9. **ESPACES HYPERBOLIQUES**

Les espaces et le groupes hyperboliques sont introduits par Gromov dans [Gro]. Dès lors, ils ont pris une importance considérable dans de nombreux sujets. De nombreuses notes ont été rédigées depuis, parmi elles [BH, A *et al.*, GdlH, CDP].

Notations.— On notera parfois la métrique $d(x,y) = |x-y|$. Si a, b sont des réelles positifs, on notera $a \asymp b$ s'il existe une constante universelle $u \geq 1$ telle que $a/u \leq b \leq ua$ et $a \sim b$ s'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que $|a-b| \leq C$. Si $A, B \subset X$ sont des sous-ensembles d'un espace métrique, la *distance de Hausdorff* est

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$$

ce qui signifie que $d_H(A,B) \leq D$ si A est dans D-voisinage de B et réciproquement.

Soit (X,d) un espace métrique géodésique propre (les boules fermées sont compactes).

Définition 9.1. — *Si X, Y sont deux espaces métriques, une application $f : X \to Y$ est un plongement isométrique si pour tous $x, x' \in X$, $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$; on dira que f est une isométrie si f est un plongement isométrique surjectif.*

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to X$ un plongement isométrique. On dit que f, ou $f(I)$, est une géodésique si $I = \mathbb{R}$, un rayon (géodésique) si $I = \mathbb{R}_+$ et un segment (géodésique) si I est un intervalle compact.

Un segment géodésique d'extrémités x et y sera noté $[x,y]$, même s'il n'est pas unique.

Produit de Gromov.— Soient $w, x, y \in X$. On note

$$(x|y)_w = (1/2)\{|x-w| + |y-w| - |x-y|\}\,.$$

Si $w' \in X$, alors $|(x|y)_{w'} - (x|y)_w| \leq |w - w'|$. De plus, si X est un arbre, il existe un unique $c \in [w,y] \cap [w,x] \cap [x,y]$ et $(x|y)_w = |w-c|$.

Définition 9.2. — *Un espace métrique est δ-hyperbolique si pour tous w, x, y, z, on a*

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta\,.$$

Triangles.— Un triangle Δ est la donnée de trois points x, y, z et de trois segments géodésiques $[x,y], [x,z]$ et $[y,z]$.

A un triangle, on associe un tripode T défini par trois extrémités $\bar{x}, \bar{y}$, et $\bar{z}$ et de centre c, tels que $|\bar{x} - c| = (y|z)_x$, $|\bar{y} - c| = (x|z)_y$ et $|\bar{z} - c| = (y|x)_z$. On constate que $|\bar{x} - \bar{y}| = |x - y|$, et de même pour les autres distances. Ainsi, il existe une application surjective $f_\Delta : \Delta \to T$ qui est une isométrie lorsqu'elle est restreinte à un segment. On appelle $f_\Delta^{-1}(c)$ le triple inscrit de Δ.

On dit que Δ est un triangle δ-fin si pour tous $u, v \in \Delta$, on a $|u-v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$.

LEMME 9.3. — Si X est δ-hyperbolique, alors les triangles sont 4δ-fins et

$$(x|y)_w \leq d(w,[x,y]) \leq (x|y)_w + 4\delta\,.$$

DÉMONSTRATION. On considère d'abord $u,v \in \Delta$ tels que $\bar{u}=\bar{v}$. On suppose que $u \in [x,y]$ et $v \in [x,z]$. On a $(u|v)_x \geq \min\{(u|y)_x,(y|z)_x,(z|v)_x\} - 2\delta$. Or $(u|y)_x = (v|z)_x = |\bar{x}-\bar{u}|$ et $(y|z)_x \geq |\bar{x}-\bar{u}|$, donc $(u|v)_x \geq |\bar{x}-\bar{u}| - 2\delta$ et

$$|u-v| \leq (|u-x|+|v-x|) - 2|\bar{x}-\bar{u}| + 4\delta = 4\delta\,.$$

Si u,v sont quelconques, on peut supposer qu'il existe u' sur la même arête que u tel que $\bar{u'}=\bar{v}$. Par suite, $|u-v| \leq |u-u'| + |u'-v| \leq |\bar{u}-\bar{v}| + 4\delta$, donc les triangles sont 4δ-fins.

Soit $z \in [x,y]$. Alors $|x-w| \leq |x-z| + |z-w|$ et $|y-w| \leq |y-z| + |z-w|$. Donc $(x|y)_w \leq |z-w| + (1/2)(|x-z|+|y-z|-|x-y|) = |z-w|$ car $|x-z|+|y-z| = |x-y|$. Du coup, $(x|y)_w \leq d(w,[x,y])$.

L'autre inégalité découle de la finesse des triangles : soit $z \in [x,y] \cap f_\Delta^{-1}(\{c\})$, alors

$$(x|y)_w = |f_\Delta(z) - f_\Delta(w)| \geq |w-z| - 4\delta.$$

■

Un *quadrilatère* désigne 4 points cycliquement ordonnés $\{x_j, j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$ munis d'un choix de segments géodésiques $[x_j, x_{j+1}]$.

COROLLAIRE 9.4. — *Si $Q = \{w,x,y,z\}$ est un quadrilatère dans un espace géodésique δ-hyperbolique, alors il existe $f_Q : Q \to T$ sur un arbre, isométrique sur chaque côté, tel que, pour tous $u,v \in Q$, on a*

$$|u-v| - 8\delta \leq |f_Q(u) - f_Q(v)| \leq |u-v|\,.$$

DÉMONSTRATION. On considère deux triangles $\{w,x,y\}$ et $\{w,y,z\}$ auxquels on associe les tripodes correspondants que l'on recolle isométriquement le long de l'image commune de $[w,y]$. Le corollaire suit en utilisant la finesse de ces triangles. ■

COROLLAIRE 9.5. — *Soit X un espace δ-hyperbolique.*

(1) *Si $r,r' : \mathbb{R}_+ \to X$ sont des rayons tels que $d_H(r,r') < \infty$, alors il existe $u \in [-d(r(0),r'(0)), d(r(0),r'(0))]$ tel que, pour tout $t \geq d(r(0),r'(0))$, on a $d(r(t),r'(t+u)) \leq 8\delta$.*

(2) *Si $\gamma,\gamma' : \mathbb{R} \to X$ sont des géodésiques telles que $d_H(\gamma,\gamma') < \infty$, alors il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $d(\gamma(t),\gamma'(t+u)) \leq 8\delta$.*

DÉMONSTRATION. On note $M = d_H(r,r')$ et $D = d(r(0),r'(0))$. Soient $s > M + D$ et $s' > 0$ tels que $|r(s) - r'(s')| \leq M$. On considère le quadrilatère $\{r(0), r(s), r'(s'), r'(0)\}$ soutenu par r et r', ainsi que l'application $f_Q : Q \to T$ définie par le corollaire 9.4 : il existe $t_s, t'_s \in [0, D]$ minimaux tels que $f_Q(r(t_s)) = f_Q(r'(t'_s))$ et, pour $t \in [0, s-(M+D)]$, on a $f_Q(r(t_s+t)) = f_Q(r'(t'_s+t))$. Ceci implique $|r(t_s+t) - r'(t'_s+t)| \leq 8\delta$. On fait tendre s vers l'infini : on peut extraire une suite de sorte que t_s et t'_s seront convergentes puisque ces paramètres sont dans $[0, D]$. Le résultat en découle.

On suppose maintenant $d_H(\gamma, \gamma') < \infty$. Le point précédent implique $d_H(\gamma, \gamma') \leq 8\delta$. On considère un quadrilatère $\{\gamma(-s), \gamma(s), \gamma'(s_+).\gamma'(s_-)\}$ de sorte que $s > 20\delta$ et $|\gamma(\pm s) - \gamma'(s_\pm)| \leq 8\delta$. L'argument précédent montre qu'il existe $u_s \in \mathbb{R}$ tel que $|\gamma(t) - \gamma'(t+u_s)| \leq 8\delta$ pour $|t| \leq s - 10\delta$. Or u_s réside dans un intervalle de compact de $\mathbb{R}$, donc un passage à la limite permettra de conclure comme ci-dessus. ■

THÉORÈME 9.6. — *Soit X un espace géodésique.*
- *Si tous les triangles sont δ-fins alors X est 2δ-hyperbolique.*
- *Si X est δ-hyperbolique, alors, il vérifie la condition de Rips : dans tout triangle, la distance d'un point aux deux côtés opposés est plus petite que 4δ.*
- *Si X vérifie la condition de Rips, avec constante δ, alors les triangles sont 4δ-fins.*

DÉMONSTRATION. Voir la proposition 2.21 de [GdlH].

COROLLAIRE 9.7. — *Les conditions de Rips et de finesse des triangles sont équivalentes à l'hyperbolicité.*

9.1. **Premières propriétés**

On décrit deux propriétés fondamentales des espaces métriques hyperboliques : leurs liens avec les arbres, et le lemme de poursuite des quasigéodésiques.

9.1.1. *Espaces hyperboliques et arbres.*

DÉFINITION 9.8. — *Un arbre métrique est un arbre simplicial muni d'une distance de longueur. Un arbre réel est un espace métrique géodésique T tel que toute paire de points est jointe par un unique arc.*

EXERCICE 9.9. — *Montrer qu'un espace géodésique est 0-hyperbolique si et seulement si c'est un arbre réel.*

THÉORÈME 9.10. — *Un espace métrique X est 0-hyperbolique si et seulement si X admet un plongement isométrique dans un arbre réel.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace 0-hyperbolique. D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que X se plonge isométriquement dans un espace géodésique 0-hyperbolique. On définit

$$\tilde{T} = \cup_{x \in X \setminus \{w\}} [0, |x - w|] \,.$$

On note $(t, x) \sim (t', x')$ si $t = t'$ et $t \leq (x|x')_w$: $\sim$ est une relation d'équivalence. Elle est clairement réflexive et symétrique. De plus, elle est transitive car X est 0-hyperbolique. On note $T = \tilde{T}/\sim$.

