7. CUBULATION

La cubulation consiste à construire un complexe cubique. Elle est développé par Sageev [Sag1, Sag2], avec des extensions que l'on peut trouver notamment dans [HW]. Les liens avec les espaces à murs se trouvent dans [Nic, CN]. On s'inspire largement de [Cor].

7.1. Graphes médians

Si Z est un espace métrique, on définit le *segment plein* $[x, y]$ entre deux points $x, y \in Z$ comme l'ensemble des points t tels que $d(x, t) + d(t, y) = d(x, y)$. On dit que Z est *médian* si, pour tous x, y, z, l'intersection $[x, y] \cap [y, z] \cap [z, x]$ est un point unique, appelé le *point médian* de $\{x, y, z\}$ et noté $m(x, y, z)$.

Remarque 7.1. — Si x, y, z sont des points d'un espace médian, alors $x \in [y, z]$ si et seulement si $m(x, y, z) = x$.

Un graphe (non orienté, sans arêtes multiples ni boucles) est *médian* si chacune de ses composantes connexes est médian pour la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$.

Exercice 7.2. — *Montrer que, dans un graphe médian, on a, pour tous x, a, b, p, q,*

$$m[m(x, p, q), a, b] = m[x, m(a, b, p), m(a, b, q)] .$$

On rappelle que le 1-squelette d'un complexe cubique CAT(0) est médian. On montre que cette propriété est en fait caractéristique des complexes cubiques [Che].

Théorème 7.3 (Chepoi). — *Un graphe médian et connexe est le* 1*-squelette d'un complexe cubique CAT(0).*

Avant de montrer le théorème, nous allons montrer que ces graphes apparaissent très naturellement.

7.1.1. *Cubulation des parties d'un ensemble.* Soit X un ensemble. On dit que deux sous-ensembles Y et Z sont *commensurables* si leur différence symétrique $Y \triangle Z$ est un sous-ensemble fini. Cette notion définit une relation d'équivalence sur les parties 2^X. On désignera par $\mathrm{Comm}_Y(X)$ la classe d'équivalence des sous-ensembles commensurables à Y dans X.

Définition 7.4 (graphe des parties de X). — *On munit l'ensemble des parties 2^X d'une structure de graphe comme suit, que l'on notera Γ_X. Les sommets sont formés des éléments de 2^X. Une paire $\{N, N'\}$ définit une arête du graphe s'ils sont adjacents, c'est-à-dire si $\#(N \triangle N') = 1$.*

Proposition 7.5. — *Soit X un ensemble. Le graphe des parties de X est médian. Plus précisément, si Y, Z sont des parties de X alors $[Y,Z] = \{W \in 2^X,\ (Y \cap Z) \subset W \subset (Y \cup Z)\}$ et si $Y, Z, W \in 2^X$ alors $m(W,Y,Z) = (Y \cap Z) \cup (Z \cap W) \cup (W \cap Y)$. De plus, on a les propriétés suivantes :*

(1) *La distance entre deux parties Y et Z est $d(Y,Z) = \#(Y \triangle Z)$.*

(2) *Les composantes connexes sont les classes de commensurabilité.*

Démonstration. Si Y et Z sont à distance finie, alors on vérifie que $\#(Y \triangle Z) \leq d(Y,Z)$ donc Y et Z sont commensurables. Réciproquement, si Y et Z sont commensurables, alors on peut écrire $Y \triangle Z = \{y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_\ell\}$ avec $Y \setminus Z = \{y_j\}$ et $Z \setminus Y = \{z_i\}$. Par conséquent, si on pose $Y_0 = Y$, $Y_j = Y_{j-1} \setminus \{y_j\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, $Z_1 = Y_k \cup \{z_1\}$, $Z_i = Z_{i-1} \cup \{z_i\}$, $i \in \{2, \ldots, \ell\}$, alors on obtient un chemin de Y à Z de longueur $\#(Y \triangle Z)$. Ceci montre que $d(Y,Z) = \#(Y \triangle Z)$.

Par conséquent, Y et Z sont dans la même composante si et seulement s'ils sont commensurables. De plus, on aurait pu construire un chemin de même longueur en supprimant les y_j et en rajoutant les z_i dans n'importe quel ordre : ceci montre que le segment plein $[Y,Z]$ contient toutes les parties entre $Y \cap Z$ et $Y \cup Z$. Par ailleurs, si, dans un chemin allant de Y à Z on ajoute un élément de $X \setminus (Y \cup Z)$, alors on doit le supprimer avant d'arriver à Z donc on peut raccourcir le chemin en évitant cet élément ; de même, si on supprimait en chemin un élément de $Y \cap Z$, alors on devrait le rajouter pour aboutir à Z. Donc $[Y,Z]$ est exactement constitué des parties entre $Y \cap Z$ et $Y \cup Z$.

Ce graphe est médian. En effet, on déduit de la forme des segments pleins que l'intersection $[Y,Z] \cap [Y,W] \cap [W,Z]$ est exactement le singleton $\{m\} = \{(Y \cap Z) \cup (Z \cap W) \cup (W \cap Y)\}$ (autrement dit, l'ensemble des éléments qui sont dans au moins deux des trois ensembles Y, Z, W). En effet, il doit contenir toutes les intersections deux à deux, donc m, et il doit être inclus dans chaque réunion de paires d'éléments : c'est le cas puisque chaque paire apparaît dans chaque intersection. Ceci montre que m est bien dans l'intersection des segments pleins. Un élément $x \in X$ supplémentaire devrait donc être dans la réunion des trois ensembles Y, Z, W. Mais s'il était par exemple dans Y sans être dans Z, alors $m \cup \{x\}$ ne serait pas dans $[Y,Z]$. Ceci montre que x doit être dans $Y \cap Z$. Ceci nous permet de conclure que ce graphe est médian. ∎

Exercice 7.6. — *Montrer que si X est fini, alors Γ_X est isomorphe au 1-squelette d'un $|X|$-cube.*

7.1.2. *Cubulation d'un graphe médian.* Le théorème 7.3 découle des propositions 7.9 et 7.11. On établit d'abord quelques propriétés des graphes médians qui nous serviront à établir le théorème.

