8. ACTIONS DE GROUPES SUR DES COMPLEXES CUBIQUES CAT(0)

On étudie quelques propriétés des groupes opérant cellulairement sur des complexes cubiques CAT(0).

8.1. Généralités

On commence par le groupe d'isométries d'un cube.

Proposition 8.1. — *Le groupe d'isométries du cube* $[(-1/2),(1/2)]^n$ *est isomorphe à* $\mathfrak{S}_n \ltimes (Z/2\mathbb{Z})^n$.

Démonstration. A chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe l'isométrie du cube u_σ telle que $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Notons aussi ρ_j la réflexion orthogonale par rapport à l'hypercube $H(Q, e_j)$.

Si g est une isométrie du cube, alors elle permute les hyperplans, ce qui nous donne l'existence d'une permutation σ telle que $g \circ u_\sigma$ fixe chaque hyperplan. Du coup, on a $(g \circ u_\sigma)(e_j) = \pm e_j$. En appliquant ρ_j chaque fois que le signe est changé, on obtient une écriture de g. Par conséquent le groupe des isométries est engendré par $\{u_\sigma, \rho_j\}$.

On a $u_\sigma \circ \rho_j = \rho_{\sigma(j)} \circ u_\sigma$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et $\rho_i \circ \rho_j = \rho_j \circ \rho_i$ pour chaque i, j, donc ce groupe est isomorphe à $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. ■

Corollaire 8.2. — *Soit G un groupe opérant sur un complexe cubique. Quitte à considérer sa subdivision barycentrique, on a les propriétés suivantes.*

(1) *Le quotient X/G a une structure de complexe cubique.*

(2) *Pour tout demi-espace Z bordé par un hyperplan Y, on a* $\operatorname{stab} Y = \operatorname{stab} Z$.

Démonstration. Notons X' la subdivision barycentrique de X. Si $g \in G$ fixe un cube Q de X, alors la proposition précédente indique que ses points fixes sont dans la réunion des hypercubes de Q. Par conséquent, on en déduit que les points fixes forment une réunion de cubes de X'. Par conséquent, les cubes de X' se projettent en cubes de X'/G injectivement (puisque les cubes de X et ses hyperplans ne sont pas mélangés).

Un hyperplan Y de X' coupe un cube de X identifié à $[(-1/2), 1/2]^n$ par un hyperplan d'équation $\{x_j = \pm 1/4\}$. Par conséquent, si g fixe un hyperplan Y de X', alors il fixe chaque cube de X sans pouvoir les retourner. Ceci montre que l'on a $\operatorname{stab} Y = \operatorname{stab} Z$ pour tout demi-espace Z bordé par un hyperplan Y. ■

Proposition 8.3. — *Soit G un groupe de type fini qui opère sur un complexe cubique CAT(0) X. Il existe un sous-complexe convexe $Z \subset X$, invariant par G, qui admet un nombre fini d'orbites d'hyperplans.*

Démonstration. On se fixe un système de générateurs fini S de G et un sommet v de X. Notons Z l'intersection des demi-espaces de X qui contiennent l'orbite $G(v)$. Par construction, Z est convexe et invariant par G. De plus, chaque hyperplan de Z sépare l'orbite de v. Notons $\mathcal{H}_0$ l'ensemble des hyperplans qui séparent v de l'un des $s(v)$, $s \in S$. Il s'agit d'un ensemble fini. Soit Y un hyperplan de Z : on peut trouver $g \in G$ et $s \in S$ tels que Y sépare $g(v)$ de $gs(v)$. Du coup, $g^{-1}(Y) \in \mathcal{H}_0$. ■

8.2. **Actions sans point fixe et sous-groupes de codimension 1**

L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant, dû à Sageev [Sag] et Gerasimov [Ger].

Théorème 8.4. — *Soit G un groupe de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le groupe G opère sans point fixe sur un complexe cubique CAT(0).*

(2) *Le groupe G contient un sous-groupe de codimension* 1.

Commençons par étudier l'existence de points fixes dans un cadre général.

Théorème 8.5. — *Soit X un espace CAT(0) complet et $E \subset X$ un ensemble borné. Il existe une unique boule fermée de rayon minimale qui contient E.*

Démonstration. Notons r_E le plus grand minorant des rayons $r > 0$ tels qu'il existe une boule fermée B de rayon r qui contient E. Prenons une suite de boules fermées $B_n = B(x_n, r_n)$ telle que $E \subset B_n$ et (r_n) tend vers r_E. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r < r_E < R$ tel que tout segment contenu dans la couronne $A = \{r < |z| < R\}$ du plan complexe est de longueur au plus $\varepsilon/2$.

On se fixe n_0 de sorte que $r_n \leq R$ pour $n \geq n_0$ et on considère $p, q \geq n_0$. Notons m le point milieu de $[x_p, x_q]$. Comme $r < r_E$, il existe au moins un point $z \in E$ tel que $d(z, m) > r$. Prenons un triangle de comparaison $\Delta = \{\bar{x}_p, \bar{x}_q, \bar{z}\}$. On a donc $d(\bar{m}, \bar{z}) \geq d(m, z) > r$; comme $\bar{m}$ est le milieu de $[\bar{x}_p, \bar{x}_q] \subset B(\bar{z}, R)$. Par convexité, $B(\bar{z}, r) \cap [\bar{x}_p, \bar{x}_q]$ est un segment qui ne contient pas le milieu $\bar{m}$, donc au moins la moitié du segment est dans la couronne. On en déduit que $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$. ■

Corollaire 8.6. — *Soit G un groupe opérant par isométries sur un espace métrique CAT(0) complet. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe un point fixe.*

(2) *Toutes les orbites sont bornées.*

(3) *Une orbite est bornée.*

DÉMONSTRATION. Les implications (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) sont évidentes. Supposons donc qu'il existe une orbite bornée $G(z)$. D'après ci-dessus, il existe une unique boule fermée B de rayon minimal contenant $G(z)$. Soit $g \in G$; l'image $g(B)$ est une boule contenant $G(z)$ de même rayon que B. Par unicité, on en déduit que $g(B) = B$, donc le centre de B est préservé. C'est un point fixe de G. ■

COROLLAIRE 8.7. — *Soit G un groupe opérant sur un complexe cubique. Alors G admet un point fixe si et seulement s'il existe une orbite bornée.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire précédent, on a un point fixe p de l'action de G sur la complétion $\overline{X}$. Comme p est dans la complétion, il existe un cube Q tel que $d(p, Q) \leq 1/6$. Par conséquent, on a $d(Q, g(Q)) \leq 1/3$ donc $Q \cap g(Q)$ est un cube non vide pour chaque $g \in G$. On en déduit que pour tout sous-ensemble fini $F \subset G$, l'intersection $\cap_{g\in F} g(Q)$ est un cube non vide de X. Soit k la dimension minimale des cubes obtenus par les intersections finies de la forme $\cap_{g\in F} g(Q)$ quand on fait varier F. Prenons F un sous-ensemble qui réalise cette dimension et notons $Q_0 = \cap_{g\in F} g(Q)$. Pour montrer que G a un point fixe dans X, il suffit de montrer que Q_0 est G-invariant, puisque son centre sera ainsi fixé.