On définit
$$d((t,x),(t',x')) = t + t' - 2\min\{t, t', (x|x')_w\}\,.$$
On vérifie que d ne dépend que des classes de (t,x) et de (t',x'), donc cette fonction induit une application $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$. Montrons que d est une distance. Elle est symétrique par définition. Si $d((t,x),(t',x')) = 0$ alors $t + t' = 2\min\{t, t', (x|x')_w\}$. Par suite, $t = t'$ et $t \leq (x|x')_w$, donc $(t,x) \sim (t',x')$. Pour vérifier l'inégalité triangulaire, on se donne (t,x), (t',x') et (t'',x''). On a $t + t'' \leq t + 2t' + t''$ et $\min\{t,t',t'',(x|x')_w,(x'|x'')_w\} \leq \min\{t,t'',(x|x'')_w\}$ car X est 0-hyperbolique.

On note $\iota : X \to \tilde{T}$ l'application $x \mapsto (|x-w|, x)$. Il vient
$$d(\iota(x),\iota(x')) = |x-w| + |x'-w| - 2\min\{|x-w|,|x'-w|,(x|x')_w\} = |x-x'|$$
car $(x|y)_w \leq |x-w|$ pour tous $x,y \in X$. Donc ι est un plongement isométrique. Il reste à vérifier que T est 0-hyperbolique. ■

Arbres approximatifs.— Soient (X,w) un espace δ-hyperbolique et $k \geq 0$.

(i) Si $|X| \leq 2^k + 2$, alors il existe un arbre métrique pointé fini T et $\phi : X \to T$ tels que :
- $\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x-w|$,
- $\to$ $\forall x,y \in X$, $|x-y| - 2k\delta \leq |\phi(x)-\phi(y)| \leq |x-y|$.

(ii) S'il existe des sous-rayons $(X_i,w_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $n \leq 2^k$ tel que $X = \cup X_i$, alors, en notant $c = \max\{|w-w_i|\}$, il existe un arbre réel pointé T et $\phi : X \to T$ tels que
- $\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x-w|$,
- $\to$ $\forall x,y \in X$, $|x-y| - 2(k+1)\delta - 4c \leq |\phi(x)-\phi(y)| \leq |x-y|$.

Ce résultat permet d'exploiter simplement l'hyperbolicité de X comme nous le verrons par la suite. Sa démonstration requiert l'établissement de trois résultats intermédiaires.

LEMME 9.11. — Soit X un espace δ-hyperbolique. On note
- $\to$ $(x|y)' = \sup\min\{(x_{i-1}|x_i),\ 2 \leq i \leq L\}$, où le supremum est pris sur toutes chaînes finies $x_1,\ldots,x_L$ avec $x_1 = x$ et $x_L = y$,
- $\to$ $|x-y|' = |x-w| + |y-w| - 2(x|y)'$,
- $\to$ $x \sim y$ si $|x-y|' = 0$.

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence et $|\cdot|'$ est une distance sur $(X/\sim)$ qui en fait un espace 0-hyperbolique. De plus, pour tout $x \in X$, on a $|x-w|' = |x-w|$, et pour tous $x,y \in X$, $|x-y|' \leq |x-y|$.

DÉMONSTRATION. Montrons que $|x-z|' \leq |x-y|' + |y-z|'$. Soient $\varepsilon > 0$, $(x_1,\ldots,x_L)$ et $(y_1,\ldots,y_M)$ tels que $x_1 = x$, $x_L = y_1 = y$, $y_M = z$, et $\min\{(x_{i-1}|x_i)\} \geq (x|y)' - \varepsilon$ et $\min\{(y_{i-1}|y_i)\} \geq (y|z)' - \varepsilon$. Posons $z_i = x_i$ si $1 \leq i \leq L$ et $z_i = y_{i-L+1}$ si $L+1 \leq i \leq L+M-1$. Donc $(x|z)' \geq \min\{(z_{i-1}|z_i)\} \geq \min\{(x|y)',(y|z)'\} - \varepsilon$.

De plus, $|y-w| \geq \max\{(y|z_{L-1}),(y|z_{L+1})\} \geq \max\{(x|y)',(y|z)'\} - \varepsilon$, donc
$$(x|y)' + (y|z)' \leq (x|z)' + |y-w| + 2\varepsilon\,.$$

En utilisant la définition de $|\ |'$, on obtient l'inégalité triangulaire.

Par conséquent, $\sim$ est une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire implique la transitivité), et $|\cdot|'$ est une métrique sur $X/\sim$ qui en fait un espace 0-hyperbolique puisque $(x|z)' \geq \min\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (*cf.* ci-dessus).

D'autre part, pour tout $x \in X$, $(x|w) = 0$ ce qui implique $(x|w)' = 0$, donc

$$|x-w|' = |x-w| - 2(x|w)' = |x-w|.$$

De même, $(x|y)' \geq (x|y)$ donc $|x-y|' \leq |x-y|$. ■

Lemme 9.12. — Si $|X| \leq 2^k + 2$ alors pour toute chaîne $x_1, \ldots, x_L \in X$, on a

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j)\} - k\delta\,.$$

Démonstration. S'il existe j tel que $x_j = w$, alors $(x_1|x_L) \geq 0 = (x_{j-1}|x_j)$. On suppose donc que w ne figure pas dans la chaîne. De plus, si $L = 3$ et $k \geq 1$, cela découle de la définition de l'hyperbolicité. On suppose donc $4 \leq L$. On traite d'abord le cas de $L \leq 2^k + 1$ par récurrence sur k. Si $k = 0$, alors $|X| \leq 3$ et c'est bon car $L \leq 2$. Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $k-1$: on note $K = [L/2]$, donc $2 \leq K \leq 2^{k-1} + 1$ et $L - K + 1 \leq L/2 \leq 2^{k-1} + 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$(x_1|x_K) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j),\ 2 \leq j \leq K\} - (k-1)\delta$$

et

$$(x_K|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j),\ K+1 \leq j \leq L\} - (k-1)\delta\,.$$

Or $(x_1|x_L) \geq \min\{(x_1|x_K), (x_K|x_L)\} - \delta$, donc

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j),\ 2 \leq j \leq L\} - k\delta\,.$$

On suppose toujours que $w \notin \{x_j\}_{1 \leq j \leq L}$. On dit que $(y_1, \ldots, y_M)$ est une sous-chaîne de $\{x_j\}$ si pour tout i, il existe j tel que $y_i = x_j$ et $y_{i+1} = x_{j+1}$. Du coup, $\min\{(y_{j-1}|y_j)\} \geq \min\{(x_{j-1}|x_j)\}$.

Si $x_1, \ldots, x_L$ est une chaîne avec $L \geq 2^k + 2$, alors il existe une sous-chaîne $(y_1 \ldots, y_K)$ avec $K \leq 2^k + 1$: en effet, $L \geq 2^k + 2$ implique qu'il existe $p < q$ tels que $x_p = x_q$: $x_1, \ldots, x_p, x_{q+1}, \ldots, x_L$ est une sous-chaîne de longueur $< L$. Tant que la longueur est au moins $2^k + 2$, on peut la réduire. Il s'ensuit que l'on se ramène au cas précédent, qui permet de conclure. ■

Lemme 9.13. — Soit $X = \cup_{i=1}^n X_i$ avec (X_i, w_i) qui se plonge isométriquement dans $(\mathbb{R}_+, 0)$. Si $n \leq 2^k$ alors

$$(x_1|x_L) \geq \min_{2 \leq j \leq L}\{(x_{j-1}|x_j)\} - (k+1)\delta - 2c\,.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a $(x|y)_w \le \min\{|x-w|, |y-w|\}$, et si $x, y \in X_i$ alors $(x|y)_{w_i} = \min\{|x-w_i|, |y-w_i|\}$, et $|x-w_i| \ge |x-w| - |w-w_i| \ge |x-w| - c$. De même, $|y-w_i| \ge |y-w| - c$. Par suite, $(x|y)_{w_i} \ge \min\{|x-w|, |y-w|\} - c$ et

$$(x|y)_w \ge (x|y)_{w_i} - c \ge \min\{|x-w|, |y-w|\} - 2c \ge \min\{(x|x')_w, (y|y')_w\} - 2c$$

pour tous $x', y' \in X$.

Soit $x_1, \ldots, x_L \in X$ une chaîne. Ou bien, pour tout $j \ge 2$, $x_j \notin X(x_1)$, ou bien il existe $j > 1$ (maximal) tel que $x_j \in X(x_1)$. Du coup, $(x_1|x_j) \ge \min_{2\le i\le j}\{(x_{j-1}|x_j)\} - 2c$ d'après ci-dessus. On considère alors $x_1, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_L$.

De proche en proche, on extrait une chaîne (x'_i) de longueur au plus $2n \le 2^{k+1} + 1$ qui contient x_1 et x_L et telle qu'au plus deux termes sont dans un même X_i, et alors ils sont consécutifs. Il découle du lemme 9.12 et de ci-dessus que

$$(x_1|x_L) \ge \min\{(x'_{i-1}|x'_i)\} - (k+1)\delta \ge \min\{(x_{i-1}|x_i)\} - (k+1)\delta - 2c\,.$$

■

DÉMONSTRATION DES ARBRES APPROXIMATIFS. Il suffit de trouver $\phi : X \to T$ avec T 0-hyperbolique. D'après le lemme 9.11, l'espace $(X/\sim)$ est 0-hyperbolique et $\phi : X \to X/\sim$ vérifie $|\phi(x) - \phi(w)|' = |x-w|$ et $|\phi(x) - \phi(y)|' \le |x-y|$.

Dans le cas (i), le lemme 9.12 montre que $(x|y) \ge (x|y)' - k\delta$, soit

$$|\phi(x) - \phi(y)|' \ge |x-y| - 2k\delta.$$

Dans le cas (ii), le lemme 9.13 montre que $(x|y) \ge (x|y)' - (k+1)\delta - 2c$, soit

$$|\phi(x) - \phi(y)|' \ge |x-y| - 2(k+1)\delta - 4c.$$

■

Notation. — Dans la suite, si on approche un ensemble F par un arbre, on notera $\bar{x}$ l'image de $x \in F$ dans l'arbre.

On cite un corollaire qui découle plus précisément de la démonstration de l'approximation par les arbres.

COROLLAIRE 9.14. — *S'il existe $\delta > 0$ et $w \in X$ tels que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait*

$$(x|z)_w \ge \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

alors X est 6δ-hyperbolique.

En effet, l'approximation par les arbres d'un nombre fini de points n'utilise que les propriétés du produit de Gromov au point base w fixé une fois pour toute.