Fait 7.7. — *Soit Γ un graphe médian.*

(1) *Il n'existe pas de triangle équilatéral de longueur 1.*

(2) *Si $e = (a, b)$ est une arête, on a $|d(x, a) - d(b, x)| = 1$ pour tout $x \in \Gamma^{(0)}$.*

(3) *Si $d(x, y) = 2$, alors on a au plus deux points entre x et y.*

Le premier point implique que si $a, b, x \in \Gamma^{(0)}$ avec $a \neq b$ et $d(x, a) = d(x, b) = 1$, alors $d(a, b) = 2$.

DÉMONSTRATION.

(1) Si $\{x, a, b\}$ étaient trois points à distance 1 les uns des autres, on aurait $[x, a] \cap [x, b] \cap [a, b] = \emptyset$.

(2) Notons $m = m(x, a, b)$. Comme $[a, b] = \{a, b\}$, on a $m \in \{a, b\}$. Comme $m \in [x, a] \cap [x, b]$, on a $d(x, m) < \max\{d(x, a), d(x, b)\}$ mais comme $|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b) = 1$, il vient $|d(x, a) - d(b, x)| = 1$.

(3) Supposons que l'on ait trois points a, b, c entre x et y. D'après le premier point, on a $d(a, c) = d(b, c) = d(a, b) = 2$. Donc $[a, b] \supset \{x, y\}$; de même $[a, c] \supset \{x, y\}$ et $[b, c] \supset \{x, y\}$, Par conséquent, $[a, b] \cap [b, c] \cap [a, c] \supset \{x, y\}$ ce qui contredit la propriété médiane. ■

DÉFINITION 7.8. — *Le complexe $X = X_\Gamma$ associé à Γ est défini ainsi. On colle un n-cube, $n \geq 2$, à chaque sous-graphe de Γ isomorphe au 1-squelette d'un n-cube.*

D'après le fait 7.7 (3), si $d(a, b) = 2$, alors ou bien $[a, b]$ est un segment, ou bien $\{a, b\}$ sont les sommets de la diagonale d'un unique carré de X.

PROPOSITION 7.9. — *Le 2-sequelette $X^{(2)}$ est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Si γ est une courbe fermée dans $X^{(2)}$, alors on peut l'homotoper pour obtenir un chemin fermé d'arêtes $c_0 = (v_0, \ldots, v_p = v_0)$. On peut supposer que $v_{j-1} \neq v_{j+1}$ pour tout $1 \leq j \leq p - 1$ et $v_1 \neq v_{p-1}$. Nous allons montrer comment trouver un chemin d'arêtes homotope à c_0 de longueur strictement plus petite.

Notons $n \geq 0$ le plus grand indice tel que $(v_0, \ldots, v_n)$ soit géodésique. On a donc $n \geq 2$, $d(v_0, v_{n+1}) = n-1$ d'après le fait 7.7 (2) et $(v_j, \ldots, v_n)$ est géodésique pour tout $1 \leq j < n$. Soit $0 \leq k \leq n$ le plus grand indice tel que $d(v_k, v_{n+1}) = n - 1 - k$. On a $k \leq n - 2$.

Si $k = n - 2$, alors $\{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}\}$ borde un carré et on peut homotoper c_0 à $c_1 = (v_0, \ldots, v_{n-2}, v_{n+1}, \ldots, v_p = v_0)$ qui sera de longueur plus petite. Si $k < n - 2$, alors on note $m_n = m(v_k, v_{n-1}, v_{n+1})$. Comme $d(v_{n-1}, v_{n+1}) = 2$, on a $\{v_{n-1}, v_n\} \cap [v_k, v_{n+1}] = \emptyset$; de plus, $v_{n+1} \notin [v_k, v_{n-1}]$, donc $\{m_n, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}\}$ borde un carré et on peut homotoper c_0 à $c_0' = (v_0, \ldots, v_{n-1}, m_n, v_{n+1}, \ldots, v_p = v_0)$ qui sera de même longueur que c_0 mais qui vérifiera $d(v_0, m_n) = n - 2$ et $d(v_k, m_n) = n - k - 2$. Du coup, par itération, on construit $m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_{k+3}$ de sorte que c_0 est homotope à

$$c_0'' = (v_0, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, m_{k+3}, \ldots, m_n, v_{n+1}, \ldots, v_p = v_0)$$

qui est de même longueur que c_0 et qui vérifie $d(v_k, m_j) = j - k - 2$. En particulier, on a $d(v_k, m_{k+3}) = 1$. On en déduit que $\{v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, m_{k+3}\}$ borde un carré et donc que c_0 est homotope à

$$c_1 = (v_0, \ldots, v_k, m_{k+3}, \ldots, m_n, v_{n+1}, \ldots, v_p = v_0)$$

de longueur strictement plus petite.

En itérant ce processus de rétrécissement, on arrive ainsi au lacet bordant un carré dans la classe d'homotopie de γ, qui lui-même est homotope à un point. ∎

Il vient de la démonstration :

COROLLAIRE 7.10. — *Un lacet d'arêtes dans un graphe médian est de longueur paire.*

PROPOSITION 7.11. — *Le complexe X est de courbure négative.*

DÉMONSTRATION. Nous devons vérifier la condition du link. On procède par récurrence sur le nombre de sommets n d'un sous-graphe complet du link d'un sommet v. On se fixe $n \geq 3$, et on suppose que v a n arêtes incidentes qui forment deux à deux un carré. Il suffit de montrer que ces arêtes engendrent le 1-squelette d'un n-cube. Notre hypothèse de récurrence implique que chaque sous-ensemble à $(n-1)$ arêtes engendrent un cube de dimension $n - 1$.

On construit une application $Q = [0, 1]^n \to X$ qui envoie 0 sur v et chaque arête incidente à l'origine sur une arête issue de v.

On identifie Q aux parties de $\{1, \ldots, n\}$. Si $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on désignera par v_I le point image de celui de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_j = 1$ si et seulement si $j \in I$ et $x_j = 0$ sinon. Par hypothèse, l'application est bien définie sur le sous-graphe maximal du 1-squelette de Q qui ne contient pas le point $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

L'objet de cette démonstration est de construire l'image du point J et de montrer qu'il existe une arête le rattachant à chaque v_I, où I est un ensemble à $(n - 1)$ élément.