Soit $h \in G$. Alors $h(Q_0) \cap Q_0 = \cap_{g\in F\cup hF} g(Q)$ est un cube de X non vide contenu dans Q_0. Par minimalité de la dimension de Q_0, on en déduit que $h(Q_0) = Q_0$. ■

Supposons que G opère sur un complexe cubique CAT(0). Soit Z un demi-espace bordé par un hyperplan Y. Ou bien les stabilisateurs de Z et Y sont les mêmes, ou bien le stabilisateur de Z est d'indice deux dans celui de Y. On écrira $H = \operatorname{stab}^+ Y = \operatorname{stab} Z$.

LEMME 8.8. — Soient X un complexe cubique, Y un hyperplan, Z un demi-espace bordé par Y, $H = \operatorname{stab} Z$ et $v \in Z$. On note $A_v = \{g \in G,\ g(v) \in Z\}$.

(1) On a $A_{g(v)} = A_v g^{-1}$ pour tout $g \in G$;

(2) On a $HA_v = A_v$ et $A_v \triangle A_v g$ est H-fini.

Ce lemme signifie que A_v est un H-ensemble presque invariant si et seulement si A_v et $G \setminus A_v$ sont H-infinis.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord,

$$A_{g(v)} = \{k \in G,\ kg(v) \in Z\} = \{kg^{-1} \in G,\ k(v) \in Z\} = A_v g^{-1}$$

montrant le premier point. On vérifie que si $h \in H$ et $g \in A_v$ alors $g(v) \in Z$, donc $hg(z) \in Z$ puisque h préserve Z et il en résulte $HA = A$.

Soit $g \in G$. Fixons-nous un chemin d'arêtes $c = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ entre v et $g^{-1}(v)$. Notons s_j un élément de G tel que $s_j(e_j)$ est dual à Y s'il existe. Si $k \in A \setminus Ag$, alors $k(v) \in Z$ et $k(g^{-1}(v)) \notin Z$. Donc il existe j tel que $k(e_j)$ est dual à Y. Du coup, $ks_j^{-1} \in H_Y$, où $H_Y = \operatorname{stab} Y$, et $k \in H_Y s_j$. De même, si $k \in A_v g \setminus A_v$, alors $kg^{-1}(v) \in Z$ et $k(v) \notin Z$, donc $k \in \cup_j H_Y s_j$. Cela permet de conclure puisque $[H_Y : H] \leq 2$. ■

PROPOSITION 8.9. — *Soit G un groupe de type fini opérant sur un complexe cubique CAT(0). On suppose qu'aucun stabilisateur d'hyperplan n'est d'indice fini dans G. Pour tout hyperplan Y, il existe un demi-espace Z_Y tel que $\{g \in G,\ g(v) \in Z_Y\}$ est* $\operatorname{stab} Z_Y$*-fini, si et seulement si G admet un sommet fixe.*

DÉMONSTRATION. Supposons que G admet un sommet fixe v. On considère, pour chaque hyperplan Y, le demi-espace Z_Y qui ne contient pas v. Du coup, $\{g \in G, g(v) \in Z_Y\} = \emptyset$.

Réciproquement, supposons que chaque hyperplan admet un demi-espace Z_Y tel que $\{g \in G, g(v) \in Z_Y\}$ est $\operatorname{stab} Z_Y$-fini. Si, pour l'un d'eux, le demi-espace complémentaire Z_Y^* a la propriété que l'ensemble $\{g \in G, g(v) \in Z_Y^*\}$ est aussi $\operatorname{stab} Z_Y$-fini, alors on en déduit que $\operatorname{stab} Y$ est d'indice fini dans G, contrairement aux hypothèses.

On suppose maintenant que l'ensemble $\{g \in G, g(v) \in Z_Y^*\}$ est $\operatorname{stab} Z_Y$-infini pour chaque demi-espace complémentaire Z_Y^*. Il vient $g(Z_Y) = Z_{g(Y)}$ et $g(Z_Y^*) = Z_{g(Y)}^*$ pour tout $g \in G$.

Comme G est de type fini, on peut supposer que les hyperplans de X forment un nombre fini d'orbites $GY_1, \dots, GY_k$. Pour chaque Y, on choisit $g_Y \in G$ tel que $g_Y(Y) \in \{Y_1, \dots Y_k\}$. Notons que deux choix de g_Y diffèrent d'un élément de $H_j = \operatorname{stab} Y_j = \operatorname{stab}^+ Y_j$.

On considère $T = \{Z_Y^*\}_Y$ qui forme une ultrasélection invariante par G. Montrons qu'elle définit bien un sommet de X. Il suffit de montrer que T est commensurable à l'ensemble S_v des demi-espaces qui contiennent v. On a $S_v \setminus T = \{Y,\ v \in Z_Y\}$, et cet ensemble est en bijection avec $\cup_j \{g_Y,\ g_Y^{-1}(v) \in Z_{Y_j}\}$ qui est fini, puisque chaque g_Y définissent des H_j-classes distinctes. Cela permet de conclure qu'il existe un sommet $v \in X$ fixé par G. ■

DÉMONSTRATION. (thm 8.4) Si G admet un sous-groupe H de codimension 1, alors le théorème 7.39 montre que G opère sur un complexe cubique dont le stabilisateur de l'un des hyperplans Y contient H comme sous-groupe d'indice fini et tel que les ensembles $\{g \in G,\ g(v) \in Z\}$ et $\{g \in G,\ g(v) \in Z^*\}$ sont des réunions infinies de H-orbites. Prenons la subdivision barycentrique de X. On trouve des hyperplans parallèles à Y de sorte que la propriété ci-dessus est toujours vérifiée. Donc, d'après la proposition 8.9, G n'a pas de point fixe.

Réciproquement, supposons que G opère sans point fixe sur un complexe cubique. On peut supposer que l'on n'a qu'un nombre fini d'orbites d'hyperplans $\{GY_1, \dots, GY_k\}$.

Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_\ell$, $0 \le \ell \le k$ les hyperplans dont le stabilisateur est d'indice fini dans X. On note que $\{GY_1, \dots, GY_\ell\}$ est un ensemble fini d'hyperplans. On considère le complexe cubique X' et la projection $p : X \to X'$ associés à la structure d'espaces à murs définie par ces hyperplans par la proposition 7.33. Comme on n'a qu'un nombre fini de murs, X' est compact et CAT(0), donc le corollaire 8.7 nous donne l'existence d'un point fixe $x' \in X'$. Si x' est un sommet alors $Z = p^{-1}(\{x'\})$ est un sous-complexe convexe de X invariant par G dont aucun hyperplan de $\{GY_1, \dots, GY_\ell\}$ ne coupe Z, donc tel qu'aucun stabilisateur d'hyperplan n'est d'indice fini. Si aucun sommet n'est fixe, alors le cube Q' de dimension minimale contenant x' est invariant par G. Il est défini par les hyperplans $\{Y'_1, \ldots, Y'_m\}$ qui le coupent. Par construction, ces hyperplans dans X s'intersectent deux à deux, donc globalement d'après la proposition 6.36. En considérant la subidivision barycentrique de X, cette intersection définit un sous-complexe convexe Z invariant par G, dont aucun hyperplan a un stabilisateur d'indice fini. Notons que $\ell < k$, puisque l'on a supposé que G opère sans point fixe dans X.

On s'est donc ramené à une action sans point fixe de G sur un complexe cubique CAT(0) X avec un nombre fini d'orbites d'hyperplans et dont le stabilisateur de tout hyperplan est d'indice infini dans G. La proposition 8.9 nous donne l'existence d'un hyperplan Y tel que $\{g \in G,\ g(v) \in Z\}$ et $\{g \in G,\ g(v) \in Z^*\}$ sont des réunions infinies de H-orbites, où $H = \operatorname{stab} Z$. Du coup, le lemme 8.8 implique que l'ensemble A associé est un H-ensemble presque invariant. Donc H est de codimension 1. ■

8.3. **Scindements**

PROPOSITION 8.10. — *Si G se scinde au-dessus d'un sous-groupe H alors H est de codimension 1 dans G.*

DÉMONSTRATION. D'après la théorie de Bass-Serre, G opère sur un arbre simplicial sans point fixe et avec une seule orbite d'arêtes et dont les stabilisateurs sont les classes de conjugaison de H. Comme un arbre simplicial est un complexe cubique CAT(0), la proposition 8.9 nous montre que, pour tout hyperplan Y, les ensembles $\{g \in G,\ g(v) \in Z\}$ et $\{g \in G,\ g(v) \in Z^*\}$ sont infinis, où Z et Z' sont les demi-espaces définis par Y. Par conséquent, ce sont des ensembles presque $\operatorname{stab} Y$-invariant, impliquant ainsi que H est de codimension 1. ■

Ce paragraphe s'intéresse donc à la réciproque : si H est de codimension 1, le groupe G se scinde-t-il au-dessus de H ? Lorsque H est le groupe trivial, ou un groupe fini, le théorème de Stallings montre que l'on a un scindement au-dessus d'un groupe K *commensurable* à H : le groupe $H \cap K$ est d'indice fini dans H et dans K.

Notre question devient donc : le groupe G se scinde-t-il au-dessus d'un sous-groupe commensurable à H ?

Là encore, nous avons un contre-exemple : le groupe G de présentation

$$< a, b, c | a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ca)^3 >$$

est le groupe qui laisse invariant le pavage par triangles équilatéraux du plan euclidien $\mathbb{E}^2$, *cf.* exercice 4.19. Les droites du pavage définissent une structure d'espace à murs invariante par G et sans point fixe, donc G opère sur un complexe cubique CAT(0) sans point fixe. Du coup, G admet un sous-groupe de codimension 1. Or, l'exercice 4.19 avait pour but de montrer que G a la propriété (FA), impliquant ainsi que G n'admet pas de scindement.

L'objet de ce paragraphe est donc de trouver des conditions sur un sous-groupe de codimension 1 qui assurent que le groupe ambiant admette un scindement. La plupart des résultats sont issus de [Nib].

DÉFINITION 8.11. — *Soient G un groupe de type fini opérant sur un complexe cubique X et Y un hyperplan. L'obstruction de scindement est*

$$\mathcal{S}_Y = \{g \in G \setminus \mathrm{stab}Y,\ g(Y) \cap Y \neq \emptyset\}\,.$$

Si H est un sous-groupe de codimension 1 et A un H-ensemble presque invariant, on définit l'obstruction de scindement

$$\mathcal{S}_A(H) = \{g \in G,\ g(A) \cap A^* \neq \emptyset, g(A) \cap A \neq \emptyset, g(A^*) \cap A \neq \emptyset \ \textit{et}\ g(A^*) \cap A^* \neq \emptyset\}\,.$$

EXERCICE 8.12. — *Supposons que H est un sous-groupe de codimension 1 d'un groupe G muni d'un H-ensemble presque invariant A et que X est le complexe cubique associé. Montrer que $\mathcal{S}_Y = \mathcal{S}_A$ où Y est l'hyperplan préservé par H.*

THÉORÈME 8.13. — *Soient G un groupe de type fini et H un sous-groupe de G de codimension 1. Le groupe G se scinde au-dessus de H si et seulement s'il existe un H-ensemble presque invariant A de stabilsateur H telle que $\mathcal{S}_A = \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un H-ensemble presque invariant A tel que $\mathcal{S}_A = \emptyset$. Prenons le complexe cubique X associé à A.

Soit Z_A le demi-espace correspondant à A et Y_A son hyperplan. Notons que l'on n'a qu'une seule orbite d'hyperplans. Comme $\mathcal{S}_A = \emptyset$, cela signifie que, pour tout $g \in G$, si $g \notin \mathrm{stab}(Y_A)$, alors $Y_A \cap g(Y_A) = \emptyset$. Autrement dit X est de dimension 1, donc un arbre. De plus, $\mathrm{stab}\, Z_A = H$ par hypothèses. Comme H est de codimension 1, l'action n'a pas de point fixe en vertu du théorème 8.4. Si $\mathrm{stab}\, Y_A = H$, alors on n'a pas d'inversion d'arêtes, donc G se scinde au-dessus de H. Sinon, H est d'indice 2 dans $\mathrm{stab}Y_A$, on se ramène à une action sans inversion d'arêtes en subdivisant les arêtes en deux : on constate que H devient le stabilisateur de l'une de ses arêtes, nous permettant ainsi de conclure que G se scinde au-dessus de H.