9.1.2. *Quasigéodésiques et applications.* Une (λ, c)-quasigéodésique est un plongement quasi-isométrique de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 9.15 (lemme de poursuite). — *Soit X un espace géodésique δ-hyperbolique. Si f est un segment (λ, c)-quasigéodésique, alors, pour tout segment géodésique g de mêmes extrémités, on a $d_H(f,g) \leq H(\delta, \lambda, c)$. Par conséquent, si X est propre alors on a les extensions suivantes.*

- *Si f est un (λ, c)-quasirayon alors il existe un rayon g telle que $d_H(f,g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.*
- *Si f est une (λ, c)-quasigéodésique alors il existe une géodésique g telle que $d_H(f,g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.*

Avant de passer à la démonstration, on en tire tout de suite un corollaire important.

COROLLAIRE 9.16. — *Soit $\varphi : X \to Y$ une quasi-isométrie entre espaces métriques géodésiques. Alors X est hyperbolique si et seulement si Y l'est.*

DÉMONSTRATION. Supposons que X est hyperbolique, et montrons que Y aussi. On utilise la caractérisation par la condition de Rips : soit Δ un triangle dans Y. Alors $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un "quasitriangle", dans l'ombre d'un réel triangle qui vérifie la condition de Rips. Du coup, un côté de $\varphi^{-1}(\Delta)$ est dans un voisinage des deux autres. Cette propriété se transporte bien par quasi-isométries. et on en déduit que Δ vérifie la condition de Rips aussi. ■

La démonstration du théorème 9.15 repose sur l'idée amusante de Bowditch qu'une fonction croissante, qui ne croît pas assez vite doit être bornée :

LEMME 9.17. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle qu'il existe des constantes $A, B, C, D, E \geq 0$, et $r_0 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f(r) \leq A \log^+ r + B, \ r > 0 \\ f(r) \leq f(Cf(r) + D) + E, \ r \geq r_0 \,. \end{cases}$$

Alors f est bornée.

On rappelle que $x^+ = \max\{x, 0\}$.

DÉMONSTRATION. Posons $F(r) = Cf(r) + D$ de sorte que $F(r) \leq F(F(r)) + E$ pour $r \geq r_0$. Comme le logarithme croît doucement, il existe $r_1 \geq r_0$ telle que, si $r \geq r_1$ alors

$$AC \log r + BC + D + E < r \,.$$

On en déduit, pour $r \geq r_1$,

$$F(r) + E \leq Cf(r) + D + E \leq AC \log r + BC + D + E < r$$

donc, s'il existait $r > r_1$ tel que $F(r) > r_1$, alors on aurait $F(r) \leq F(F(r) + E < F(r)$ ce qui est impossible. Donc $F \leq r_1$ et f est bornée aussi. ■

DÉMONSTRATION. (théorème 9.15) On déduit la poursuite des quasirayons et des quasigéodésiques par un argument de compacité, licite puisque X est supposé propre. On se concentre sur les quasisegments. La démonstration se passe en trois étapes.

Première étape : réduction aux quasigéodésiques continues.— Soit $f : I \to X$ une (λ, c)-qasigéodésique joignant x, y, il existe une courbe $q : I \to X$ joignant x, y telle que $d_H(q, f) \leq \lambda + c$ et, pour tous $s, t \in I$,

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - 3(c+\lambda) \leq |q(t) - q(s)| \leq (\lambda + c)|t-s|\,.$$

Si $I = [a, b]$, on définit $q : I \to X$ en posant $q = f$ aux bornes et sur $I \cap \mathbb{Z}$. Entre deux valeurs consécutives x_j, x_{j+1}, on étend par des segments géodésiques. On a

$$|f(x_j) - f(x_{j+1}| \leq \lambda|x_j - x_{j+1}| + c \leq \lambda + c\,.$$

Donc q est $(\lambda+c)$-lipschitzienne et $d_H(f, q) \leq \max\{d_H(f, f(\mathbb{Z})), d_H(q, f(\mathbb{Z}))\} \leq (\lambda+c)/2$. Pour conclure cette étape, il suffit de supposer $|s - t| > 1$. Supposons $n < s \leq n + 1 \leq k \leq t < k + 1$. Du coup,

$$|q(s) - q(t)| \geq |q(k+1) - q(n)| - 2(\lambda + c) \geq \frac{1}{\lambda}|t-s| - 3(\lambda + c)\,.$$

On suppose dorénavant, pour tous $s, t \in I$,

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - c \leq |q(t) - q(s)| \leq \lambda|t-s|\,.$$

Deuxième étape : le segment géodésique est proche.— Il existe une constante $H = H(\delta, \lambda, c)$ telle que, pour tout $w \in [x, y]$, on a $d(w, q) \leq H$.

Etant données des constantes $r > 0$, λ, c, on note $f(r) = \sup\{d(w, q),\ w \in \gamma\}$, où γ est un segment de longueur au plus r et q est un chemin quasigéodésique comme ci-dessus ayant les mêmes extrémités x et y.

On utilise de manère itérative la finesse des triangles. On écrit $V_R(Z)$ pour désigner le R-voisinage d'un ensemble Z. On considère le point $m \in q$ qui coupe q en deux courbes de même longueur. On a donc $\gamma \subset V_{4\delta}([x, m] \cup [m, y])$. On itère ce processus en coupant chaque fois des sous-courbes de q en parties de longueur égale. Après k itérations, on a donc $x_0 = x, \ldots, x_{2^k} = y \in q$ tels que $d(x_j, x_{j+1}) \leq \lambda r/2^k$ et

$$\gamma \subset \cup_{0 \leq j < 2^k} V_{4\delta k}([x_j, x_{j+1}])\,.$$

Pour le premier indice k tel que $\lambda r/2^k \leq 1$, on obtient $[x_j, x_{j+1}] \subset N_1(q)$ donc $\gamma \subset V_{4k\delta+1}(q)$ soit $f(r) \leq A \log^+ r + B$, avec $A = A(\delta, \lambda, c)$ et $B = B(\delta, \lambda, c)$.

Prenons $w \in \gamma$ tel que $d(w, q) = D$ soit maximal. On peut trouver $x' \in [x, w]$ et $y' \in [y, w]$ à distance D de w. Pour chacun d'eux, on peut trouver $x'', y'' \in q$ tels que $|x' - x''|, |y' - y''| \leq D\,(\leq f(r))$. Du fait que $d(w, q) \geq D$, le corollaire 9.4 implique $d(w, [x'', y'']) \leq 8\delta$. Or $|x'' - y''| \leq |x'' - x'| + |x' - y'| + |y' - y''| \leq 4D$, donc on trouve $d(w, q) \leq 8\delta + f(4D) \leq 8\delta + f(4f(r))$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $D \leq f(r)$, on obtient $f(r) \leq f(4f(r)) + 8\delta$. Le lemme 9.17 implique que f est bornée.

Troisième étape : le segment quasigéodésique est proche.— On prend $w = q(t) \in q$, qui découpe q en deux courbes q_x, q_y contenant comme autre extrémité x ou y. L'application $z \in \gamma \mapsto d(z, q_x) - d(z, q_y)$ est continue et change de signe. Donc il existe $z \in \gamma$ tel que $d(z, q_x) = d(z, q_y) \leq H$. Soient $z_x = q(s_x), z_y = q(s_y) \in q_x, q_y$ qui réalisent ces distances. On a

$$|s_x - t| \leq |s_x - s_y| \leq \lambda(|z_x - z_y| + c) \leq \lambda(2H + c)$$

donc $d(w, \gamma) \leq H + (2H + c)\lambda^2$. ■

On a la caractérisation suivante de l'hyperbolicité.

THÉORÈME 9.18 (Bowditch). — *Soit X un espace hyperbolique. On suppose qu'il existe $h \geq 0$ et une assignation d'un ensemble connexe $L(x, y)$ à chaque paire de points distincts vérifiant les propriétés suivantes.*

(1) *On a $L(x, y) = L(y, x)$ pour tous $x, y \in X$.*

(2) *$L(x, y)$ est contenu dans le h-voisinage de $L(x, z) \cup L(z, y)$ pour tous x, y, z.*

(3) *Si $d(x, y) \leq 1$, alors* diam *$L(x, y) \leq h$.*

Alors X est hyperbolique et il existe $H < \infty$ telle que $d_H(L(x, y), [x, y]) \leq H$ pour tous $x, y \in X$.

DÉMONSTRATION. La démontration suit le même plan que celle du lemme de poursuite. Pour $x, y \in X$, on note $\mathcal{G}(x, y)$ l'ensemble des segments géodésiques joignant x, y. On montre dans un premier temps que $L(x, y)$ est dans un voisinage uniforme de $\gamma \in \mathcal{G}(x, y)$. On note

$$f(r) = \sup\{d(w, \gamma),\ \exists\, x, y \in X,\ d(x, y) \leq r,\ \gamma \in \mathcal{G}(x, y),\ w \in L(x, y)\}\,.$$

Première étape : $L(x, y)$ est proche de tout segment.— On paramètre $\gamma \in \mathcal{G}(x, y)$ de sorte que $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| d(x, y)$.

On utilise de manère itérative la finesse de nos L. On a donc $L(x, y) \subset V_h(L([x, \gamma(1/2)] \cup L(\gamma(1/2), y])$. On itère ce processus en coupant chaque fois les segments géodésiques en deux parties égales. Après k itérations, on a donc $x_0 = x, \ldots, x_{2^k} = y \in \gamma$ tels que $d(x_j, x_{j+1}) \leq r/2^k$ et

$$\gamma \subset \cup_{0 \leq j < 2^k} V_{hk}(L(x_j, x_{j+1}))\,.$$

Pour le premier indice k tel que $d(x, y)/2^k \leq 1$, on obtient $L(x_j, x_{j+1}) \subset V_h([x_j, x_{j+1}])$ donc $L(x, y) \subset V_{(k+1)h}(\gamma)$. Du coup $f(r) \leq h(\log_2 r + 2) \leq A \log^+ r + B$.