Notons $I_1, I_2, I_3 \subset J$ trois sous-ensembles distincts à $(n - 1)$ éléments. On note v_j pour v_{I_j} et on considère $m = m(v_1, v_2, v_3)$. On veut montrer que l'on peut identifier m à v_J. On écrit $\{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$.

D'après les faits 7.7, on a $d(v_i, v_j) = 2$, donc $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) > d(v_i, v_k)$ ce qui implique $m \notin \{v_1, v_2, v_3\}$. De plus, $2 = d(v_i, v_j) = d(v_i, m) + d(v_j, m) \geq d(v_i, m) + 1 > 1$ donc m est à distance 1 de chaque point. Si on note v_{ij} le sommet associé à $I_i \cap I_j$ et v' celui associé à $I_1 \cap I_2 \cap I_3$, alors on a $d(v_{ij}, v') = 1$ et $\{v_{ik}, v_{jk}\} \subset [v', v_k]$ donc $d(v_{ij}, v_k) > 1$ par les faits 7.7, impliquant ainsi $m \notin \{v_{12}, v_{23}, v_{31}\}$. Enfin, m ne peut pas être l'un des autres v_I, $I \subset (I_1 \cap I_2 \cap I_3)$ car cela contredirait que les cubes de dimension $k < n$ sont bien définis. Par conséquent, m est différent des points déjà visités.

Si on note $m' = m(v_1, v_2, v_4)$, alors l'argument précédent montre que m' doit être un point à distance 1 de v_1 et v_2 différent de v_{12}, donc il s'agit de m d'après le fait 7.7. En parcourant toutes les possibilités de sous-ensembles, on montre ainsi que m est le point médian de chaque triplet de sommets issus de J. Par conséquent, $\{v_I,\ \#I < n\} \cup \{m\}$ est isométrique à $Q^{(0)}$.

Cela montre que X est de courbure négative. ■

REMARQUE 7.12. — Si (a,b) est une arête de X, alors les demi-espaces correspondant à l'hyperplan transverse sont définis par $\{x,\ m(x,a,b) = a\}$ et $\{x,\ m(x,a,b) = b\}$.

Si $e = (a,b)$ et $e' = (a',b')$ alors $e \square e'$ si et seulement si $m(a',a,b) = a$ et $m(b',a,b) = b$.

En effet si $m(x,a,b) = a$ alors $d(x,b) = d(x,a) + 1$ donc $[x,b]$ coupe l'hyperplan Y dual de e. Donc x est dans le demi-espace de $X \backslash\backslash Y$ contenant a.

7.2. Ensembles ordonnés involutifs

DÉFINITION 7.13. — *Un ensemble ordonné involutif $(E, \leq, \sigma)$ est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ muni d'une involution $\sigma : E \to E$ renversant l'ordre ($x \leq y$ ssi $\sigma(x) \geq \sigma(y)$ et telle que x et $\sigma(x)$ sont incomparables). Une* ultrasélection *sur E est un sous-ensemble $S \subset E$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *S est une* sélection, *i.e., si $x < y$ et $x \in S$ alors $y \in S$ ($x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$).*
- *$\sigma(S) = {}^c S$ i.e., on a une partition $E = S \sqcup \sigma(S)$.*

De manière équivalente, on considère une fonction $j : E \to \{0,1\}$ telle que $j(x) + j(\sigma(x)) = 1$ pour tout $x \in E$, j est croissante, i.e., $x \leq y$ et $j(x) = 1$ impliquent $j(y) = 1$. Si j est donnée, on obtient l'ultrasélection S en posant $S = j^{-1}(\{1\}) \subset E$; réciproquement, si S est donnée, alors $j = \mathbf{1}_S$. Notons qu'avec cette identification, l'ensemble des ultrasélections est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Une *présélection* est un sous-ensemble $P \in 2^E$ tel que $\sigma(P) \cap P = \emptyset$ et, si $x \leq y$ et $x \in P$ alors $y \in P$. On se sert des préselections pour montrer l'existence en général d'ultrasélections :

FAIT 7.14. — *Soit $(E, \leq, \sigma)$ un ensemble ordonné involutif.*

(1) *Pour tout $x \in E$, l'ensemble*
$$P_x = \{y \in E,\ x \leq y\} \cup \{y \in E,\ \sigma(x) < y\}$$
est une présélection ; x est minimal dans P_x et $P_x \triangle P_{\sigma(x)} = \{x, \sigma(x)\}$.

(2) *Soient P une présélection et $x \in E$; si $x \in P$ est minimal, ou si $\{x, \sigma(x)\} \cap P = \emptyset$, alors $P \cup P_x$ est une présélection.*

(3) *Une ultrasélection est une présélection maximale.*

(4) *Toute présélection P s'étend en une ultrasélection.*

DÉMONSTRATION. Comme σ renverse l'orientation, on a bien $\sigma(P_x) \cap P_x = \emptyset$. Supposons $y \leq z$ et $y \in P_x$; si $x \leq y$ alors on a $x \leq z$ donc $z \in P_x$ et si $\sigma(x) < y$ alors on a aussi

$\sigma(x) < z$ donc $z \in P_x$. Ceci montre que P_x est une présélection. Par construction, x est bien minimal dans P_x et on a bien $P_x \triangle P_{\sigma(x)} = \{x, \sigma(x)\}$. Ceci montre (1).

Soit P une présélection et supposons (a) $\{x, \sigma(x)\} \cap P = \emptyset$ ou (b) $x \in P$ est minimal. Pour montrer que $P \cup P_x$ est une présélection, il suffit de montrer que $\sigma(P) \cap P_x = \emptyset$. Soit donc $y \in P$; si $x < \sigma(y)$ alors $y < \sigma(x)$, ce qui implquerait $\sigma(x) \in P$, contredisant la propriété définissant x dans les deux cas (a) et (b) ; de même, si $\sigma(y) \geq \sigma(x)$, on aurait $x \geq y$ impliquant cette fois-ci $x \in P$: ceci est faux dans le cas (a) ; dans le cas (b), cela implique $x = y$ par minimalité de x (aucun problème !). Donc $\sigma(P) \cap P_x = \emptyset$.

On en déduit que $P_x \cup P$ est une présélection : en effet, on a $\sigma(P \cup P_x) \cap (P \cup P_x) = (\sigma(P) \cap P_x) \cup \sigma(\sigma(P) \cap P_x) = \emptyset$. Ceci conclut la démonstration de (2).