Réciproquement, si G se scinde au-dessus de H, alors on a une action de G sur un arbre simplicial T, sans point fixe, sans inversion d'arêtes et avec une seule orbite d'arêtes, l'une d'elles —e— étant stabilisée par H. Pour T' un sous-arbre bordé par e et $v \in T' \cap e$, on associe $A = \{g \in G,\ g(v) \in T'\}$. On vérifie que A est un H-ensemble presque invariant, de stabilisateur H. D'autre part, comme T est de dimension 1, deux hyperplans sont ou bien disjoints ou bien confondus (ce sont les milieux des arêtes), impliquant ainsi $\mathcal{S}_A = \emptyset$.■

FAIT 8.14. — *Soit H le stabilsateur d'un hyperplan Y ; l'obstruction de scindement est de la forme $\mathcal{S}_Y = HFH$.*

DÉMONSTRATION. Si $g \in \mathcal{S}_Y$, $h_1, h_2 \in H$, alors $g(h_1(Y)) \cap h_2(Y) = g(Y) \cap Y \neq \emptyset$, donc $(h_2^{-1} g h_1)(Y) \cap Y \neq \emptyset$. Cela implique qu'il existe F tel que $\mathcal{S}_Y = HFH$. ■

PROPOSITION 8.15. — *Si G et H sont de type fini et A est un H-ensemble presque invariant alors on peut choisir F fini de sorte que $\mathcal{S}_A = HFH$.*

DÉMONSTRATION. Prenons un système de générateurs S_0 fini de G comprenant un système de générateurs de H. Soit X le graphe de Cayley associé et $\pi : X \to X_H$ le quotient par H. Il existe $T \subset G$ fini tel que $\partial_X A = HT$. Remarquons que $H \in \partial_X A$ car $H \neq G$, donc G a un générateur qui n'est pas dans H.

Supposons que $\partial_X A \subset X$ est connexe. Si $g \in \mathcal{S}_A$, alors $A \cap g(A)$ et $A^* \cap g(A)$ est non vide, donc $\partial A \cap g(A)$ est non vide. De même, on montre que $\partial_X A \cap g(A^*)$ est non vide. Comme on a supposé ∂A connexe, on en déduit $\partial_X A \cap g(\partial A) \neq \emptyset$. Autrement dit, il existe $t_1, t_2 \in T$, $h_1, h_2 \in H$ tels que $g h_1 t_1 = h_2 t_2$, donc on trouve $g = h_2 (t_2 t_1^{-1}) h_1^{-1}$, impliquant ainsi $g \in HTT^{-1}H$. L'ensemble $F = TT^{-1}$ est fini, donc on a montré la proposition sous la condition ∂A connexe.

Il reste à trouver un graphe de Cayley de sorte que ∂A soit connexe. Notons k la plus grande longueur de $t \in T$ et considérons $S = B_X(e, k) \setminus \{e\}$. Notons Y le nouveau graphe de Cayley de G. On remarque que chaque $g \in HT$ est connecté à H, car $T \subset S$. Or H est connexe car S_0 contient un système de générateurs de H, donc $\partial_X A$ est connexe dans Y. Maintenant, montrons que $\partial_Y A$ est le $(k-1)$-voisinage de $\partial_X A$ dans $X \cap A$: en effet, si $a \in \partial_Y A$, alors il existe $s \in B_X(e, k)$ tel que $as \notin A$, donc tout segment géodésique $[a, as]$ dans X passe par $\partial_X A$, impliquant que $\partial_Y A$ est dans le $(k-1)$-voisinage. Réciproquement, si $a \in A$ est dans le $(k-1)$-voisinage de $\partial_X A$, il existe $s \in B_X(e, k-1)$ tel que $as \in \partial_X A$, donc il existe $s' \in S_0$ tel que $ass' \notin A$. Comme $ss' \in B_X(e, k)$, on a $a \in \partial_Y A$.

Tout point de $\partial_Y A$ est voisin dans Y d'un point de $\partial_X A$, donc $\partial_Y A$ est connexe. ■

EXERCICE 8.16. — *Prenons $G = \mathbb{Z}$, $A = \{-2\} \cup \mathbb{N}$.*

(1) *Montrer que A est un ensemble presque invariant.*
(2) *Déterminer le complexe cubique associé.*
(3) *Déterminer $\mathcal{S}_A$.*

THÉORÈME 8.17 (Niblo). — *Soient G de type fini, $H < G$ un sous-groupe de codimension 1 de type fini, A un H-ensemble presque invariant et $F \subset G$ fini tel que $\mathcal{S}_A = HFH$. Si $G' =< F, H >$ est un sous-groupe propre de G alors G se scinde au-dessus d'un sous-groupe de G'.*

DÉMONSTRATION. Soit X le complexe cubique associé à A. Si $F = \emptyset$, alors on a un scindement au-dessus d'un sous-groupe commensurable à H. On suppose F non vide.

On considère le graphe Γ_τ de transversalité des hyperplans de X. Les sommets de ce graphe sont les hyperplans de X et deux hyperplans distincts forment une arête s'ils s'intersectent. Le groupe G opère sur ce graphe et le stabilisateur de la composante Γ contenant l'hyperplan Y associé à A est G'. En effet, si $g(\Gamma) = \Gamma$, alors $g(Y) \in \Gamma$ et il existe des hyperplans distincts $Y_0, \ldots, Y_k$ tels que $Y = Y_0$, $Y_k = g(Y)$ et $Y_j \cap Y_{j+1} \neq \emptyset$ pour $0 \leq j < k$. Comme X n'a qu'une seule orbite d'hyperplans par construction, il existe $g_j \in G$ tel que $g_j(Y) = Y_j$, avec $g_0 = e$ et $g_k = g$. On a donc

$$\emptyset \neq Y_j \cap Y_{j+1} = g_j(Y) \cap g_{j+1}(Y) = g_j(Y \cap g_j^{-1} g_{j+1}(Y))$$

impliquant ainsi $g_j^{-1} g_{j+1} \in \mathcal{S}_A$. Du coup, comme $g = g_0^{-1} g_1 \circ \ldots \circ g_{k-1}^{-1} g_k$, on a $g \in < HFH >$. Par ailleurs, si $g \in < HFH >$, le raisonnement précdent montre que $g(Y) \in \Gamma$, donc $\operatorname{stab} G =< HFH >$. Or, $HFH \subset G'$, $F \subset HFH$ et $H \subset \operatorname{stab} \Gamma$, donc $G' =< HFH >$.

Comme G' est un sous-groupe propre de G, Γ_τ n'est pas connexe, donc on peut construire une fonction continue et surjective $\chi : \Gamma_\tau \to \{0,1\}$.

Montrons qu'il existe un sommet de X qui disconnecte X. Pour cela, on utilise χ pour définir une fonction surjective χ_a à valeurs dans $\{0,1\}$ définie sur l'ensemble des arêtes de X : si e est une arête duale à un hyperplan Y, on pose $\chi_a(e) = \chi(Y)$. Il existe un sommet et deux arêtes incidentes e_0, e_1 telles que $\chi_a(e_0) \neq \chi_a(e_1)$; ce sera un point de coupure de X. Si ce n'est pas le cas, on pourrait étendre χ_a en une fonction surjective $\chi_s : X^{(0)} \to \{0,1\}$ telle que $\chi_s(v) = \chi_a(e)$ pour toute arête e incidente à v. Cela définirait une fonction continue $\chi : X^{(1)} \to \{0,1\}$ surjective, contredisant que X est connexe.