Deuxième étape : $L(x, y)$ est uniformément proche de tout segment.— On note $t = f(r) + 2h + 1$ et on choisit $w \in L(x, y)$. Notons

$$\begin{cases} \ell_0 = \max\{0, d(w, x) - t\} \\ \ell_1 = \max\{0, d(w, y) - t\} \end{cases}$$

On a $d(x,y) \le d(x,w) + d(w,y) \le \ell_0 + \ell_1 + 2t$. Par conséquent, on peut découper γ en trois segments $\gamma = [x,x'] \cup [x',y'] \cup [y',y]$, que l'on écrit $\gamma = \gamma_x \cup \gamma' \cup \gamma_y$, de sorte que $d(x,x') \le \ell_0$, $d(y,y') \le \ell_1$ et $d(y,y') \le 2t$ avec $x = x'$ seulement si $\ell_0 = 0$ et $y = y'$ seulement si $\ell_1 = 0$.

Observons que $d(w,x) \le d(w,\gamma_x) + d(x,x')$ donc $d(w,\gamma_x) \ge d(w,x) - \ell_0$. Du coup, si $x \ne x'$ alors $d(x,x') > 0$ et $\ell_0 = d(w,x) - t$ donc $d(w,\gamma_x) \ge t$. Or, on a $L(x,x') \subset V_{f(r)}(\gamma_x)$ donc

$$d(w, L(x,x')) \ge d(\gamma_x, w) - f(r) \ge t - f(r) \ge 2h + 1\,.$$

De même, si $y \ne y'$, alors $d(w, L(y,y')) \ge 2h + 1$.

Or $L(x,y) \subset V_{2h}(L(x,x') \cup L(x',y') \cup L(y',y))$ donc $w \in L_{2h}(L(x',y')) \subset V_{2h+f(2t)}(\gamma)$. Ceci implique $f(r) \le f(2t) + 2h \le f(2f(r) + 4h + 2) + 2h$. Avec la première étape et le lemme 9.17, on trouve que f est bornée par une constante H.

Troisième étape : conclusion.— On prend $w \in \gamma$, qui découpe γ en deux segments γ_x, γ_y contenant comme autre extrémité x ou y. L'application $z \in L(x,y) \mapsto d(z,\gamma_x) - d(z,\gamma_y)$ est continue et change de signe. Donc il existe $z \in L(x,y)$ tel que $d(z,\gamma_x) = d(z,\gamma_y) \le H$. Soient $z_x, z_y \in \gamma_x, \gamma_y$ qui réalisent ces distances. On a $d(z,w) \le d(z_x,z_y) + d(z_x,z) \le 3H$ donc $\gamma \subset N_{3H}(L(x,y))$. Ceci implique que les triangles sont fins, donc que X est hyperbolique. ∎

9.2. Bord d'un espace hyperbolique

Soit (X,w) un espace propre géodésique et δ-hyperbolique. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on a, dans le cadre des espaces hyperboliques, l'analogue du modèle de la boule pour les espaces hyperboliques "standard" $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire une compactification naturelle de X.

Définition du bord.— Deux (quasi-)rayons r_1 et r_2 sont *asymptotes* si $d_H(r_1,r_2) < \infty$. Une suite (x_n) *tend vers l'infini* si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|x_j) = \infty$; on dit que $(x_n) \sim (y_n)$ si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|y_j) = \infty$. Le Théorème 9.15 implique essentiellement les identifications suivantes qui nous définissent un bord ensembliste de X.

PROPOSITION 9.19. — *On a les identifications suivantes :*

$$\{\textit{rayons issus de } w\}/\sim\; = \{\textit{quasirayons}\}/\sim\; = \{\textit{suites qui tendent vers } \infty\}/\sim\,.$$

DÉMONSTRATION. Si r est un rayon, alors on vérifie que toute suite $(r(t_n))_n$, avec (t_n) tendant vers l'infini, définit le même point à l'infini. De même, deux rayons asymptotes r et r' définissent le même point par le corollaire 9.5 : il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $|r(t-u) - r'(t)| \le 8\delta$ pour t assez grand donc $|(r(t-u)|r'(t)) - t| \le |u| + 8\delta$. Le lemme de poursuite permet de remplacer ces rayons par des quasirayons.

Si (x_n) tend vers $a \in \partial X$, alors on considère une suite de transformations $r_n : (\mathbb{R}_+, 0) \to (X, w)$ telles que $r_n|_{[0,|x_n-w|]}$ est une isométrie sur un segment $[w, x_n]$ et r_n est constante sinon. D'après le théorème d'Arzéla-Ascoli, on peut supposer que $(r_n)_n$ est convergente sur les compacts vers un rayon r. Il suffit de montrer que r représente le point a. Fixons-nous t assez grand. Pour n assez grand, on aura $|r(t) - r_n(t)| \le 1$. On a donc

$$(x_n|r(t)) \ge \min\{(x_n|r_n(t)), (r_n(t)|r(t))\} - \delta \ge t - 1 - \delta\,.$$

■

Produit de Gromov au bord.— On plonge X dans l'espace des suites (x_n) modulo convergence, en disant qu'une suite (x_n) représente x si elle est convergente vers x. Pour $a, b \in X \cup \partial X$, on définit

$$(a|b) = \inf_{x_i \to a, y_i \to b} \liminf_{i,j\to\infty} (x_i|y_j)$$

Si $x_i \to a$ et $y_j \to b$ alors on a, d'après la remarque 7.8 de [GdlH], $(a|b) - 2\delta \le \liminf(x_i|y_j) \le (a|b)$. La définition proposée permet de prolonger l'inégalité quasi-ultramétrique

$$(x|z) \ge \min\{(x|y), (y|z)\} - \delta$$

pour tous $x, y, z \in X \cup \partial X$.

Un système de voisinages pour $a \in \partial X$ est donné par $\{b \in X \cup \partial X,\ (a|b) \ge R\}$. Cela confère une topologie sur $X \cup \partial X$ qui le rend compact (voir Chap. 7, § 2 de [GdlH]).

Métriques visuelles au bord.— On note $\rho_\varepsilon(a, b) = \exp -\varepsilon(a|b)$. On notera $\rho = \rho_1$. On a, pour $a, b, c \in \partial X$,

$$\rho_\varepsilon(a, c) \le e^{\varepsilon\delta} \max\{\rho_\varepsilon(a, b), \rho_\varepsilon(b, c)\}\,.$$

DÉFINITION 9.20 (métrique visuelle). — *Une métrique d sur ∂X telle que $d(x, y) \asymp \rho_\varepsilon$ est une métrique visuelle issue de w.*

On déduit l'existence de métriques visuelles du lemme suivant.

LEMME 9.21. — Soit $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $q(x, y) = q(y, x)$ et $q(x, z) \le K \max\{q(x, y), q(y, z)\}$ pour une constante $K > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $q_\varepsilon = q^\varepsilon$.

Si $\varepsilon \le \log \sqrt{2}/ \log K$, alors, pour toute chaîne finie $x_0, \ldots, x_k$, on a

$$\sum q_\varepsilon(x_{j-1}, x_j) \ge K^{-2\varepsilon} q_\varepsilon(x_0, x_k)\,.$$

DÉMONSTRATION. Montrons par récurrence sur la longueur $k+1$ d'une chaîne $x_0, \ldots, x_{k+1}$ reliant x à y que

$$q_\varepsilon(x, y) \le K^{2\varepsilon} \sum_{j=0}^{k} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1})\,.$$

Si $k = 1$, alors

$$q_\varepsilon(x_0, x_2) \le K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_1), q_\varepsilon(x_2, x_1)\} \le K^{2\varepsilon}(q_\varepsilon(x_0, x_1) + q_\varepsilon(x_2, x_1))\,.$$

Supposons que l'assertion soit vraie pour toute chaîne de longueur $k+1$, et étudions une chaîne $x_0,\ldots,x_{k+2}$ de longueur $k+2$: on note $R=\sum q_\varepsilon(x_j,x_{j+1})$; soit p le plus grand indice telle que $\sum_{k=0}^{p-1} q_\varepsilon(x_j,x_{j+1})\le R/2$. Du coup, on a aussi $\sum_{j=p+1}^{k+1} q_\varepsilon(x_j,x_{j+1})\le R/2$. Il vient

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x,y) &\le K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0,x_p),q_\varepsilon(x_p,y)\} \\ &\le K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0,x_p),K^\varepsilon q_\varepsilon(x_p,x_{p+1}),K^\varepsilon q_\varepsilon(x_{p+1},y)\} \\ &\le K^\varepsilon \max\{K^{2\varepsilon}R/2, K^\varepsilon R, K^{3\varepsilon}R/2\}\,. \end{aligned}$$

Par suite, on a $q_\varepsilon(x,y)\le K^{2\varepsilon}R$ si $K^{2\varepsilon}\le 2$, et le lemme en découle. ■

COROLLAIRE 9.22. — *Si $\varepsilon\delta\le\log\sqrt{2}$ alors il existe une métrique complète d_ε telle que*

$$e^{-2\delta\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y)\le d_\varepsilon(x,y)\le\rho_\varepsilon(x,y)\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 9.21, il suffit d'avoir $e^{2\delta\varepsilon}\le 2$, soit $\varepsilon\delta\le\log\sqrt{2}$, pour avoir l'existence d'une métrique d_ε telle que

$$e^{-2\delta\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y)\le d_\varepsilon(x,y)\le\rho_\varepsilon(x,y)\,.$$

■

EXERCICE 9.23. — *Montrer que les distances visuelles définissent la même topologie que celle décrite en terme de produit de Gromov.*

LEMME 9.24. — Soient $w,w'\in X$ et $\varepsilon,\varepsilon'>0$ assez petits ; on note $d=d_{w,\varepsilon}$ et $d'=d_{w',\varepsilon'}$. Alors $Id:(\partial X,d)\to(\partial X,d')$ est Hölder de rapport ε'/ε. En particulier, si $\varepsilon=\varepsilon'$ alors Id est bilipschitz.