Une ultrasélection S est bien une présélection maximale puisque $S \cup \sigma(S) = E$. Réciproquement, supposons que M est une présélection maximale. Si $M \cup \sigma(M) \neq E$, alors prenons $x \in E \setminus (M \cup \sigma(M))$. D'après (2), $M \cup P_x$ serait une présélection, ce qui contredirait la maximalité de M. Donc M est une ultrasélection.

Soit P une présélection. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_P$ des présélections qui contiennent P que l'on munit de l'inclusion. Montrons que $\mathcal{M}_P$ est inductif. Soit (A_i) une chaîne de $\mathcal{M}_P$ et notons $A = \cup A_i$. Si $x \leq y$ et $x \in A$ alors on a $y \in A$ par construction. De plus, si $x \in A \cap \sigma(A)$, alors il existe deux indices i, j tels que $x \in A_i$ et $\sigma(x) \in A_j$. Prenons $k = \max\{i, j\}$ de sorte que $x, \sigma(x) \in A_k$, ce qui est impossible. Donc A est une présélection et $\mathcal{M}_P$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, il existe un ensemble maximal M de $\mathcal{M}_P$. D'après ci-dessus, M est une ultrasélection, qui contient P par construction. ■

EXERCICE 7.15. — *Montrer que tout $x \in E$ est un élément minimal d'une ultrasélection.*

On dit que deux ultrasélections S, T sont *incidentes* si $\#(S \triangle T) = 2$. Cette relation d'incidence munit l'ensemble des ultrasélections de E d'une structure de graphe, (non orienté, sans arêtes multiples ni boucles) noté $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$.

FAIT 7.16. — *On a les propriétés suivantes.*

(1) *Deux ultrasélections S et T sont incidentes si seulement s'il existe $z \in S$ minimal dans S tel que $S \triangle T = \{z, \sigma(z)\}$.*

(2) *Les composantes connexes de* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ *sont les traces dans* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ *des classes de commensurabilité.*

(3) *Si S, T sont deux ultrasélections commensurables, alors $d(S, T) = (1/2)\#(S \triangle T)$. De plus, si $s \in S \setminus T$ est minimal dans $S \setminus T$, alors s est minimal dans S.*

DÉMONSTRATION. Si S et T sont deux ultrasélections incidentes, il existe $z, w \in E$ tel que $S \triangle T = \{z, w\}$; supposons $z \in S$, alors on doit avoir $\sigma(z) \in T$, donc $w = \sigma(z)$. Par ailleurs, soit $y \leq z$ avec $y \in S$; or $z \notin T$ implique $y \notin T$, donc $y = z$ et z est minimal. Réciproquement, si S est une ultrasélection et z est un élément minimal de S, alors $P_z \subset S$ et donc $S \cup \{\sigma(z)\} \setminus \{z\}$ est aussi une ultrasélection, incidente à S par définition.

Si $S_0, \dots S_n$ est un chemin reliant deux parties S et T, alors $\#(S_0 \triangle S_n) \leq 2n$ car $\#(S_j \triangle S_{j+1}) = 2$: donc $d(S,T) \geq (1/2)\#(S \triangle T)$.

Si S et T sont commensurables, alors $S \setminus T = \{s_1, \dots, s_n\}$ est finie. Par définition des ultrasélections, on a $T \setminus S = \{\sigma(s_1), \dots, \sigma(s_n)\}$ et $(1/2)\#(S \triangle T) = n$. On peut supposer que s_1 est minimal dans $\{s_1, \dots, s_n\}$, donc dans S : en effet, si $x \leq s_1$, avec $x \in S$, alors on aurait aussi $x \in T$ car $S = (S \setminus T) \cup (S \cap T)$, ce qui impliquerait $s_1 \in T$, mais ce n'est pas le cas. On pose alors $S_1 = S \setminus \{s_1\} \cup \{\sigma(s_1)\}$; on a donc $S_1 \setminus T = \{s_2, \dots, s_n\}$. De proche en proche, on construit un chemin $S_1, \dots S_n$ avec $S_n = T$. Donc $d(S,T) \leq (1/2)\#(S \triangle T)$. Ceci montre que $d(S,T) = (1/2)\#(S \triangle T)$. ■

On dira qu'une ultrasélection S est *inductive* si toute suite décroissante de S admet un minimum. L'inductivité est une propriété de la classe de commensurabilité d'une ultrasélection. En effet, supposons $S \triangle T$ de cardinal fini et S inductive ; soit $(x_n)_n$ une suite décroissante de T. Par conséquent, seul un nombre fini d'éléments de la suite peuvent ne pas être dans S : mais ces éléments, n'étant pas dans S doivent minorer les éléments de la suite qui y sont : donc la suite est stationnaire, et il existe bien un élément minimal. S'ils sont tous dans S, alors on a un élément minimal qui est à la fois dans S et dans T.

Notation.— Il est commode d'introduire la notation suivante : si S est une ultrasélection, $x_1, \dots x_k \in S$ sont tels que x_j est minimal dans $S \setminus \{x_1, \dots x_{j-1}\}$, alors on écrit

$$(S, x_1 \dots, x_k) = S \setminus \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{\sigma(x_1), \dots \sigma(x_k)\}$$

qui est aussi une ultrasélection d'après le fait précédent.

7.2.1. *Ensemble ordonné involutif d'un complexe cubique CAT(0).* Si X est un complexe cubique CAT(0), l'ensemble $E = E_X$ de ses demi-espaces muni de l'inclusion et du passage au complémentaire définit un ensemble ordonné involutif.