Soit donc v le sommet en question : c'est un point de coupure locale car les hyperplans duaux à nos deux arêtes ne sont pas connectées. Comme X est contractile (car CAT(0)), v est un point de coupure globale : en effet, tout lacet injectif basé en v et longeant $e_0 \cup e_1$ admettrait une homotopie dans un voisinage arbitrairement petit de v, contredisant que v est un point de coupure locale.

On construit maintenant un arbre simplicial T comme suit : notons V_1 l'ensemble des sommets qui disconnectent X et V_2 l'ensemble des composantes connexes du complémentaire, qui correspondent aux composantes de Γ_τ. L'ensemble des sommets de T est $V_1 \cup V_2$, et une arête est de la forme $(v, Z) \in V_1 \times V_2$ avec $v \in \partial Z$. On obtient bien un arbre car les sommets disconnectent X, donc T. Par ailleurs, le groupe G opère sur T sans inversion d'arêtes car le type des sommets est préservé. Cette action est sans point fixe car H est de codimension 1. Donc la théorie de Bass-Serre nous fournit un scindement de G, au-dessus d'un stabilisateur d'arête, par exemple une incidente au sommet correspondant à Γ : son stabilisateur est donc un sous-groupe du stabilisateur de Γ, à savoir G'. ■

EXERCICE 8.18. — *Soit Γ une composante connexe du graphe de transversalité d'un complexe cubique CAT(0). Notons Z la réunion des cubes qui intersectent l'un au moins des hyperplans de Γ. Montrer que Z est combinatoirement convexe.*

DÉFINITION 8.19 (commensurateur). — *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Le commensurateur de H dans G est l'ensemble de $g \in G$ tel que $gHg^{-1} \cap H$ est d'indice fini dans H et dans gHg^{-1}.*

EXERCICE 8.20. — *Montrer que H est distingué dans son commensurateur.*

THÉORÈME 8.21 (Niblo). — *Soient G de type fini, $H < G$ un sous-groupe de codimension 1 de type fini, A un H-ensemble presque invariant de stabilisateur H et $F \subset G$ fini tel que $\mathcal{S}_A = HFH$. Si $< HFH >$ est un sous-groupe du commensurateur de H, alors G se scinde au-dessus d'un sous-groupe commensurable à H.*

Voir [Nib] pour la démonstration. On conclut par un dernier résultat.

PROPOSITION 8.22. — *Soient G de type fini, $H < G$ un sous-groupe de codimension 1 de type fini. Si H est séparable, alors G contient un sous-groupe de type fini qui se scinde au-dessus d'un sous-groupe commensurable à H.*

DÉMONSTRATION. Prenons un H-ensemble presque invariant A. Si $\mathcal{S}_A = \emptyset$ alors G se scinde au-dessus d'un sous-groupe commensurable à H. Sinon, il existe $F \subset G$ fini tel que $\mathcal{S}_A = HFH$. Comme F est fini, G contient un sous-groupe G' d'indice fini qui contient H mais qui est disjoint de F. Notons $A' = G' \cap A$. On vérifie que A' est un H-ensemble presque invariant de G', puis que $\mathcal{S}_{A'} \subset G' \cap \mathcal{S}_A = \emptyset$. D'où la conclusion. ∎

8.4. **Exemples de groupes opérant sur des complexes cubiques**

Nous avons vu dans un chapitre précédent les groupes d'Artin à angles droits.

8.4.1. *Groupes de Coxeter.* Nous présentons quelques nouveaux exemples : les groupes de Coxeter, voir [NR].

Etant donné un ensemble fini d'indice $\{1, \ldots, n\}$ et une matrice symétrique $(m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ à coefficients naturels dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} \ge 2$ si $i \ne j$, on considère le groupe de Coxeter W défini par la présentation

$$W =< s_1, \ldots, s_n | s_j^2, (s_i s_j)^{m_{ij}} > \ .$$

On adopte la convention que $(s_i s_j)^\infty$ signifie qu'aucune relation n'est imposée entre s_i et s_j. Le couple (W, S), où $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ définit un *système de Coxeter.*

EXERCICE 8.23. — *On considère un espace vectoriel E réel de base $(e_j)_{1 \le j \le n}$. Sur E, on définit une forme bilinéaire symétrique par $B_W(e_i, e_j) = -\cos(\pi/m_{ij})$ avec comme convention que $-\cos(\pi/\infty) = -1$, de forme quadratique q_W.*

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit un endomorphisme σ_j de E par $\sigma_j(x) = x - 2B_W(e_j, x)e_j$.

(1) *Montrer que l'orthogonal de e_j est un hyperplan Y_j supplémentaire de la droite définie par e_j et que σ_j est la réflexion de direction e_j.*

(2) *Vérifier que l'on obtient ainsi une représentation de* W *dans* $O(q_W)$.

Soit (W, S) un système de Coxeter. On note Γ le graphe dont les sommets sont les éléments de W et les arêtes sont des paires $\{w, ws\}$, $s \in S$. On vérifie que l'action par translations à gauche est libre. On fabrique un 2-complexe X_W en collant une 2-cellule à chaque cycle de Γ étiqueté par une relation de la forme $(s_i s_j)^{m_{ij}}$, $i \neq j$.

On construit une structure d'espace à murs sur X_W comme suit. Un mur est un 1-complexe qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) ou bien son intersection avec une arête est vide, ou il la coupe en son milieu ;

(2) ou bien son intersection avec une 2-cellule est vide, ou bien c'est un segment qui joint les milieux de deux côtés opposés (le nombre de côtés d'une 2-cellule est pair).

Par construction, un mur est uniquement déterminé par l'une des arêtes qu'il intersecte. L'action de W préserve l'ensemble des murs. De plus, si un mur coupe une arête (w, ws) alors s préserve l'arête, donc le mur qu'elle définit. Cependant, il faut vérifier qu'un mur induit bien une partition de ses sommets : considérons donc une arête a qui coupe un mur. Supposons que le mur ne sépare pas X_W. Alors il existe un chemin d'arêtes reliant les extrémités de a ne traversant pas le mur. On obtient ainsi un lacet γ en refermant ce chemin avec a. Comme X_W est simplement connexe, on peut trouver une succession de lacets $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, tels que γ_j et γ_{j+1} diffèrent d'une cellule. Cette homotopie s'arrête avec γ_k bordant une cellule contenant a. Or γ_k coupe le mur en deux points, donc, de proche en proche, on vérifie que γ_j coupe le mur en deux points pour chaque j, contredisant que γ ne le coupait qu'en un seul point. Cela montre que l'on a bien une structure d'espace à murs.