DÉMONSTRATION. On a

$$d'(a,b)\le\rho_{w',\varepsilon'}(a,b)=e^{-\varepsilon'[(a|b)_{w'}-(a|b)_w]}\rho_{w,\varepsilon'}(a,b)\le e^{\varepsilon'|w-w'|}K_\varepsilon^{(\varepsilon'/\varepsilon)}(d(a,b))^{(\varepsilon'/\varepsilon)}\,.$$

■

PROPOSITION 9.25. — *Soient $a,b\in\partial X$ deux points distincts. Il existe une géodésique qui les relie.*

DÉMONSTRATION. Soient r_a,r_b deux rayons géodésiques qui définissent a et b. Par approximation par un arbre, on en déduit que leur réunion est une quasi-géodésique. Par suite, le théorème 9.15 montre l'existence d'une géodésique à distance bornée de ces rayons. ■

THÉORÈME 9.26. — *Si $\phi : X \to Y$ est une (λ, c)-quasi-isométrie entre espaces géodésiques hyperboliques, alors Φ se prolonge en homéomorphisme et il existe $C = C(\lambda, c, \delta) > 0$ telle que, pour tout $a, b \in \partial X$, $w \in X$,*

$$\frac{1}{\lambda}(a|b)_w - C \leq (\phi(a)|\phi(b))_{\phi(w)} \leq \lambda(a|b)_w + C\,.$$

DÉMONSTRATION. L'image d'un rayon par une quasi-isométrie est un quasirayon, à distance bornée d'un véritable rayon ; de plus deux rayons asymptotes s'envoient sur des quasirayons asymptotes. Donc ϕ s'étend en une transformation entre les bords. Par symétrie, on en déduit que $\phi : \partial X \to \partial Y$ est bijectif.

On a vu que $(x|y)_w$ représentait la distance de w à $[x, y]$. Si $a, b \in \partial X$, alors il existe une géodésique $[a, b]$ qui les relie d'après la proposition 9.25. On vérifie que $|d(w, [a, b]) - (a|b)_w| \leq 4\delta$ dans ce cas aussi. Or

$$(1/\lambda)d(w, [a, b]) - c \leq d(\phi(w), \phi([a, b])) \leq \lambda d(w, [a, b]) + c\,,$$

d'où la conclusion à l'aide du lemme de poursuite. En passant aux métriques visuelles, on en déduit que l'extension à l'infini est un homéomorphisme. ■

Fonctions de Busemann.— Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$ et $h : \mathbb{R}_+ \to X$ un rayon géodésique tel que $h(0) = y$ et $\lim_\infty h = a$. On définit $\beta_a(x, h) = \limsup(|x - h(t)| - t)$, qui est bien définie par l'inégalité triangulaire, et

$$\beta_a(x, y) = \sup\{\beta_a(x, h),\ \text{avec } h \text{ comme ci-dessus}\}\,.$$

Tout rayon est une bonne approximation : si t est assez grand alors

$$|\beta_a(x, y) - (|x - h(t)| - t)| \leq 40\delta.$$

De plus, β_a est presque un cocycle :

$$\begin{cases} |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, x)| \leq 120\delta \\ \\ |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, z) + \beta_a(z, x)| \leq 200\delta \\ \\ |\beta_a(x, y) - \beta_a(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| + 400\delta \end{cases}$$

Pour une démonstration, se référer au lemme 8.1 et à la proposition 8.2 de [GdlH].

9.3. Groupes hyperboliques

On présente maintenant la classe des groupes hyperboliques au sens de Gromov, avec quelques exemples et quelques propriétés.

DÉFINITION 9.27 (groupe hyperbolique). — *Un groupe G est hyperbolique s'il opère géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique.*

Le lemme de Švarc-Milnor implique qu'un groupe hyperbolique est de type fini et, en général, un groupe de type fini G est hyperbolique si et seulement si n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G est hyperbolique.

Soit G un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique géodésique propre X qui opère proprement discontinûment. *L'ensemble limite* Λ_G est l'ensemble des points d'accumulation de $G(w)$ dans $X \cup \partial X$. Comme l'action est proprement discontinue, Λ_G est un compact de ∂X. De plus, comme l'action est par isométries, Λ_G ne dépend pas du choix de w. Enfin, si $K \subset \partial X$ est compact, $|K| \geq 2$, et si $G \cdot K \subset K$ alors $\Lambda_G \subset K$ (voir la proposition 8.25 de [GdlH]).

Parmi les exemples, on trouve les groupes libres de rang fini et les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes de courbure sectionnelle majorée par $(-a^2)$, $a \neq 0$, comme les surfaces de genre au moins deux. On a aussi des groupes de Coxeter à angles droits comme celui qui engendre un pavage par pentagone à angles droits. Plus généralement, Moussong montre dans sa thèse qu'un groupe de Coxeter est hyperbolique si et seulement s'il ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

9.3.1. *Classification des isométries.* Si g est une isométrie, on note Λ_g l'ensemble limite du groupe engendré par g.

Proposition 9.28. — *L'ensemble limite d'une isométrie a au plus deux points, tous fixes. On dit que g est*

(1) *elliptique si $\Lambda_g = \emptyset$;*

(2) *parabolique si Λ_g est un singleton ;*

(3) *loxodromique si Λ_g est une paire.*

Démonstration. Si g n'est pas elliptique, alors Λ_g est non vide et est constitué de points fixes : si $g^{n_k}w$ tend vers $a \in \partial X$, alors $g^{n_k}gw$ tend vers a car $|g^{n_k}w - g^{n_k}gw| = |w - gw|$ donc $(g^{n_k}w|g^{n_k+1}w)_w > |g^{n_k}w - w|$; mais $g^{n_k}gw = gg^{n_k}w$ qui tend vers ga.

Supposons que Λ_g a au moins trois points : prenons le triangle idéal de sommets trois de ces points. Comme ces points sont fixes, ce triangle est quasifixé par l'action de g, donc ses quasicentres en particulier. Mais comme l'action est proprement discontinue, cela devrait impliquer que g est d'ordre fini. ■

Exercice 9.29. — *Montrer qu'une isométrie est elliptique si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) *il existe une orbite bornée ;*

(2) *toutes les orbites sont bornées.*

LEMME 9.30. — Pour toute isométrie g, la limite suivante existe et est indépendante du point $x \in X$.

$$\tau(g) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{d(x, g^n(x))}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{d(x, g^n(x))}{n}.$$

EXERCICE 9.31. — *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour une isométrie g :*

(1) *g est une isométrie loxodromique ;*

(2) *pour tout $x \in X$, $\{g^n(x)\}_n$ est une quasigéodésique ;*

(3) *on a $\tau(g) > 0$.*

9.3.2. *Propriétés des groupes hyperboliques.* Soit Γ un graphe, et fixons-nous $n \geq 1$. Le *complexe de Rips* $P_n(\Gamma)$ est le complexe simplicial dont les sommets sont les sommets de Γ et, pour $k \geq 1$, le k-squelette est formé de $(k+1)$ sommets $\{g_0, \ldots, g_k\}$ tels que $d(g_j, g_i) \leq n$. C'est un complexe localement fini —donc de dimension finie— si Γ est uniformément localement fini.

THÉORÈME 9.32 (Rips). — *Si Γ est le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique, alors, pour $n \geq 1$ assez grand, P_n est contractile et quasi-isométrique à G. Plus précisément, G opère sur $P_n(\Gamma)$ proprement discontinûment, fidèlement et avec quotient compact.*

DÉMONSTRATION. Voir [GdlH, théorème 3.1]. ■

On en déduit qu'un groupe hyperbolique

(1) est de présentation finie ;

(2) possède un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion.

EXERCICE 9.33. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique n'a que des éléments loxodromiques ou d'ordre fini.*

EXERCICE 9.34. — *Soit G un groupe hyperbolique. Montrer que l'un des cas suivants est vérifié.*

(1) *G est fini et $\partial G = \emptyset$;*

(2) *G est virtuellement cyclique et ∂G a deux points ;*

(3) *G est infini non virtuellement cyclique, il contient un groupe libre et ∂G est un ensemble parfait.*

EXERCICE 9.35. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique a un bout a un bord connexe.*

EXERCICE 9.36. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

9.3.3. *Dynamique à l'infini.* Le bord d'un espace hyperbolique ne dépend que de sa classe de quasi-isométrie d'après le théorème 9.26. Par conséquent, le bord ∂G d'un groupe hyperbolique est bien défini à homéomorphisme près. Notons aussi que chaque isométrie produit un homéomorphisme sur le bord. On obtient ainsi une action d'un groupe hyperbolique sur son bord que nous décrivons maintenant. Notons aussi que deux actions géométriques de G sur des espaces différents conduisent à des actions équivariantes de G sur leurs bords *via* les quasi-isométries d'évaluation $g \mapsto g(x)$.

Désignons par $\Theta(A)$ l'ensemble des triplets de points d'un ensemble A.

DÉFINITION 9.37 (Groupe de convergence). — *Un groupe G est un groupe de convergence si G agit par homéomorphismes sur un compact (métrique) X et que cette action est proprement discontinue sur les triplets de points. On dit que l'action est uniforme si l'action est cocompacte sur $\Theta(X)$.*

Voir [Bow2] pour plus de propriétés.

THÉORÈME 9.38. — *Si G agit géométriquement sur un espace hyperbolique géodésique propre X alors G est un groupe de convergence uniforme sur ∂X et $X \cup \partial X$.*

La démonstration repose de manière essentielle sur l'observation fondamentale suivante.

Supposons que G agisse par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et que $f : X \to Y$ est une application continue surjective propre et G-équivariante.

- *G agit proprement discontinûment sur X si et seulement si G agit proprement discontinûment sur Y.*
- *L'action de G est cocompacte sur X si et seulement si l'action de G est cocompacte sur Y.*

DÉMONSTRATION. On suppose que X est δ-hyperbolique. On considère l'ensemble $Y \subset X \times \Theta(\partial X)$ des points $(a, \{x_1, x_2, x_3\})$ tels qu'il existe un triangle géodésique $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$ dont la distance de a à chaque côté est au plus une constante $D \geq 4\delta$. Comme les triangles sont 4δ-fins, cet ensemble est non vide et fermé. On peut choisir D assez grand de sorte que la projection de Y sur X soit surjective. De plus, les projections de Y sur $\Theta(\partial X)$ et X sont continues, propres, surjectives et G-équivariantes. Donc l'action proprement discontinue et cocompacte de G sur X induit une action proprement discontinue et cocompacte de G sur Y, puis sur $\Theta(\partial X)$. Donc G est un groupe de convergence uniforme sur ∂X.

Le passage à $X \cup \partial X$ se fait en remarquant que G agit géométriquement sur X. ∎

En fait, B. Bowditch montre aussi la réciproque [Bow1].

THÉORÈME 9.39. — *Si G est un groupe de convergence uniforme, alors G est hyperbolique et son bord est homéomorphe à X.*

On établit une propriété qui nous servira par la suite.