Proposition 7.17. — *A chaque sommet $x \in X$, on définit S_x comme l'ensemble des demi-espaces qui contiennent x.*

(1) *Pour tout $x \in X^{(0)}$, S_x est une ultrasélection inductive appelée ultrasélection principale de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$, dont les éléments minimaux sont donnés par les demi-espaces contenant x et bordés par les hyperplans transverses aux arêtes incidentes à x.*

(2) *Pour tous $x, y \in X^{(0)}$, S_x et S_y sont commensurables.*

(3) *On a un isomorphisme canonique de graphes $\varphi : X^{(1)} \to \Gamma_X$ défini par $\varphi(x) = S_x$, où Γ_X désigne la composante connexe de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ contenant la classe de commensurabilité des ultrasélections principales.*

Démonstration. On vérifie que S_x est bien une ultrasélection et que deux sommets x, y définissent une arête de X si et seulement si S_x et S_y diffèrent de deux demi-espaces complémentaires —ceux qui sont bordés par l'hyperplan transverse à l'arête (x, y). Ceci montre que les ultrasélections principales sont contenues dans la même classe de commensurabilité. On note Γ_X la composante de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ les contenant. On a donc établi l'existence d'un morphisme injectif $\varphi : X^{(1)} \to \Gamma_X$, tel que $\varphi(x) = S_x$.

Par ailleurs, les ultrasélections principales S_x sont toutes inductives ; en effet, soit $(Z_n)_n$ une suite décroissante de demi-espaces contenant x. Si Z_n^* désigne le demi-espace complémentaire à Z_n alors $(d(x, Z_n^*))_n$ est une suite décroissante à valeurs positives et discrètes, donc presque constante : comme Z_{n+1} sépare $\{x\}$ de Z_n si $Z_n \neq Z_{n+1}$, on en déduit que (Z_n) est aussi presque constante : donc il existe $Z \in S_x$ tel que $Z = Z_n$ pour n assez grand.

Décrivons maintenant les éléments minimaux de S_x pour un sommet $x \in X$ fixé. Soit $Z \in S_x$. On note Y l'hyperplan bordant Z et $N(Y)$ le sous-complexe convexe défini par les cubes intersectant Y. On munit $X^{(0)}$ de la distance combinatoire. On affirme qu'il existe un unique sommet $y \in N(Y) \cap Z$ à distance minimale de x : en effet, s'il y en avait deux, y_1 et y_2, alors le point médian $m(x, y_1, y_2)$ serait dans $N(Y) \cap Z$ car $N(Y) \cap Z$ est convexe, et il serait encore plus proche de x car il appartiendrait à $[x, y_1] \cap [x, y_2]$.

Si $y = x$, alors Y est transverse à une arête incidente à x car $x \in N(Y)$, et on vérifie que Z est minimal dans S_x. Supposons $y \neq x$ et prenons un segment géodésique $[y, y_1, \ldots, y_{n-1}, x]$. Comme y est l'unique point le plus proche, on en déduit que $y_1 \notin N(Y)$ car $x, y \in Z$ qui est convexe. Soit Y_1 l'hyperplan transverse à (y, y_1) et $Z_1 \in S_x$ bordé par Y_1. Par construction, on a $y_1 \in Z_1$. Or Y_1 est tangent à Y par construction, donc $Y \cap Y_1 = \emptyset$. On en déduit que $Z_1 \subset Z$, ce qui implique que Z n'est pas minimal.

Cela montre que les éléments minimaux de S_x sont bordés par les hyperplans transverses aux arêtes incidentes à x.

Pour conclure la démonstration de la proposition, il reste à montrer que $\varphi : X^{(1)} \to \Gamma_X$ est bien surjective. Soient x un sommet de X et S une ultrasélection commensurable à S_x. Nous allons montrer que S est principale. Si $S \neq S_x$, on écrit $S_x \setminus S = \{Z_1, \ldots, Z_k\}$ de sorte que Z_j est minimal dans $\{Z_j, \ldots, Z_k\}$, $1 \leq j < k$. Notons $Y_1, \ldots, Y_k$ les hyperplans bordant $Z_1, \ldots, Z_k$. Comme Z_1 est minimal, il existe un unique $x_1 \in X^{(0)}$ tel que Y_1 est transverse à (x, x_1). On a donc $S_{x_1} = S \cup \{{}^cZ_1\} \setminus \{Z_1\}$. De proche en proche, on construit pour $1 \leq j \leq k-1$ un sommet x_{j+1} tel que Y_{j+1} est transverse à (x_j, x_{j+1}) et $S_{x_{j+1}} = S_{x_j} \cup \{{}^cZ_{j+1}\} \setminus \{Z_{j+1}\}$. En particulier, on a

$$S_{x_k} = S_x \cup \{{}^cZ_1, \ldots, {}^cZ_k\} \setminus \{Z_1, \ldots, Z_k\} = S$$

montrant que S est principale. ■

Cet exemple est en fait le cas général, comme on le montre dans le prochain paragraphe.

7.2.2. *Cubulation du graphe des ultrasélections.* La proposition suivante et le théorème 7.3 associe à un ensemble ordonné involutif un complexe cubique dont les composantes connexes sont CAT(0).

PROPOSITION 7.18. — *Soit* $(E, \leq, \sigma)$ *un ensemble ordonné involutif. Le graphe* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ *est médian.*

DÉMONSTRATION. On considère l'inclusion $\iota : \mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma) \to 2^E$. D'après le fait 7.16 (3), on a $d(\iota(S), \iota(T)) = (1/2)d(S,T)$ pour tous $S, T \in \mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$. Par conséquent, les segments pleins de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ s'envoient dans des segments pleins de 2^E. De plus, si $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$, alors $\{\iota(S_1), \iota(S_2), \iota(S_3)\}$ admet $S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_2 \cap S_3) \cup (S_3 \cap S_1)$ comme point médian dans 2^E. Pour conclure, il suffit de montrer que S est bien une ultrasélection. On vérifie facilement que si $x \in S$ et $x \leq y$, alors $y \in S$. De plus $\sigma(S) = {}^c S$:

$$\begin{aligned}
\sigma(S) &= (\sigma(S_1) \cap \sigma(S_2)) \cup (\sigma(S_2) \cap \sigma(S_3)) \cup (\sigma(S_3) \cap \sigma(S_1)) \\
&= ({}^c S_1 \cap {}^c S_2) \cup ({}^c S_2 \cap {}^c S_3) \cup ({}^c S_3 \cap {}^c S_1) \\
&= {}^c(S_1 \cup S_2) \cup {}^c(S_2 \cup S_3) \cup {}^c(S_3 \cup S_1) \\
&= {}^c\{(S_1 \cup S_2) \cap (S_2 \cup S_3) \cap (S_3 \cup S_1)\} \\
&= {}^c\{[S_2 \cup (S_1 \cap S_3)] \cap (S_3 \cup S_1)\} \\
&= {}^c\{(S_2 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_1) \cup (S_3 \cap S_1)\} \\
&= {}^c S\,.
\end{aligned}$$

Donc on a bien un graphe médian. ■

EXERCICE 7.19. — *Posons* $\mathrm{Sel}(E, \sigma) = \{S \subset E,\ E = S \sqcup \sigma(S)\}$ *que l'on munit d'une structure de graphe en décrétant qu'une paire* (S, T) *forme une arête si* $\#(S \triangle T) = 2$. *On a les propriétés suivantes :*

(1) *Montrer que si* $A \in \mathrm{Sel}(E, \sigma)$, *alors* $B \in 2^A \mapsto B \sqcup \sigma(A \setminus B) \in 2^E$ *induit une isométrie de* 2^A *sur* $\mathrm{Sel}(E, \sigma)$.