EXERCICE 8.24. — *Soit* (W, S) *un système de Coxeter. Montrer les propriétés suivantes.*

(1) *Le milieu de n'importe quelle arête appartient à un mur.*

(2) *Pour chaque mur, il existe un élément du groupe qui laisse invariant le mur et permute ses demi-espaces ; tout élément du groupe apparaît ainsi.*

(3) *L'action du stabilisateur d'un mur sur ce mur est cocompact.*

(4) *Si* M_a *et* M_b *sont de murs fixés par* a *et* b *respectivement, alors* $< a, b >$ *est un groupe diédral. Si les murs sont disjoints, alors* $< a, b > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *; si les murs s'intersectent au milieu d'un* m_{ij}*-gone, alors* $< a, b > \simeq D_r$*,o ù* r *divise* m_{ij} *; si les murs coïncident, alors* $< a, b > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(5) *Le complexe cubique associé est de dimension finie.*

(6) *Le mur dual à une arête* (a, b) *est*

$$\{, g \in G, d(a, g) < d(b, g)\}, \{g \in G, d(a, g) > d(b, g)\}.$$

8.4.2. *Complexes spéciaux.* Ces complexes sont introduits par Haglund et Wise [HW] dont les groupes fondamentaux ont des proprétés remarquables.

Soit X un complexe cubique de courbure négative, de sorte que son revêtement universel $p : \tilde{X} \to X$ est un complexe cubique CAT(0) ; notons G le groupe de revêtement. Un *hyperplan* de Y de X est l'image $p(\tilde{Y})$ d'un hyperplan de $\tilde{X}$. On s'intéresse aux propriétés suivantes.

(1) On dit que Y est *plongé* si Y est isométrique à $\tilde{Y}/\mathrm{stab}(\tilde{Y})$.

(2) On dit que Y est *normalement ou transversalement orientable* si, pour toute arête e duale à Y, $e \not\square(-e)$.

(3) On dit que Y *n'a pas d'autotangence* si $N(Y)$ est isométrique à $N(\tilde{Y})/\mathrm{stab}\,\tilde{Y}$.

(4) Deux hyperplans qui se croisent *n'ont pas d'intertangence* s'il existe deux arêtes duales à chacun d'eux qui ont un sommet en commun mais ne bordent pas de carré.

EXERCICE 8.25. — *Avec les notations précédentes, montrer les propriétés suivantes.*

(1) *Y est plongé si, et seulement si, pour tout $g \in G$, si $g(\tilde{Y}) \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$ implique $g \in \mathrm{stab}\,\tilde{Y}$.*

(2) *Y est normalement orientable si et seulement si,* stab$\tilde{Y}$ *préserve chacun de ses demi-espaces.*

(3) *Y n'a pas d'autotangence si, et seulement si, pour tout $g \in G$, $N(g(\tilde{Y})) \cap N(\tilde{Y}) \neq \emptyset$si et seulement si $g \in \mathrm{stab}\,\tilde{Y}$.*

(4) *Deux hyperplans Y_1, Y_2 qui se croisent n'ont pas d'autotangence si, et seulement si, $\tilde{Y_1} \cap \tilde{Y_2} \neq \emptyset$ et il existe $g \in G$ tel que $\tilde{Y_1} \cap g(\tilde{Y_2}) = \emptyset$ mais $N(\tilde{Y_1}) \cap N(g\tilde{Y_2}) \neq \emptyset$*

DÉFINITION 8.26 (complexe cubique spécial). — *Un complexe cubique X est spécial s'il est de courbure négative, s'il contient un nombre fini d'hyperplans et si chacun est plongé, transversalement orientable, sans autotangence et si deux hyperplans se coupent transversalement, alors ils n'ont pas d'intertangence. Un groupe est spécial s'il est isomorphe au groupe fondamental d'un complexe cubique spécial.*

PROPOSITION 8.27. — *On a les propriétés suivantes.*

(1) *Si X est spécial, alors ses hyperplans sont spéciaux.*

(2) *Si G est un groupe spécial, alors on peut scinder inductivement au-dessus des sous-groupes d'hyperplans jusqu'au groupe trivial.*

DÉMONSTRATION. Comme les hyperplans d'un hyperplan de X sont les traces des hyperplans de X, leurs propriétés sont héréditaires, et on en déduit que chaque hyperplan est spécial.

Tout d'abord le groupe G opère sans point fixe sur le revêtement universel, donc admet un sous-groupe de codimension 1. Comme les hyperplans sont plongés et transversalement orientables, on en déduit que l'obstruction de scindement est vide, donc on a un scindement au-dessus de chaque stabilisateur. Si Y est l'un d'eux, on obtient $X\backslash\backslash Y = Z_1 \cup Z_2$, ou $Z\backslash\backslash Y = Z$. Par conséquent, on obtient $G = A *_C B$ ou $A = *_C$ avec A et B groupes fondamentaux de Z_1 et Z_2 ou Z. En tout état de cause, les groupes de sommet sont les groupes fondamentaux de sous-complexes spéciaux de X et le nombre de leurs hyperplans est strictement inférieur, puisque Y n'en fait pas partie. Par récurrence, on arrive au groupe trivial. ■

PROPOSITION 8.28. — *Si X est spécial, alors il existe un complexe de Salvetti S_Σ et une isométrie locale $f : X \to S_\Sigma$ de sorte que $\pi_1(X)$ est un sous-groupe du groupe d'Artin à angles droits associés.*

DÉMONSTRATION. Soit Σ le graphe de transversalité des hyperplans de X : les sommets sont les hyperplans de X et les arêtes sont formées des paires d'hyperplans qui s'intersectent. Rappelons que le complexe de Salvetti contient un unique sommet v_Σ, une arête par sommet de Σ, et un cube de dimension k recollé le long de toute famille de k arêtes qui correspondent à un sous-graphe complet de Σ afin de former un k-tore dans S_Σ.

On définit $f : X \to S_\Sigma$ en envoyant

(1) tous les sommets sur v_Σ ;

(2) une $\square$-classe d'arêtes sur l'arête correspondant à l''hyperplan qu'elle définit ; notons que les hyperplans étant plongés et normalement orientables, cette assignation est bien définie.

(3) un k-cube sur le k-cube de S_Σ correspondant : un k-cube contient l'intersection de k hyperplans de X qui produisent un sous-graphe complet de k sommets de Σ, donc d'un unique k-cube de S_Σ.

