\limsup |x_n - y_n| > 0$, on obtient une contradiction avec le fait que X est connexe. Donc $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. On considère la suite $(X, d/|x_n - y_n|, x_n)$. D'après le Corollaire 3.49, cette suite converge vers un espace connexe Z car X est sans point de coupure globale. Or la limite de (x_n) et la limite de (y_n) dans Z ne peuvent appartenir à la même composante de Z : contradiction.

Soient encore $x \neq y \in \partial X$. On construit par récurrence une suite croissante de chaînes $\{x_j^n\}_{0 \leq j \leq N_n}$ telle que $x_0 = x$, $x_{N_n}^n = y$, $|x_j^n - x_{j+1}^n| \leq |x - y|/2^n$ et avec $N_n \leq N^n$.

Pour tout n , on a

$$\text{diam } \{x_j^n\}_{0 \leq j \leq N_n} \leq |x - y|(N/2) \sum_{k=0}^n 1/2^k \leq N|x - y|.$$

Par suite $\overline{\{x_j^n\}_{j,n}}$ est compact connexe et son diamètre est au plus $N|x - y|$. Ceci montre que ∂X est quasiconvexe et on obtient aussi un module de connexité locale, donc ∂X est localement connexe. ■

On a vu que X admettait un module de connexité locale linéaire. En fait, on peut même montrer que X est linéairement localement connexe.

DÉFINITION 3.52 (connexité locale linéaire). — *Un espace métrique X est linéairement localement connexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, on ait :*

- (1) *tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;*
- (2) *tout couple de points dans $X \setminus \bar{B}(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \bar{B}(x, (1/C)r)$.*

PROPOSITION 3.53. — *Si G est un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius sur X , sans point de coupure, alors X est linéairement localement connexe.*

DÉMONSTRATION. La Proposition 3.51 affirme que X est K -quasiconvexe.

On note que, pour tout $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ est connexe par arcs. En effet, notons Ω l'ensemble des paires $\{a, b\}$ qui peuvent être jointes par un arc dans $X \setminus \{x\}$. Puisque X est compact, connexe et localement connexe, il s'agit d'un ouvert non vide de $X \setminus \{x\} \times X \setminus \{x\}$. On en déduit aussi que son complémentaire est ouvert.

Soit $R > 0$ fixé. Soient x, y, z tels que $R \leq |x - z| \leq |x - y|$ et $|z - y| \leq (1/2K)|x - y|$. Alors il existe un arc γ dans $B(y, K|y - z|)$ qui relie y et z . Pour tout point $w \in \gamma$, on a

$$|w - x| \geq |x - y| - |w - y| \geq (1/2)|x - y|$$

donc $\gamma \cap B(x, R/2) = \emptyset$. Plus généralement, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tous $y, z \notin B(x, R)$ peuvent être joint par un arc hors de $B(x, cR)$. Si ce n'est pas le cas, on trouve des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) telles que $R \leq |x_n - z_n| \leq |x_n - y_n|$ et $|z_n - y_n| \geq (1/2K)|x_n - y_n|$ et telles que tout arc qui relie y_n à z_n visite $B(x_n, R/n)$; on peut aussi supposer que ces suites ont des limites x , y et z qui doivent être distinctes. Puisque $X \setminus \{x\}$ est connexe par arcs, il existe un arc qui relie y et z loin de x . On peut alors construire des petits arcs qui relie y à y_n et z à z_n . On en déduit une contradiction.

Puisque G est un groupe de convergence uniforme, il existe $m > 0$ telle que tout triplet de points peuvent être m -séparés par G . Notons c la constante obtenue ci-dessus avec $R = m$.

Supposons $y, z \notin B(x, R)$. Il existe $g \in G$ telle que $g(x, y, z)$ est m -séparé. Soit $\hat{\gamma}$ un arc qui relie $g(y)$ à $g(z)$ hors de $B(g(x), cm)$. Notons $\gamma = g^{-1}(\hat{\gamma})$. Soit w un point de γ . On suppose que $|w - y| \geq |y - z|/2$. Puisque g^{-1} est η -quasimöbius, on a

$$\frac{|x - z||y - w|}{|x - w||y - z|} \leq \eta \left(\frac{|gx - gz||gy - gw|}{|gx - gw||gy - gz|} \right) \leq \eta \left(\frac{\text{diam } X^2}{cm^2} \right)$$