(2) *Montrer que l'injection canonique* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma) \to \mathrm{Sel}(E, \sigma)$ *est un plongement isométrique.*

(3) *En déduire une autre démonstration de la proposition 7.18.*

PROPOSITION 7.20. — *Soit* $(E, \leq, \sigma)$ *un ensemble ordonné involutif et considérons une composante connexe* X *du complexe cubique obtenu par la proposition 7.18 et le théorème 7.3. Pour chaque hyperplan* Y *de* X, *il existe un élément* $x \in E$ *tel que* (S, T) *est duale à* Y *si et seulement si* $S \triangle T = \{x, \sigma(x)\}$. *Autrement dit, pour deux arêtes* $e = (S, T)$ *et* $e' = (S', T')$, *on a* $e \square e'$ *si et seulement si* $S \setminus T = S' \setminus T'$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $T = (S, x)$ et $T' = (S', x)$. Dans ce cas, on a $m(S', S, T) = (S' \cap S) \cup (S' \cap T) \cup (S \cap T)$. Or $S \cap T = S \setminus \{x\}$ et $x \in S' \cap S$ donc $S' \cap T = (S \cap S') \setminus \{x\}$ donc $m(S', S, T) = (S' \cap S) \cup S = S$. De même, on a $m(T', S, T) = T$ donc $e \square e'$ d'après la remarque 7.12.

Réciproquement, supposons que $S, T, T,' S'$ forment un carré de sorte qu'il existe x, y tels que $T = (S, x)$, $S' = (S, y)$ et $T' = (S, x, y)$. On vérifie que $S \setminus T = \{x\} = S' \setminus T'$. ■

REMARQUE 7.21. — Si $x \in E$, le fait 7.14 nous fournit une ultrasélection S contenant P_x. Par définition de P_x, le point x est minimal dans S, donc définit un hyperplan dual à $(S, (S, x))$.

Nous pouvons en fait décrire plus précisément les hyperplans d'une classe de commensurabilité. On se fixe un ensemble ordonné involutif $(E, \leq, \sigma)$ et une ultrasélection S_0. Notons

$$F_0 = \{x \in\ S_0,\ \{y \leq x\} \cap S_0 \text{ est fini}\} \quad \text{et} \quad E_0 = F_0 \cup \sigma(F_0)\,.$$

PROPOSITION 7.22. — *L'application de restriction $\rho_0 : A \in \mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma) \mapsto (A \cap E_0) \in \mathrm{Sel}(E_0, \leq, \sigma)$ induit un isomorphisme entre les classes de commensurabilité de S_0 dans E et de F_0 dans E_0. De plus, les demi-espaces du complexe cubique X associé à cette classe sont paramétrés par E_0.*

DÉMONSTRATION. Soit S commensurable à S_0. On vérifie tout d'abord que $\rho_0(S) = S \cap E_0$ est bien une ultrasélection de E_0.

On écrit $S_0 \setminus S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ et l'on suppose que x_j est minimal dans $\{x_j, \ldots x_k\}$, donc dans $(S_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$, d'après le fait 7.16. Du coup, chaque x_j appartient à F_0. Ceci implique en particulier que $S \setminus E_0 = S_0 \setminus E_0 = S_0 \setminus F_0$ et donc que $S = (S_0 \setminus E_0) \cup (S \cap E_0) = (S_0 \setminus F_0) \cup \rho_0(S)$. On tire plusieurs conséquences de ces constats.

Si T est une autre ultrasélection commensurable à S_0, alors on obtient $S \triangle T = \rho_0(S) \triangle \rho_0(T)$. En prenant $T = S_0$, on déduit que $\rho_0(S)$ est commensurable à $\rho_0(S_0) = F_0$.

Si $\rho_0(S) = \rho_0(T)$ pour deux ultrasélections commensurables à S_0 alors

$$S = (S_0 \setminus F_0) \cup \rho_0(S) = (S_0 \setminus F_0) \cup \rho_0(T) = T$$

donc ρ_0 est injective.

Supposons maintenant que $A \subset E_0$ est commensurable à F_0 et notons $S = (S_0 \setminus F_0) \cup A$. Pour montrer que ρ_0 est surjective, on doit montrer que S est une ultrasélection puisque $S \cap E_0 = A$ par construction. On a bien $\sigma(S) \sqcup S = E$ car $\sigma(E_0) = E_0$. Il reste à montrer que S est une présélection. On se donne $x \in S$ et $y \geq x$ et on distingue plusieurs cas : (a) si $x \in (S_0 \setminus F_0)$, alors $y \in S_0$ car S_0 est une ultrasélection et $y \notin F_0$ car $x \notin F_0$ donc $y \in S$; (b) si $x \in A$ et $y \in E_0$ alors $y \in A$ donc $y \in S$; (c) si $x \in A$ et $y \notin E_0$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset F_0$ tel que $x \in (S_0 \setminus F) \cup \sigma(F)$ car $x \in E_0$; donc $y \in S_0 \setminus E_0$ et $y \in S$. Dans ces trois cas, on a montré que $y \in S$. Donc S est une ultrasélection.