On obtient ainsi une application continue. Elle est localement injective car les hyperplans de X n'ont pas d''autotangence (deux arêtes issues d'un même sommet définissent deux hyperplans distincts de X, donc deux arêtes distinctes de S_Σ). Montrons que f est une isométrie locale. En vertu de la proposition 6.24, on considère un ensemble de k arêtes $\{e_1, \ldots, e_k\}$ issues d'un sommet de X dont l'image engendre un k-cube dans S_Σ. Cela signifie que ces arêtes sont duales à k hyperplans qui s'intersectent deux à deux dans X. Comme on n'a pas d'intertangence dans X, ces hyperplans s'intersectent en particulier au niveau des $\{e_1, \ldots, e_k\}$, indiquant qu'elles engendrent un cube de X. ■

EXERCICE 8.29. — *On se donne un groupe de Coxeter avec $m_{ij} \in \{2, \infty\}$ pour $i \neq j$. Un tel groupe est un groupe de Coxeter à angles droits. On considère le graphe Γ dont les sommets sont les éléments de W et les arêtes sont de la forme (g, gs), $s \in S$.*

(1) *Montrer que Γ est le 1-squelette d'un complexe cubique CAT(0) X.*

(2) *On considère la projection $p : W \to \prod < s_j | s_j^2 >$ et le noyau $W_0 = \ker p$. Montrer que W_0 est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de W et X/W_0 est spécial.*

8.5. **Séparabilité**

Soit X un complexe cubique de courbure négative de groupe fondamental G. Un sous-groupe $H < G$ est *convexe-cocompact* si H préserve un sous-complexe convexe Z de $\tilde{X}$ et si Z/H est compact.

THÉORÈME 8.30 (Haglund et Wise, [HW]). — *Les sous-groupes convexe-cocompacts d'un groupe spécial sont séparables.*

On déduit ce théorème du suivant.

THÉORÈME 8.31. — *Soit X un complexe cubique spécial et soit Z un complexe cubique compact muni d'une isométrie locale $f : Z \to X$. Alors il existe un revêtement fini $p : X' \to X$, une injection $F : Z \to X'$ et une projection continue $\pi : X' \to Z$ tels que $p \circ F = f$, $\pi \circ F = \mathrm{Id}$.*

On déduit le théorème 8.30 du théorème 8.31 et de la proposition 8.33. Si g représente un lacet d'arêtes dans X, alors on peut le voir comme l'image d'un intervalle dans X. Le théorème 8.31 nous construit un revêtement fini $p : X_g \to X$ avec une injection de l'intervalle. On a donc séparé le groupe trivial de g, impliquant ainsi que $\pi_1(X)$ est résiduellement fini. Prenons maintenant un sous-groupe convexe-cocompact $H < \pi_1(X)$. Ce groupe admet donc une action cocompacte sur un sous-complexe convexe $\tilde{Z}$ du revêtement universel de X. Par construction, $Z = \tilde{Z}/H$ est compact, et il existe une isométrie locale $f : Z \to X$. Par conséquent, le théorème 8.31 nous fournit un revêtement fini $p : X' \to X$, une injection $F : Z \to X'$ et une projection continue $\pi : X' \to Z$ tels que $p \circ F = f$, $\pi \circ F = \mathrm{Id}$. Cela implique que $F \circ p$ est une rétraction de X' sur $F(Z)$, qui induit donc une rétraction $(F \circ p)_* : \pi_1(X') \to H$. Donc H est séparable dans $\pi_1(X')$ d'après la proposition 8.33 ci-dessous. Le lemme 5.5 implique alors la séparabilité de H dans $\pi_1(X)$.

EXERCICE 8.32. — *Donner une démonstration en s'appuyant sur la proposition 5.6 et ses corollaires.*

8.5.1. *Rétraction et séparabilité.* Notons G un groupe et H un sous-groupe. On que H est un rétract de G s'il existe un morphisme $f : G \to H$ tel que $f|_H = \mathrm{Id}_H$,

PROPOSITION 8.33. — *Si G est résiduellement fini et $H < G$ est un rétract de G alors H est séparable.*

DÉMONSTRATION. Soit $r : G \to H$ une rétraction et considérons l'application $f : G \to G$ définie par $f(g) = g^{-1}r(g)$. Cette application est continue dans la topologie profinie car le passage à l'inverse, la multiplication et les morphismes de groupes sont continues. Enfin, on a $f(g) = e$ si et seulement si $g = r(g)$, donc si et seulement si $g \in H$. Donc $H = f^{-1}(\{e\})$ est fermé car G est résiduellement fini. ∎

8.5.2. *Le cas pédagogique des graphes.* On se propose dans ce paragraphe de montrer le théorème 8.31 dans le cas des graphes, ce qui donnera une démonstration alternative au théorème de Hall (thm 5.19).

Prenons donc $f : Z \to X$ une application localement injective entre graphes, avec Z compact. Notons que X est automatiquement spécial. On construit X' à partir de $Z^{(0)} \times X$ qui est un revêtement fini au-dessus de X puisque Z est compact.

On définit $F : Z^{(0)} \to Z^{(0)} \times X$ en posant $F(z) = (z, f(z))$ qui est injective par construction. Pour chaque arête $a = (z, z')$ de Z d'image (x, x'), on effectue l'opération de couper-croiser suivante : on supprime les arêtes $\{z\} \times f(a)$ et $\{z'\} \times f(a)$ et on les remplace par $((z, f(z)), (z', f(z')) = ((z, x), (z', x'))$ et $((z, x'), (z', x))$. De cette manière,

(1) la seconde projection est toujours un revêtement fini au-dessus de X ;

(2) on peut étendre F à l'arête a de Z.

On note $p : X' \to X$ le revêtement au-dessus de X induit par la seconde projection que l'on obtient après avoir effectué tous les couper-croiser. Seul un nombre fini d'opérations sont nécessaires puisque Z est compact.

On vérifie sans mal que $F : Z \to X'$ est une injection, que la première projection $\pi : X' \to Z$ est continue et que l'on a les identités $p \circ F = f$ et $\pi \circ F = \mathrm{Id}$.

8.5.3. *Cas général.* L'objet de ce paragraphe est d'adapter la démonstration précédente au cas général. La difficulté principale est de tenir compte des hyperplans qui sont maintenant non triviaux.

On commence par quelques observations préliminaires.