donc

$$|w - x| \gtrsim \frac{|x - z||y - w|}{|y - z|} \gtrsim R.$$

■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Bonk & B. Kleiner, Rigidity for quasimöbius group actions, *J. Differential Geom.* **61** (2002), no. 1, 81–106.
- [2] M. Bonk & B. Kleiner, Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres, *Invent. Math.* **150** (2002), no. 1, 127–183.
- [3] M. Bonk & B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *prépublication*.
- [4] M. Bonk & B. Kleiner, Quasi-hyperbolic planes in hyperbolic groups, *prépublication*.
- [5] B. Bowditch, Convergence groups and configuration spaces, *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, 23–54, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [6] B. Bowditch, A topological characterisation of hyperbolic groups, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), no. 3, 643–667.
- [7] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **53** (1981), 53–73.
- [8] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Ed. J. Lafontaine and P. Pansu, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes. Translated from the French by Sean Michael Bates. *Progress in Mathematics*, 152. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

4. JAUGE D'UN GROUPE HYPERBOLIQUE

On a défini un groupe hyperbolique comme un groupe G opérant géométriquement sur un espace géodésique propre et hyperbolique X . Le Lemme de Svarc-Milnor affirme que ce groupe est de type fini, et quasi-isométrique à X . Du coup, cette action est bien définie à quasi-isométrie près entre espaces géodésiques propres. On s'intéresse ici à comprendre comment cette classe est définie sur le bord.

THÉORÈME 4.1. — *Si $\phi : X \rightarrow X$ est une (λ, c) -quasi-isométrie alors ϕ induit un homéomorphisme quasimöbius.*

DÉMONSTRATION. Comme φ est une quasi-isométrie et que le birapport mesure essentiellement la distance entre les segments géodésiques, le birapport est quasi-invariant. En passant à l'exponentielle et en utilisant que

$$d_\varepsilon(a, b) \asymp (1/\varepsilon) \exp -\varepsilon(a|b)_w \min\{1, \varepsilon|x - y|\},$$

on obtient

$$\frac{d_\varepsilon(\varphi(a), \varphi(b)) \cdot d_\varepsilon(\varphi(c), \varphi(d))}{d_\varepsilon(\varphi(a), \varphi(c)) \cdot d_\varepsilon(\varphi(b), \varphi(d))} \lesssim \max\left\{\left(\frac{d_\varepsilon(a, b) \cdot d_\varepsilon(c, d)}{d_\varepsilon(a, c) \cdot d_\varepsilon(b, d)}\right)^\lambda, \left(\frac{d_\varepsilon(a, b) \cdot d_\varepsilon(c, d)}{d_\varepsilon(a, c) \cdot d_\varepsilon(b, d)}\right)^{1/\lambda}\right\}.$$

■

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer la réciproque suivante, attribuée à M. Bonk, J. Heinonen et P. Koskela [1] (mais je ne sais pas trop où), voir aussi [2].

THÉORÈME 4.2. — *Soient X, X' deux espaces δ -hyperboliques propres, géodésiques et quasi-étoilés. On suppose que $\partial X, \partial X'$ munis de métriques visuelles sont doublants et uniformément parfaits. Si $\phi : \partial X \rightarrow \partial X'$ est un homéomorphisme quasisymétrique, alors X et X' sont quasi-isométriques.*

Si X et X' admettent des actions propres, discontinues et cocompactes de groupes par isométries, alors l'ensemble de ces hypothèses est satisfait. En particulier, ces groupes sont aussi quasi-isométriques. Ce résultat est dû à F. Paulin qui propose deux démonstrations [4] qui utilisent les actions de groupes explicitement.

On énonce d'abord qu'un homéomorphisme quasisymétrique admet un contrôle exponentiel.

THÉORÈME 4.3. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme, et supposons X uniformément parfait; si f est quasisymétrique, alors f est α -quasisymétrique, autrement dit, on peut choisir η de la forme*

$$\eta(t) = C \cdot \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}.$$

.

DÉMONSTRATION. Voir [3, Théorème 11.3].

On commence la démonstration proprement dite en étudiant les propriétés de ϕ , puis celles de X , X' et enfin on construit une extension $\Phi : X \rightarrow X'$ et on montre que cette extension est une quasi-isométrie. L'idée est de définir Φ de manière à ce que la distorsion soit respectée au voisinage du bord.