Montrons maintenant que les demi-espaces sont paramétrés par E_0. Notons qu'il suffit de considérer le cas $x \in F_0$ d'après la proposition 7.20. On écrit $\{y \in F_0,\ y \leq x\} = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x\}$. Le fait 7.16 montre que $S = (S_0, x_1, \ldots, x_k)$ est une ultrasélection qui forme une arête avec $T = (S_0, x_1, \ldots, x_k, x)$. Donc x correspond au demi-espace contenant S qui est bordé par l'hyperplan dual à (S, T), cf. la proposition 7.20. ∎

Soit $(E, \leq, \sigma)$ un ensemble ordonné involutif. Deux éléments $x, y \in E$ sont *neutres* si aucune paire d'éléments de $\{x, \sigma(x), y, \sigma(y)\}$ n'est comparable ; il suffit de vérifier que

x n'est comparable ni à y ni à $\sigma(y)$. La *neutralité* de $(E, \leq, \sigma)$ est le cardinal maximal d'éléments neutres deux à deux.

PROPOSITION 7.23. — *Soit $(E, \leq, \sigma)$ un ensemble ordonné involutif. Soit X un complexe cubique CAT(0) associé à une composante de* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$. *Un cube de dimension $k \geq 0$ est donné par une présélection P et par des éléments $x_1, \ldots, x_k \notin P$ neutres tels que $P \cup (\cup_j P_{x_j})$ est une ultrasélection de X.*

DÉMONSTRATION. Soit Q un cube ; on considère un sommet S de Q. Les arêtes issues de S dans Q sont données par des arêtes (S, x_j) pour des $x_j \in S$, minimaux dans S. Notons $P = S \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Alors, comme les x_j sont minimaux, P est bien une présélection.

Réciproquement, soient P une présélection et $x_1, \ldots, x_k \notin P$ des éléments neutres tels que $S = P \cup (\cup_j P_{x_j})$ est une ultrasélection de X. Comme S est une ultrasélection, on en déduit que $x_1, \ldots, x_k$ sont minimaux dans S et neutres deux à deux. Par conséquent, $\{S, (S, x_i), (S, x_j)\}$, $i \neq j$, engendre un carré de X. La condition du link implique que $(S, (S, x_j))$ sont les arêtes d'un cube de X dont les sommets sont de la forme $P \cup \{x_j,\ j \in J\} \cup \{\sigma(x_i),\ i \in I\}$, où $\{1, \ldots, k\} = I \sqcup J$ est une partition. ■

EXERCICE 7.24. — *Montrer que la neutralité de E est la dimension du complexe cubique CAT(0) associé à E.*

EXERCICE 7.25. — *Montrer qu'il existe au plus une composante d'ultrasélections inductives si E est de neutralité finie.*

EXERCICE 7.26. — *On note $E = \mathbb{Q} \times \{\pm 1\}$ que l'on munit de la relation d'ordre $(x, \alpha) \leq (y, \beta)$ si $\alpha = \beta$ et $x \leq y$ et de l'involution $\sigma(x, \alpha) = (-x, -\alpha)$. Montrer que le graphe* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ *est totalement discontinu. Montrer qu' il existe des ultrasélections sans élément minimal.*

7.3. **Espaces à murs**

Il existe un lien profond entre les complexes cubiques et les espaces à murs de Haglund et Paulin [HP]. Si V est un ensemble, un *mur* $M = \{A, B\}$ sur V est la donnée d'une partition non triviale $V = A \sqcup B$; les éléments A et B définissent alors des *demi-espaces* de V. On dit que M sépare deux points u, v de V si $\#(A \cap \{u, v\}) = 1$.

DÉFINITION 7.27. — *Soient V un ensemble et $\sigma : 2^V \times 2^V \to 2^V \times 2^V$ l'involution définie par $\sigma(A, B) = (B, A)$. Une structure d'espace à murs est donnée par un ensemble d'indices M et par un paramétrage*

$$\begin{array}{rcl} M & \overset{\mathcal{M}}{\to} & 2^V \times 2^V/\sigma \\ m & \mapsto & \{A_m, {}^c\!A_m\} \end{array}$$

tels que, pour tous $u, v \in V$, le nombre $d_{\mathcal{M}}(u, v)$ d'indices $m \in M$ tel que $\mathcal{M}(m)$ sépare *u et v est fini. On note $E_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des couples (A, B) avec $\{A, B\} \in \mathcal{M}$.*

On munit $E_{\mathcal{M}}$
– d'une relation d'ordre en posant $(A, B) \leq (A', B')$ if $A \subset A'$ et
– de l'involution renversant l'ordre $\sigma : E_{\mathcal{M}} \to E_{\mathcal{M}}$ en posant $\sigma(A, B) = (B, A)$.

Si $v \in V$, le sous-ensemble

$$S_v = \{(A, B) \in E_{\mathcal{M}},\ v \in A\}$$

définit une ultrasélection, que l'on qualifie de *principale*. Par définition d'un espace à murs, deux ultrasélections principales sont commensurables. La composante de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ contenant les ultrasélections principales $\{S_v,\ v \in V\}$ est le 1-squelette d'un complexe cubique CAT(0) $X_{\mathcal{M}}$ d'après les propositions 7.18 et 7.11. On dit que $X_{\mathcal{M}}$ est obtenu par *la cubulation de l'espace à murs.* $(V, \mathcal{M})$.

On considère la relation binaire sur V suivante : on dit que $x \sim_{\mathcal{M}} y$ si aucun mur ne sépare x de y. On vérifie que cela définit une relation d'équivalence sur V.

PROPOSITION 7.28. — *Si V est un espace à murs, alors il existe une application φ : $(V/\sim_{\mathcal{M}}) \to X^{(0)}$ telle que $d_{\mathcal{M}}(a, b) = d_c(\varphi(a), \varphi(b))$, où $X = X_{\mathcal{M}}$ est la cubulation de $(V, \mathcal{M})$.*

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement que si $u, v \in V$, alors $S_u = S_v$ si et seulement si $u \sim v$, ce qui induit $\varphi : (V/\sim_{\mathcal{M}}) \to \mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$.