PROPOSITION 9.40. — *Soient G un groupe hyperbolique infini et $H < G$ un sous-groupe infini tels qu'il existe $a, b \in \partial G$ dans l'adhérence de P. Alors il existe une suite (g_n) extraite de H tel que, pour tout compact $K \subset (G \cup \partial G) \setminus \{a, b\}$, $g^n(K)$ tend vers a uniformément et $g^{-n}(K)$ tend vers b uniformément.*

DÉMONSTRATION. On considère $(h_n) \subset H$ qui tend vers a. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (h_n^{-1}) tend vers $b' \in \partial G$. Soit $L \subset (G \cup \partial G)$ un compact distinct de b'. Pour tout $x \in L$, $(h_n(x)|h_n)_e = (x|e)_{h_n^{-1}} \geq d(h_n^{-1}, [e, x]) - 4\delta$ qui tend vers l'infini uniformément car $b' \notin L$. Donc $(h_n|_L)_n$ tend vers a uniformément. Si $b = b'$, alors on a par symétrie (h_n^{-1}) qui tend uniformément sur les compacts disjoints de $\{a\}$ vers b.

Sinon, on considère $(k_n) \subset H$ qui tend vers b. On procède comme ci-dessus, et on note a' la limite de $(k_n^{-1})_n$ obtenue après extraction d'une sous-suite. Si $a' = a$, alors la proposition est montrée.

Si $a' \neq b'$, on note $g = e$ et sinon on prend $g \in G$ tel que $g(a') \neq b'$. On considère $g_n = h_n g k_n^{-1}$. Par construction, $(k_n^{-1}|_K)_n$ tend uniformément vers a', donc $(gk_n^{-1}|_K)_n$ tend uniformément vers $g(a') \neq b'$ et $(g_n|_K)$ vers a. La convergence de l'inverse suit par symétrie. ∎

9.4. **Quasiconvexité**

On peut se reporter par exemple à [GMRS, KS] en plus des références standard. Nous aurons souvent recours au fait suivant :

FAIT 9.41. — *Soient x, x', y, y' quatre points d'un espace δ-hyperbolique géodésique et soit γ, γ' deux géodésiques $[x, y]$ et $[x', y']$. Si $|x - x'|, |y - y'| \leq D$, alors $d_H(\gamma, \gamma') \leq D + 8\delta$.*

DÉMONSTRATION. On construit l'arbre associé au quadrilatère $[x, y, y', x']$ porté par γ et γ' et donné le corollaire 9.4. Dans cet arbre, $[f_Q(x), f_Q(y)]$ est dans le D-voisinage de $[f_Q(x'), f_Q(y')]$. Du coup, on en déduit que γ est dans le $(D + 8\delta)$-voisinage de γ'. ∎

9.4.1. *Ensembles quasiconvexes.* Soit X un espace géodésique hyperbolique. Un sous-ensemble $Y \subset X$ est *K-quasiconvexe* si toute géodésique reliant deux points de Y est contenue dans le K-voisinage $V_K(Y)$ de Y.

On établit quelques propriétés générales.

Notons que le lemme de poursuite montre que si Y est quasiconvexe et ϕ est une quasi-isométrie, alors $\phi(Y)$ est aussi quasiconvexe, pour des constantes différentes.

PROPOSITION 9.42. — *Si $Y \subset X$ est K-quasiconvexe, alors, pour tout $K' \geq K$, le K'-voisinage de Y est 10δ-quasiconvexe.*

DÉMONSTRATION. Prenons deux points $x, x' \in V_{K'}(Y)$ et $y, y' \in Y$ tels que $d(x, y), d(x', y') \leq K'$. Toute géodésique $[y, y']$ est contenue dans $V_K(Y)$ et le fait 9.41 montre que $[x, x'] \subset V_{K'+10\delta}([y, y'])$. ∎

PROPOSITION 9.43. — *Soient $k \geq 1$ et $R \geq 0$. Il existe $R' = R(\delta, k, R)$ telle que si $Y_1, \ldots, Y_k$ sont K-quasiconvexes et $V_R(Y_i) \cap V_R(Y_j) \neq \emptyset$ pour tous i, j, alors $\cap V_{R'}(Y_j) \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer $R \geq K$. Dans un arbre, si $Y_1, \ldots, Y_k$ sont convexes et $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ pour tous i, j, alors $\cap Y_j \neq \emptyset$. En effet, cette propriété est évidente pour $k \leq 3$, puisque trois points déterminent un tripode. Si la propriété est vraie au rang k, et que l'on a $k+1$ convexes $Y_0, \ldots, Y_k$, alors $(Y_0 \cap Y_j)_{1 \leq j \leq k}$ vérifie l'hypothèse de récurrence dans l'arbre Y_0, donc l'intersection est non vide.

Dans le cas général, on considère $x_{ij} \in Y_i \cap Y_j$ pour chaque $i \neq j$. On choisit un point base $w = x_{12}$. La réunion $Z = \cup_{i,j}[w, x_{ij}]$ est une union finie de segments géodésiques, dont le nombre ne dépend que de k. Donc il existe $c = c(k, \delta)$ et une $(1, c)$-quasi-isométrie sur un arbre $\phi : Z \to T$. Notons $Y'_j = \cup_{i \neq j}[\phi(x_{j1}), \phi(x_{ij})]$ qui est convexe. Par hypothèses, on a $Y'_j \cap Y'_i \neq \emptyset$ pour tous i, j, donc on peut trouver $z \in Z$ tel que $\phi(z) \in \cap Y'_j$. Pour chaque j, ce point est à distance au plus c de $\cup_{i \neq j}[x_{j1}, x_{ij}]$, qui est à distance au plus $R + 10\delta$ de Y_j d'après la proposition précédente. ■

On définit Λ_Y la trace de Y sur ∂X : c'est l'ensemble des points d'accumulation de Y sur ∂X. Soit $\Lambda \subset \partial X$, on définit *l'enveloppe convexe* $\mathcal{C}(\Lambda)$ comme la réunion des géodésiques reliant deux points de Λ.

FAIT 9.44. — *Soit X un espace δ-hyperbolique, propre et géodésique. L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble $\Lambda \subset \partial X$ est 12δ-quasiconvexe. Si $Y \subset X$ est K-quasiconvexe, alors $Y \cup \Lambda_Y$ est $(K + 10\delta)$-quasiconvexe et $\mathcal{C}(\Lambda_Y) \subset V_{K+10\delta}(Y)$.*

DÉMONSTRATION. Si $x, y \in \mathcal{C}(\Lambda)$, alors ces points appartiennent à deux géodésiques $[a, a']$ et $[b, b']$. Pour montrer que $\mathcal{C}(\Lambda)$ est 12δ-quasiconvexe, il suffit de montrer que $\{x, y\}$ est à distance au plus 4δ d'une géodésique dont les extrémités sont dans $\{a, a', b, b'\}$, en vertu du fait 9.41.

On construit des géodésiques $[a, b]$, $[a, b']$, $[a', b]$ et $[a', b']$ par passage à des limites le long de $[a, a']$ et $[b, b']$ de sorte que les triangles idéaux que l'on construira seront 4δ-fins. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d(x, [a, b]) \leq 4\delta$. Si $d(y, [a, b]) \leq 4\delta$, alors c'est bon. Sinon, on considère le quadrilatère $Q = (a, b, b', a')$ et on construit $f_Q : Q \to T$ en utilisant la diagonale $[a, b']$ et le corollaire 9.4. On vérifie que $d(f_Q(y), f_Q([a, b])) > 0$ donc $f_Q(y) \in f_Q([a, b']) \cap f_Q([a', b'])$ et $y \in V_{4\delta}([a, b']) \cap V_{4\delta}([a', b'])$. Or x est dans le 4δ-voisinage de $[a, b'] \cup [a', b']$, donc $\{x, y\}$ est dans le 4δ-voisinage de $[a, b']$ ou $[a', b']$.

Si Y est K-quasiconvexe dans un espace propre, alors un argument de compacité combiné au corollaire 9.5 montre que toute géodésique d'extrémités dans Λ_Y est contenue dans le $(K + 10\delta)$-voisinage de Y. Ceci implique que $Y \cup \Lambda_Y$ est $(K + 10\delta)$-quasiconvexe et $\mathcal{C}(\Lambda_Y) \subset V_{K+10\delta}(Y)$. ■

9.4.2. *Groupes quasiconvexes.* Soient X un espace géodésique propre hyperbolique et G un groupe opérant proprement discontinûment par isométries sur X. On dit que G est *quasiconvexe* si l'une des propriétés de la proposition suivante est vérifiée.

PROPOSITION 9.45. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe $x \in X$ tel que $G(x)$ est quasiconvexe.*

(2) *Pour tout $x \in X$, $G(x)$ est quasiconvexe.*

(3) *Le groupe G est de type fini et, pour tout $x \in X$, $g \mapsto g(x)$ est un plongement quasi-isométrique.*

(4) *Il existe $Y \subset X$ quasiconvexe, invariant par G tel que Y/G est de diamètre fini.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $G(x)$ est K-quasiconvexe et prenons $y \in X$. On note $D = \max\{d(x,y), K\}$. On note que $G(x) \subset V_D(G(y))$.

Par le fait 9.41, si $d(x,y), d(x',y') \leq D$ alors $[y,y'] \subset V_{D+10\delta}([x,x'])$. Du coup, pour tous $g,h \in G$, on a

$$[g(y),h(y)] \subset V_{D+10\delta}([g(x),h(x)]) \subset V_{D+20\delta}(G(x)) \subset V_{2D+20\delta}(G(y)) .$$

Ceci montre l'équivalence entre (1) et (2).

Soit $S = \{g \in G \setminus \{e\},\ B(x,3K) \cap B(g(x),3K) \neq \emptyset\}$. Comme X est propre et que l'action est proprement discontinue, l'ensemble S est fini. Montrons que c'est un système de générateurs. Soit $g \in G$, et notons $x_j \in [x,g(x)]$ tel que $d(x,x_j) = Kj$, si $0 \leq j \leq k \leq d(x,g(x))/K < k+1$ et $x_{k+1} = g(x)$ si nécessaire.

Pour chaque j, on choisit $g_j \in G$ tel que $d(x_j, g_j(x)) \leq K$ avec $g_0 = e$ et $g_k = g$. On a $d(g_j(x), g_{j+1}(x)) \leq 3K$ donc $g_j^{-1} g_{j+1} \in S$ et $g = g_1 \circ (g_1^{-1} g_2) \circ \ldots \circ (g_k^{-1} g_{k+1})$ appartient au groupe engendré par S. De plus, on a $d_S(e,g) \leq d(x,g(x))/K$.