Propriétés de ϕ . D'après le Théorème 4.3, ϕ est α -quasisymétrique, et donc η -quasimöbius avec $\eta(t) = C \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$ d'après le Théorème 2.31 (ii). De plus, ∂X étant compact, on en déduit que ϕ est Hölder.

Propriétés de X, X' . On travaille sur X , X' héritant des mêmes propriétés avec des constantes éventuellement différentes. Il existe R_0 tel que, pour tout $x \in X$, $\mathcal{U}_w(x, R_0) \neq \emptyset$ car X est quasi-étoilé. Soient $R > R_0$ et $a \in \mathcal{U}_w(x, R)$. Si R est assez grand, alors le Lemme 2.25 et le Lemme 2.26 montrent que

$$B(a, C_1 e^{-\varepsilon|w-x|}) \subset \mathcal{U}_w(x, R) \subset B(a, C_2 e^{-\varepsilon|w-x|}).$$

Comme ∂X est uniformément parfait, il existe aussi $b \in \mathcal{U}_w(x, R)$ tel que $d_\varepsilon(a, b) \asymp e^{-\varepsilon|x-w|} \asymp e^{-\varepsilon(a|b)_w}$.

Construction de Φ . On se fixe deux points bases $w \in X$ et $w' \in X'$. On pose $\Phi(w) = w'$. Dans la suite, on notera, pour $x \in X$, $x' = \Phi(x)$.

Soit $x \in X$. Si $|w - x| \leq 2R$, alors on pose $\Phi(x) = w'$. Sinon, on considère a, b construits à l'aide de $\mathcal{U}_w(x, R)$. Comme ϕ est quasisymétrique, il existe $C'_1, C'_2 > 0$ telles que

$$B(a', C'_1 e^{-\varepsilon(a'|b')_{w'}}) \subset \varphi \mathcal{U}_w(x, R) \subset B(a', C'_2 e^{-\varepsilon(a'|b')_{w'}}).$$

On considère $x' \in [w', a']$ tel que $|x' - w'| = (a'|b')_{w'}$ et on note $\Phi(x) = x'$.

Propriétés de Φ . L'application ϕ est Hölder, donc, si $|x - w| \geq 2R$, alors

$$|x' - w'| = (a'|b')_{w'} \sim \log 1/d_\varepsilon(a', b') \leq C + \alpha \log 1/d_\varepsilon(a, b) \sim \alpha|x - w|.$$

De même, $|x' - w'| \geq C' + (1/\alpha) \log 1/d_\varepsilon(a, b) \sim (1/\alpha)|x - w|$.

Soient $x, y \in X$, et considérons $\{a, b\}$ associé à x et $\{c, d\}$ associé à y . Par approximation par les arbres, on obtient

$$|x - y| \sim (a|b)_w - (a|c)_w + (c|d)_w - (b|d)_w = [a : c : b : d].$$

Comme ϕ est quasimöbius, on a

$$|x' - y'| \sim [a' : c' : b' : d'] \leq (1/\alpha)[a : c : b : d] + C \sim (1/\alpha)|x - y|$$

et de même, $|x' - y'| \geq \alpha[a : c : b : d] - C \sim \alpha|x - y|$, donc Φ est un plongement quasi-isométrique.

On construit de même $\Psi : X' \rightarrow X$ à partir de ϕ^{-1} . On a $|\Phi \circ \Psi(x) - x| \leq C$ par construction. Donc Φ est une quasi-isométrie.

REMARQUE 4.4. — M. Bourdon propose une autre construction de Φ . L'idée est de regarder l'ensemble des géodésiques de X qui passent près de $x \in X$. En prenant l'image des extrémités de ces courbes, on reconstruit un faisceau de géodésiques dans X' . Ensuite, il suffit de montrer que ces géodésiques passent toutes près d'un point $x' \in X'$.

La jauge conforme d'un espace métrique X est l'ensemble des métriques sur X qui lui sont quasimétriques (par l'identité). On définit alors la jauge conforme d'un groupe hyperbolique est la jauge du bord de ce groupe muni d'une métrique visuelle, qui est bien définie.

Les propriétés d'un groupe hyperbolique invariantes par quasi-isométries deviennent des propriétés de la jauge, et respectivement. Par exemple, on a :

LEMME 4.5. — Soit $f : X \rightarrow X'$ un homéomorphisme η -quasimétrique.

- (1) Si X est linéairement localement connexe, alors X' aussi.
- (2) Si X est uniformément parfait, il en est de même pour X' .
- (3) Si X est doublant, alors X' est aussi doublant.