FAIT 8.34. — *Si $f : Z \to X$ est une isométrie locale avec X spécial, alors Z est spécial aussi.*

DÉMONSTRATION. En effet, d'après la proposition 6.8, f réalise une injection $f_* : \pi_1(Z) \to \pi_1(X)$ et on obtient un plongement isométrique $\tilde{Z} \to \tilde{X}$ qui nous permet d'identifier $\tilde{Z}$ à un sous-complexe convexe de $\tilde{X}$ et $\pi_1(Z)$ à un sous-groupe de $\pi_1(X)$. Du coup, l'absence de pathologie d'hyperplans pour Z est héritée de celle pour X. ■

FAIT 8.35. — *Soient Z' un 2-complexe cubique et X un complexe cubique de courbure négative. Si $f : Z' \to X^{(2)}$ est un revêtement cellulaire alors Z' est le 2-squelette d'un complexe cubique Z de courbure négative et f s'étend en un revêtement $f : Z \to X$.*

DÉMONSTRATION. Si $f : Z' \to X^{(2)}$ est un revêtement, alors on a une injection $f_* : \pi_1(Z') \to \pi_1(X)$ et on peut relever f en un homéomorphisme $\tilde{f} : \tilde{Z}' \to \tilde{X}^{(2)}$ équivariant. Du coup, on peut identifer $\tilde{Z}'$ au 2-squelette de $\tilde{X}$ et Z' à celui de $\tilde{X}/H$, où $H = f_*(\pi_1(Z'))$. ■

DÉMONSTRATION. (théorème 8.31) On définit $F : Z^{(0)} \to Z^{(0)} \times X^{(0)}$ en posant $F(z) = (z, f(z))$ qui est injective par construction.

On commence par transformer $Z^{(0)} \times X^{(1)}$ pour en faire un revêtement fini au-dessus de $X^{(1)}$ de sorte que $Z^{(1)}$ s'injecte dedans. On montrera ensuite que F s'étend en un plongement. On note $\pi : Z^{(0)} \to Z^{(0)} \times Z^{(0)}$ et $p : Z^{(0)} \to Z^{(0)} \times X^{(0)}$ les projections canoniques.

On adapte l'opération de couper-croiser comme suit : pour chaque arête $a = (z, z')$ de Z et toute arête $(x, x') \Box (f(z), f(z'))$ de X, on supprime les arêtes $\{z\} \times (x, x')$ et $\{z'\} \times (x, x')$ et on les remplace par $((z, x), (z', x'))$ et $((z, x'), (z', x))$. Vérifions que cette construction est bien définie. Rappelons que Z est spécial d'après le fait 8.34. Si deux arêtes issues de z ont des images parallèles dans X, cela impliquerait ou bien une autotangence, une intertangence, ou qu'un hyperplan n'est pas plongé. Donc, pour chaque sommet z, une arête (x, x') n'est parallèle qu'à au plus une seule arête issue de z. De plus, les hyperplans sont normalement orientés, donc une arête n'est pas équivalente à son opposée. Notons Γ le graphe obtenu. De cette manière,

(1) *la projection $p : \Gamma \to X^{(1)}$ est toujours un revêtement fini au-dessus de $X^{(1)}$* car aucune arête issue d'un sommet (v, x) n'est de la forme $((v, x), (w, x))$ et elles sont en bijection avec les arêtes de X issues de x ;

(2) *on peut étendre injectivement F à $F : Z^{(1)} \to \Gamma$ de sorte que $p \circ F = f$ et $\pi \circ F = \mathrm{Id}$.*

Prenons un cycle $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ de longueur 4 dans $X^{(1)}$ et v un sommet de Z. On a trois cas :

(1) aucune de ses arêtes n'est parallèle à l'image d'une arête de Z incidente à v, et ce cycle se relève en un cycle dit *horizontal* $[(v, x_1) : (v, x_2) : (v, x_3) : (v, x_4)]$;

(2) deux arêtes (x_1, x_2) et (x_4, x_3) sont parallèles à $(f(v), f(w))$ pour une arête (v, w) de Z ; dans ce cas, on obtient deux 4-cycles *obliques* $[(v, x_1) : (w, x_2) : (w, x_3) : (v, x_4)]$ et $[(w, x_1) : (v, x_2) : (v, x_3) : (w, x_4)]$;

(3) les deux arêtes (x_1, x_2) et (x_4, x_3) sont parallèles à $(f(v), f(w))$ pour une arête (v, w) de Z et les deux arêtes (x_1, x_4) et (x_2, x_3) sont parallèles à $(f(v), f(w'))$ pour une autre arête (v, w') de Z ; comme X n'a pas d'intertangence, $f(v), f(w), f(w')$ engendrent un 4-cycle de X et comme f est une isométrie locale, v, w, w' engendrent aussi un 4-cycle $[v : w : v' : w']$ de Z. On obtient quatre 4-cycles *transverses* $[(v, x_1) : (w, x_2) : (v', x_3) : (w', x_4)]$, $[(w, x_1) : (v, x_2) : (w', x_3) : (v', x_4)]$, $[(v', x_1) : (w', x_2) : (v, x_3) : (w, x_4)]$ et $[(w', x_1) : (v', x_2) : (w, x_3) : (v, x_4)]$.

On vérifie qu'un 4-cycle de Γ s'envoie par p sur un 4-cycle de X car p est localement injective. De même, par π, un cycle s'envoie sur un sommet s'il est horizontal, sur une arête s'il est oblique ou sur un 4-cycle s'il est tranverse.

On complète Γ en un complexe par carrés X'' en recollant un carré le long de chaque 4-cycle de Γ. De cette manière,

(1) *on étend p en un revêtement $p : X'' \to X^{(2)}$* car, pour chaque sommet $x \in X$ et chaque antécédent $(v, x) \in X''$, un carré de X qui contient x se relève en un carré, unique, qui contient (v, x) ;

(2) *on étend F injectivement à $F : Z^{(2)} \to X''$ de sorte que $p \circ F = f$ et $\pi \circ F = \mathrm{Id}$,* car l'image d'un carré de Z est transverse.

Le fait 8.35 implique que X'' est le 2-squelette d'un complexe cubique X' qui revêt X. On note $p : X' \to X$ le revêtement. Or $F_*(\pi_1(Z)) < \pi_1(X') = \pi_1(X'')$ par l'exercice 2.22, donc, comme $p \circ F = f$, on a $f_*(\pi_1(Z)) < p_*\pi_1(X')$. Par conséquent, la proposition 3.10 montre que f se relève en $F : Z \to X''$. Par unicité du relèvement, il coïncide avec $F|_{Z^{(2)}}$, donc il est injectif puisque F l'est sur son 1-squelette. Enfin, on vérifie que les conclusions du théorème sont vérifiées. ■

RÉFÉRENCES

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Ger] V. N. Gerasimov. Semi-splittings of groups and actions on cubings. In *Algebra, geometry, analysis and mathematical physics (Russian) (Novosibirsk, 1996)*, pages 91–109, 190. Izdat. Ross. Akad. Nauk Sib. Otd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1997.

[HW] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise. Special cube complexes. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2008), 1551–1620.

[Nib] G. A. Niblo. The singularity obstruction for group splittings. *Topology Appl.* **119**(2002), 17–31.

[NR] G. A. Niblo and L. D. Reeves. Coxeter groups act on CAT(0) cube complexes. *J. Group Theory* **6**(2003), 399–413.

[Sag] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)* **71**(1995), 585–617.