Notons $M = \max\{x, s(x),\ s \in S\}$; il vient $d(g(x),h(x)) \leq M d_S(g,h)$, donc $g \mapsto g(x)$ est un plongement quasi-isométrique. Cela montre que (2) implique (3). Le lemme de poursuite implique facilement la réciproque.

Si on pose $Y = G(x)$, alors Y est quasiconvexe et invariant, et de codiamètre nul. Réciproquement, on suppose $\operatorname{diam} Y/G \leq D$ et on choisit $x \in Y$. L'injection canonique de $G(x)$ dans Y est un plongement quasi-isométrique puisque Y est contenu dans le D-voisinage de $G(x)$. Comme Y est quasiconvexe, $G(x)$ aussi par extension : on a $[gx,hx] \subset V_K(Y) \subset V_{K+D}(G(x))$. ■

COROLLAIRE 9.46. — *Un groupe quasiconvexe est hyperbolique, son ensemble limite est homéomorphe à son bord. De plus, si Y est quasiconvexe, invariant par G et de codiamètre fini, alors $\Lambda_Y = \Lambda_G$. Enfin, son action sur l'enveloppe convexe de son ensemble limite est de codiamètre fini.*

DÉMONSTRATION. Soient G quasiconvexe et $x \in X$. Comme G est de type fini, on considère un graphe de Cayley Γ localement fini et un triangle géodésique $\Delta \subset \Gamma$. Son plongement dans X est un quasitriangle, à distance bornée d'un triangle géodésique. Donc l'image de Δ vérifie la condition de Rips : cette propriété étant invariante par quasi-isométries, Δ vérifie aussi la condition de Rips, donc G est hyperbolique.

Le plongement quasi-isométrique induit une quasi-isométrie en Γ et $G(x)$, induisant ainsi un homéomorphisme entre $\partial\Gamma$ et Λ_G. De plus, si Y est quasiconvexe, invariant par G et de codiamètre D, alors $\Lambda_{G(x)} = \Lambda_Y$ car $G(x) \subset Y \subset V_D(G(x))$ pour tout $x \in Y$.

Enfin, $\mathcal{C}(\Lambda_G)$ est quasiconvexe et invariant par G. Soient $a, b \in \Lambda_G$ et prenons $a', b' \in \partial\Gamma$ les points correspondant. La propriété de visibilité implique que a' et b' sont les extrémités d'une géodésique de Γ, donc son image est à distance bornée de $[a, b]$, ce qui implique que le diamètre de $\mathcal{C}(\Lambda_G)/G$ est fini. ■

9.4.3. *Sous-groupes quasiconvexes.* On se donne un groupe hyperbolique G. Un sous-groupe de H de G est *quasiconvexe* s'il est quasiconvexe pour une métrique des mots. D'après le paragraphe précédent, cela ne dépend pas du système de générateurs fini choisi. On se fixe malgré tout un graphe de Cayley Γ de G que l'on suppose δ-hyperbolique.

PROPOSITION 9.47. — *Si H est un sous-groupe K-quasiconvexe de G, alors $H \subset V_{K+10\delta}(\mathcal{C}(\Lambda_H))$.*

DÉMONSTRATION. Le fait 9.44 entraîne que $\mathcal{C}(\Lambda_H)$ est dans le $(K + 10\delta)$-voisinage de H. En particulier, il existe $h \in V_{K+10\delta}(\mathcal{C}(\Lambda_H))$. La proposition résulte maintenant du fait que H et $\mathcal{C}(\Lambda_H)$ sont H-invariants. ■

PROPOSITION 9.48. — *Si A et B sont quasiconvexes dans G, alors $A \cap B$ est quasiconvexe et $\Lambda_{A\cap B} = \Lambda_A \cap \Lambda_B$.*

DÉMONSTRATION. Supposons A et B K-quasiconvexes. L'intersection $V_K(A) \cap V_K(B)$ est invariante par $A \cap B$ et quasiconvexe. Il suffit de montrer que le quotient est de diamètre fini. En effet, cela montrera l'existence de D telle que $A \cap B \subset V_K(A) \cap V_K(B) \subset V_D(A \cap B)$. Du coup, on aura par double inclusion $\Lambda_{A\cap B} = \Lambda_A \cap \Lambda_B$.

On remarque que si $g \in V_K(A) \cap V_K(B)$, alors il existe $h \in B(e, 2K)$, $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, g), d(b, g) \leq K$ et $a = bh$. On note F l'ensemble fini des $h \in B(e, 2K)$ qui apparaissent ainsi.

Pour chaque $h \in F$, on considère $b_h \in B$ le plus proche de e tel que $b_h h \in A$. Soit $L = \max\{d(e, b_h), h \in F\}$. Prenons encore $g \in V_K(A) \cap V_K(B)$. Si $b \neq b_h$ pour tout $h \in F$, alors $a(b_h h)^{-1} = bb_h^{-1} \in A \cap B$ et $d(g, bb_h^{-1}) \leq K + L$. Si $b = b_h$, alors $d(g, e) \leq K + L$. Dans tous les cas, on a $g \in V_{K+L}(A \cap B)$ donc $A \cap B$ est quasiconvexe. ■

Avant de passer à la suite, on rappelle quelques faits.

FAIT 9.49. — *Soient G hyperbolique et $H < G$ un sous-groupe.*

(1) *Pour tout $g \in G$, on a $g\Lambda_H = \Lambda_{gH} = \Lambda_{gHg^{-1}}$.*

(2) *Si H et K sont commensurables, alors $\Lambda_H = \Lambda_K$.*

PROPOSITION 9.50. — *Soit H quasiconvexe dans G. Pour tout $\delta > 0$, $\{gH,\ \operatorname{diam} \Lambda_{gH} \geq \delta\}$ est fini.*

DÉMONSTRATION. Si $\operatorname{diam} \Lambda_{gH} \geq \delta$, alors il existe $a, b \in \Lambda_{gH}$ tels que $(a|b) \leq (1/\varepsilon) \log 1/\delta + C(\varepsilon\delta)$. Du coup., $d(e, [a,b]) \leq (1/\varepsilon) \log 1/\delta + C(\varepsilon\delta)$. Si H est K-quasiconvexe, alors gH aussi, donc il existe $R = R(\delta, K)$ tel que $d(e, gH) \leq R$. Or $B(e,R)$ est fini et $\{gH\}$ forment une partition, donc on en n'a qu'un nombre fini. ∎

COROLLAIRE 9.51. — *Si $H < G$ est quasiconvexe alors H est d'indice fini dans $K = \operatorname{stab} \Lambda_H$ et $\operatorname{stab} \Lambda_H$ est quasiconvexe. Pour tout sous-groupe quasiconvexe K, $\Lambda_K = \Lambda_H$ si et seulement si H et K sont commensurables.*

DÉMONSTRATION. Si $g \in \operatorname{stab} \Lambda_H$, alors gH est dans un ensemble fini de classes par la proposition 9.50, donc H est d'indice fini dans $\operatorname{stab} \Lambda_H$. De plus, $\operatorname{diam} \mathcal{C}(\Lambda_H)/\operatorname{stab} \Lambda_H \leq \operatorname{diam} \mathcal{C}(\Lambda_H)/H < \infty$ donc $\operatorname{stab} \Lambda_H$ est quasiconvexe. Du coup, si $\Lambda_H = \Lambda_K = \Lambda$, alors H et K sont d'indice fini dans $\operatorname{stab} \Lambda$. ∎

PROPOSITION 9.52. — *Soient H quasiconvexe et $R > 0$. Il existe k tel que, si $\xi_1, \ldots, \xi_k \in G/H$ sont deux à deux distincts, alors il existe deux indices i, j tels que $V_R(\xi_i) \cap V_R(\xi_j) = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. On suppose H K-quasiconvexe et $R \geq K + 10\delta$. On se fixe aussi une distance visuelle vue de e et de paramètre $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que si tous les R-voisinages s'intersectent deux à deux, alors on a une borne sur k.

Quitte à faire opérer G, on peut supposer que $\sum d(e, \xi_j)$ est minimal dans G.

Soit $D \geq 10\delta$; on considère un recouvrement fini $\mathcal{U}$ de ∂G par des ouverts suffisamment petits de sorte que $V_{R'+20\delta}(\mathcal{C}(U)) \cap B(e,D) = \emptyset$, pour $R' = 2R$. Ce choix nous assure de deux propritétés intéressantes.

(1) Si $\Lambda_\xi \subset U$, $\xi \in G/H$ et $U \in \mathcal{U}$, alors $\xi \subset V_{K+10\delta}(\mathcal{C}(\Lambda_\xi)) \subset V_R(\mathcal{C}(\xi))$ donc $V_R(\xi) \subset V_{R'}(\mathcal{C}(U))$.

(2) S'il existe une géodésique γ joignant $V_{R'}(\mathcal{C}(U_1))$ à $V_{R'}(\mathcal{C}(U_2))$ en passant par $B(e,D)$, alors $V_{R'}(\mathcal{C}(U_1)) \cap V_{R'}(\mathcal{C}(U_2)) = \emptyset$. En effet, s'il existe un point x dans cette intersection, alors pour tous $y_j \in V_{R'}(\mathcal{C}(U_j))$, $j = 1, 2$, les côtés $[x, y_j]$ sont contenus respectivement dans $V_{R'+10\delta}(\mathcal{C}(U_j))$ car $V_{R'}(\mathcal{C}(U_j))$ est 10δ-quasiconvexe d'après la proposition 9.42 et le fait 9.44. Par conséquent, la finesse des triangles implique que $[y_1, y_2]$ est inclus dans le $(R'+14\delta)$-voisinage de $\mathcal{C}(U_1) \cup \mathcal{C}(U_2)$, ce qui entraîne, par le choix des constantes, que $[y_1, y_2]$ est disjoint de $B(e,D)$ puisque

$$d(B(e,D), V_{R'+14\delta}(\mathcal{C}(U_1)) \cup V_{R'+14\delta}(\mathcal{C}(U_2))) \geq (R' + 20\delta) - (R' + 14\delta) \geq 6\delta\,.$$

Rappelons qu'il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $a \in \partial G$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $B_\varepsilon(a, \rho) \subset U$. En effet, pour tout $a \in \partial G$, il existe $r_a > 0$ et $U \in \mathcal{U}$ tels que $B_\varepsilon(a, r_a) \subset U$

puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert. On extrait un sous-recouvrement fini $\{B_\varepsilon(a_j, r_j/2)\}$ de $\{B(a, r_a/2)\}$ et on prend $\rho = \min\{r_j/2\}$.