DÉMONSTRATION. Afin d'alléger l'exposition, on écrira les points de X par des lettres minuscules standards et leurs images en rajoutant un prime ($(x' = f(x))$). Les différentes démonstrations reposent sur le fait suivant. Soient $x, w \in X$ fixés, et soit $R > 0$. On note $d = |x - w|$ et $d' = |x' - w'|$. Si $|x - z| \leq R$ alors $|x' - z'| \leq \eta(|x - z|/d)d'$. Par suite, $f(B(x, R)) \subset B(x', \eta(R/d)d')$. De même, on a $f^{-1}(B(x', R')) \subset B(x, d/\eta^{-1}(d'/R'))$.

On trouve aussi que $f^{-1}(X \setminus B(x', R')) \subset X \setminus B(x, d\eta^{-1}(R'/d'))$ et $f(X \setminus B(x, R)) \subset X' \setminus B(x', d'/\eta(d/R))$.

- (1) Soient $x, y, z \in X$ et $R' > 0$ tels que $y', z' \in B(x', R')$. Quitte à réduire R' , on peut supposer que $(1/2)R' \leq |y' - x'| \leq R'$. On note $d = |x - y|$ et $d' = |x' - y'|$. On a donc $y, z \in B(x, d/\eta^{-1}(d'/R'))$. Par suite, il existe $K \subset B(x, Cd/\eta^{-1}(d'/R'))$ qui joint y à z . Du coup, $K' \subset B(x, \eta(C/\eta^{-1}(d'/R'))d')$. Or $\eta(C/\eta^{-1}(d'/R'))d' \leq \eta(C/\eta^{-1}(1/2))R'$, donc $K' \subset B(x', C'R')$ avec $C' = \eta(C/\eta^{-1}(1/2))$.

De même, soient $x', y' \notin B'$; quitte à agrandir le rayon de B' , on suppose que $|y' - x'| \leq 2R$. Il vient $x, y \notin B(x, d\eta^{-1}(R'/d'))$; donc il existe K qui relie y à z avec $K \cap B(x, d\eta^{-1}(R'/d')/C) = \emptyset$. Par suite, $K' \cap B(x', d'/\eta(d/(d\eta^{-1}(R'/d')/C))) = \emptyset$. Or $d'/\eta(C/\eta^{-1}(R'/d')) \geq (1/2)/\eta(C/\eta^{-1}(2))R'$, donc $K' \cap B(x', R'/C') = \emptyset$ avec $C' = (1/2)/\eta(C/\eta^{-1}(2))$.

- (2) Soient $x' \in X'$ et $R' < \text{diam } X'$. Comme X est uniformément parfait, il existe $\lambda < 1$ et une suite (w_n) telle que $\lambda^{n+1} \leq |x - w_n| \leq \lambda^n$. Soit n le plus petit indice

tel que $|f(x) - f(w_n)| \leq R'$. On a

$$|f(x) - f(w_n)| \leq R' \leq |f(x) - f(w_{n-1})| \leq \eta(1/\lambda)|f(x) - f(w_n)|$$

donc

$$\frac{|f(x) - f(w_n)|}{R'} \geq 1/\eta(1/\lambda).$$

■

- (3) Soit B un sous-ensemble de X' de diamètre fini, et soit $L = \text{diam } f^{-1}(B)$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $p \leq C_1(\varepsilon)$ ensembles $A_i \subset f^{-1}(B)$ de diamètre au plus εL telle que $f^{-1}(B) \subset \cup A_i$. Par suite les $f(A_i)$ recouvrent B et le Lemme 2.28 montre que $\text{diam } f(A_i) \leq \text{diam } B \eta(4\varepsilon)$. On conclut en prenant ε assez petit pour que $\eta(4\varepsilon) < 1/2$.

■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Bonk, J. Heinonen & P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*, Astérisque No. 270, 2001.
- [2] M. Bonk & O. Schramm, Embeddings of Gromov hyperbolic spaces, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 2, 266–306.
- [3] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] F. Paulin, Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord, *J. London Math. Soc. (2)* **54** (1996), no. 1, 50–74.

Peter Haïssinsky

LATP/CMI

Université de Provence

39, rue Frédéric Joliot-Curie

13453 Marseille cedex 13

France

Courriel : phaissin@cmi.univ-mrs.fr