D'après la proposition 9.50, il existe n tel qu'au plus n ensembles limites Λ_{ξ_j} ne sont pas contenus dans l'un de ces ouverts de $\mathcal{U}$. Si $k \le n$, alors la proposition est établie. Sinon, il existe $m \le n$ tel que, quitte à renuméroter les classes, on peut supposer que $\Lambda_{\xi_1}, \ldots \Lambda_{\xi_{k-m}}$ sont tous inclus dans des ouverts de $\mathcal{U}$.

Prenons, pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, $x_j \in \xi_j$ tel que $d(e, x_j) = d(e, \xi_j)$. Comme on a supposé $V_R(\xi_i) \cap V_R(\xi_j) \neq \emptyset$ pour tous i, j, on a, pour $1 \le j \le k - m$, $d(e, [x_1, x_j]) \ge D$ d'après (1) et (2), de sorte que $(x_1|x_j) \ge D - 4\delta$. Prenons $g \in [e, x_1]$ tel que $d(e, g) = D/2$. Ceci implique que $d(e, g) \le \min\{(x_1|x_j),\ 1 \le j \le k - m\}$ car $(D - 4\delta) - D/2 \ge \delta$. Donc la finesse des triangles impliquent que $d(g, \xi_j) \le d(e, \xi_j) - D/2 + 4\delta$, pour $j \in \{1, \ldots, k - m\}$. Vue la position des ξ_j, on obtient

$$\sum_{1 \le j \le k} d(e, \xi_j) \le \sum_{1 \le j \le k} d(g, \xi_j) \le \sum_{1 \le j \le k} d(e, \xi_j) + mD/2 - (k - m)(D/2 - 4\delta)$$

donc, comme $D \ge 10\delta$, on obtient $k\delta \le m(D - 4\delta)$. ■

COROLLAIRE 9.53. — *Si H est quasiconvexe, il existe k tel que si $\xi_1, \ldots, \xi_k \in G/H$, $g_j \in \xi_j$, alors*

(1) *l'intersection $\cap(g_j H g_j^{-1})$ est finie ;*

(2) *il existe au moins deux indices $i \neq j$ tels que $(g_i H g_i^{-1}) \cap (g_j H g_j^{-1})$ est finie.*

DÉMONSTRATION. Si toutes les intersections deux à deux sont infinies, alors les ensembles limites s'intersectent deux à deux d'après la proposition 9.48. Du coup, les $2K$-voisinages des classes $g_j H$ s'intersectent deux à deux. D'après la proposition 9.52, ceci n'est possible que si k est suffisamment petit.

La propriété (2) implique la propriété (1). ■

La propriété (1) affirme que la *hauteur* d'un sous-groupe quasiconvexe d'un groupe hyperbolique est finie, où la hauteur est l'entier maximal k tel qu'il existe k conjugués $g_j H g_j^{-1}$ d'intersection infinie avec $g_i H \neq g_j H$, $i \neq j$. La propriété (2), quant à elle, affirme que la *taille* d'un sous-groupe quasiconvexe d'un groupe hyperbolique est finie, où la taille est l'entier maximal k tel qu'il existe k conjugués $g_j H g_j^{-1}$ dont l'intersection deux à deux est infinie, où $g_i H \neq g_j H$, $i \neq j$.

9.5. **Cubulation de groupes hyperboliques**

On présente ici les travaux Sageev [Sag] et de Bergeron et Wise [BW].

THÉORÈME 9.54. — *Soit G un groupe hyperbolique. On suppose qu'il existe une famille $\mathcal{H}$ de sous-groupes quasiconvexes de codimension 1 telle que, pour tous $a, b \in \partial G$ distincts, il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que Λ_H sépare $\{a, b\}$. Alors G opère sur géométriquement sur un complexe cubique CAT(0).*

Ce complexe cubique est obtenu par cubulation de G par une sous-famille finie de groupes de $\mathcal{H}$.

9.5.1. *Choix des sous-groupes.* On se fixe un graphe de Cayley Γ localement fini de G. Pour toute géodésique passant par e, on trouve $H \in \mathcal{H}$, une composante U de $\partial\Gamma \setminus \Lambda_H$ contenant une extrémité et $V = \Gamma \setminus (\Lambda_H \cup U)$ contenant l'autre. On obtient ainsi un recouvrement des géodésiques passant par e par des ouverts, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini par compacité de cet ensemble de géodésiques. Notons $H_1, \dots, H_n$ les groupes ainsi obtenus. Pour tous $a, b \in \partial\Gamma$, on considère une géodésique γ les reliant et $g \in \gamma$ de sorte que les extrémités de $g^{-1}(\gamma)$ soient séparées par un certain Λ_{H_j}. Du coup, $\{a, b\}$ est séparé par Λ_{gH_j}.

Comme chaque H_j est de codimension 1 et qu'ils sont en nombre fini, la proposition 7.40 nous donne l'existence de $R > 0$ tel que, si A_j est une composante de $G \setminus V_R(H_j)$ bien choisie, alors A_j est un H_j-ensemble presque invariant. On construit le complexe cubique CAT(0) X associé à la structure d'espace à murs induite par les A_j. On note X_j les complexes définis par A_j et $p_j : X \to X_j$ leur projection, *cf.* la proposition 7.33.

9.5.2. *Dimension finie du complexe.* Comme les hyperplans sont en bijection avec les murs (corollaire 7.30) et deux hyperplans sont transverses si les murs le sont (proposition 7.28), la dimension du complexe est définie par la famille maximale de murs transverses. Pour montrer que cette dimension est finie, il suffit de montrer que celle de chaque X_j est finie.

Notons que si deux hyperplans sont transverses, alors on aura $V_R(g_1H_j) \cap V_R(g_2H_j) \neq \emptyset$ pour les classes correspondantes. Or la proposition 9.52 implique que ce nombre est borné pour chaque j, établissant ainsi la finitude de la dimension d de X.

9.5.3. *Cocompacité de l'action.* Pour montrer que l'action est cocompacte, il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de cubes maximaux, c'est-à-dire de cubes qui ne sont les faces d'aucun autre cube. Prenons un tel cube : il est déterminé par les hyperplans qui le coupent, donc par les murs correspondant, symbolisés par des $V_R(g_1H_{j_1}), \dots, V_R(g_\ell H_{j_\ell})$, où $\ell \leq d$. Comme les murs sont transverses, ces voisinages s'intersectent deux à deux. Or, la proposition 9.43 implique qu'ils sont tous à distance bornée d'un point p, indépendamment du cube puisque $\ell \leq d$. En ramenant p à e, on constate que chaque orbite est représentée par une famille de classes $\{g_mH_{j_m}\}$ deux à deux disjointes qui doivent intersecter une boule de rayon fixé en e. On n'a donc qu'un nombre fini de possibilités, donc d'orbites. D'où la cocompacité.

9.5.4. *Action proprement discontinue.* Enfin, il suffit de montrer que le stabilisateur de tout cube est fini. En effet, un compact d'un complexe cubique est contenu dans une union finie de cubes, donc si $\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$ est infini pour deux compacts K et L, alors il existe un cube Q intersectant K et un cube Q' intersectant L tels que $\{g \in G,\ g(Q) = Q'\}$. En se fixant $g_0 \in G$ tel que $g_0(Q) = Q'$ et en observant que si

$g(Q) = Q'$, alors $g_0^{-1}g(Q) = Q$, on constate que $\{g \in G,\ g(Q) = Q'\} = g_0 \mathrm{stab}\, Q$. Donc l'action de G sera proprement discontinue si $\mathrm{stab}\, Q$ est fini pour tout cube Q.

On procède par l'absurde et on suppose que l'un d'eux est infini. Un cube Q est décrit par une présélection $\mathrm{stab}\, Q$-invariante, donnée par tous les demi-espaces contenant ce cube, donc de différence symétrique finie avec une ultrasélection ; voir la proposition 7.23. Puisque ce stabilisateur est infini, il accumule $\partial\Gamma$ en au moins deux points $\{a, b\}$. Ces points sont séparés par un ensemble limite Λ_{gH_j} par construction. La proposition 9.40 implique que l'on pourra extraire une suite (g_n) de $\mathrm{stab}\, Q$ telle que (g_n) tend vers a et (g_n^{-1}) tend uniformément vers b sur les compacts de $(G \cup \partial G) \setminus \{a, b\}$. Cela implique que $\{\Lambda_{g_n H_j}\}_n$ est infinie, donc, quitte à translater $g\Lambda_{H_j}$, on peut supposer qu'il est associé à un demi-espace Z de la présélection. Sans perte de généralité, on peut aussi supposer $b \notin \Lambda_Z$. Du coup, $g_n(Z)$ tend vers a et donc, pour tout $x \in G$, $x \notin g_n(Z)$ pour n assez grand, ce qui interdit (g_n) à stabiliser Q. C'est la contradiction recherchée.

Cela achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[A *et al.*] Juan Alonso *et al.* Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short, accessible sur `http://www.latp.univ-mrs.fr/~hamish/MSRInotes2004.pdf`.

[BW] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise. A boundary criterion for cubulation. *Amer. J. Math.* **134**(2012), 843–859.

[Bow1] Brian H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.* **11**(1998), 643–667.

[Bow2] Brian H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 23–54. de Gruyter, Berlin, 1999.

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CDP] Michel Coornaert, Thomas Delzant, and Athanatase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov.*, volume 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Lecture Notes in Mathematics.

[GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[GMRS] Rita Gitik, Mahan Mitra, Eliyahu Rips, and Michah Sageev. Widths of subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**(1998), 321–329.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[KS] Ilya Kapovich and Hamish Short. Greenberg's theorem for quasiconvex subgroups of word hyperbolic groups. *Canad. J. Math.* **48**(1996), 1224–1244.

[Sag] Michah Sageev. Codimension-1 subgroups and splittings of groups. *J. Algebra* **189**(1997), 377–389.