Si $u, v \in V$, alors $S_u \triangle S_v$ correspond aux murs qui séparent u et v. Du coup, on a bien $d_{\mathcal{M}}(a, b) = d_c(\varphi(a), \varphi(b))$. ∎

EXERCICE 7.29. — *Soit $V = \{x, y, z\}$ que l'on munit des murs induit par les singletons. Montrer que le complexe cubique associé est le cube $[0, 1]^3$.*

COROLLAIRE 7.30. — *Les hyperplans d'un complexe cubique associé à un espace à murs est en bijection avec les murs.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 7.20, les hyperplans sont caractérisés par les paires de demi-espaces, que sont les murs de notre espace. Donc, tout hyperplan est défini par un mur. Or chaque mur apparaît bien comme hyperplan : si $\{A, B\}$ est un mur, il existe deux points v, w séparés par ce mur : par conséquent, on a, par exemple, $A \in S_v$ et $B \in S_w$. Par définition, on a $S_v \setminus S_w = \{A_1, \ldots, A_k\}$, et on peut supposer d'une part que A_j est minimal dans $\{A_j, \ldots, A_k\}$ pour chaque j et d'autre part $A = A_i$ pour un indice i fixé. Dans ces cas-là, A correspond à l'hyperplan dual à l'arête $(S, A_1, \ldots, A_{i-1})$ et $(S, A_1, \ldots, A_i)$. ∎

7.3.1. *Comparaison avec les autres constructions.* On relie la cubulation d'un espace à murs avec les notions précédentes.

PROPOSITION 7.31. — *Dans un complexe cubique CAT(0) X, la structure d'espace à murs sur $X^{(0)}$ induite par ses hyperplans produit un complexe cubique isométrique à X.*

DÉMONSTRATION. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de X. Si Y est un hyperplan, on désigne par Z_Y et Z_Y^* les demi-espaces qu'il définit. On a donc $E_{\mathcal{M}} = \{(Z_Y, Z_Y^*), (Z_Y^*, Z_Y),\ Y \in \mathcal{H}\}$. Les ultrasélections principales correspondent donc exactement à celles de la proposition 7.17. Par conséquent, on a un isomorphisme de graphes $\varphi : X^{(1)} \to \mathrm{Sel}(E_{\mathcal{M}}, \subset, \sigma)$.

La propriété CAT(0) sur X et la définition 7.8 associée à $\mathrm{Sel}(E_{\mathcal{M}}, \subset, \sigma)$ montrent que φ se prolonge en isométrie. ∎

On se donne maintenant un ensemble ordonné involutif $(E, \leq, \sigma)$ et une ultrasélection S_0. Notons

$$F_0 = \{x \in\ S_0,\ \{y \leq x\} \cap S_0 \text{ est fini}\} \quad \text{et} \quad E_0 = F_0 \cup \sigma(F_0)\,.$$

On définit $\mathcal{M} = \{\{x, \sigma(x)\},\ x \in F_0\}$.

PROPOSITION 7.32. — *L'ensemble $\mathcal{M}$ définit une structure d'espace à murs sur* $\mathrm{Comm}_{S_0}(\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma))$ *et le complexe cubique CAT(0) $X_{\mathcal{M}}$ obtenu est isométrique au complexe cubique CAT(0) obtenu par cubulation de la composante connexe de* $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$ *contenant S_0.*

DÉMONSTRATION. Deux ultrasélections S et T sont séparées par $\{x, \sigma(x)\}$ si $\{x, \sigma(x)\} \subset S \triangle T$. Si S et T sont commensurables — dans la classe de S_0, alors $S \triangle T$ est contenu dans E_0 d'après la proposition 7.22 et est fini par définition, donc S et T sont séparés par un un nombre fini de murs. Cela montre que $\mathcal{M}$ définit une structure d'espace à murs sur $\mathrm{Comm}_{S_0}(\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma))$.

Soit X le complexe cubique associé à $\mathrm{Comm}_{S_0}(\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma))$. La proposition 7.22 implique que les hyperplans sont décrits par F_0. De plus, les hyperplans séparant deux sommets correspondent exactement aux murs séparant leurs ultrasélections. Cela implique que l'on obtient le même complexe cubique par cubulation de l'espace à murs $\mathrm{Comm}_{S_0}(\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma))$ ou par cubulation de l'espace à murs (X, E_X). Par conséquent la proposition 7.31 montre que $X_{\mathcal{M}}$ et X sont isométriques. ∎

7.3.2. *Projection entre complexes cubiques CAT(0).* On montre comment simplifier des complexes cubiques CAT(0) en choisissant une sous-famille d'hyperplans.

On considère un complexe cubique CAT(0) X. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de X, E l'ensemble des demi-espaces qui définit $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$. Prenons $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ et $E' \subset E$ l'ensemble des demi-espaces bordés par les hyperplans de $\mathcal{H}'$. Notons X' le complexe cubique CAT(0) obtenu par cubulation de l'espace à murs $(X^{(0)}, \mathcal{H}')$ qui correspond au complexe obtenu par cubulation de E' contenant la trace des ultrasélections principales de $\mathrm{Sel}(E, \leq, \sigma)$.

PROPOSITION 7.33. — *L'application $x \in X^{(0)} \mapsto S_x \cap E' \in \mathrm{Sel}(E', \leq, \sigma)$ définit une transformation surjective $p : X \to X'$ telle que*

(1) *pour tous $x, y, z \in X^{(0)}$, on a $p(m(x, y, z)) = m(p(x), p(y), p(z))$;*

(2) *un cube de X s'envoie sur un cube de X', éventuellement de dimension inférieure ;*

(3) *pour tout cube Q' de X', il existe un cube Q de X tel que $p(Q) = Q'$;*

(4) *l'ensemble $p(\mathcal{H}')$ est l'ensemble des hyperplans de X' ;*

(5) *si $Z \subset X$ est un sous-complexe convexe, alors $p(Z) \subset X'$ est un sous-complexe convexe, et si $Z' \subset X'$ est un sous-complexe convexe, alors $p^{-1}(Z')$ est aussi un sous-complexe convexe.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in X^{(0)}$, alors $S_x \cap E' \in \mathrm{Sel}(E', \leq, \sigma)$ et définit un sommet de X'. On identifie $X^{(0)}$ avec les ultrasélections principales de E. Prenons S_x, S_y, S_z les ultrasélections associées à $x, y, z \in X^{(0)}$. On obtient

$$\begin{aligned} m(p(S_x), p(S_y), p(S_z)) &= (S_x \cap S_y \cap E') \cup (S_x \cap S_z \cap E') \cup (S_y \cap S_z \cap E') \\ &= [(S_x \cap S_y) \cup (S_x \cap S_z) \cup (S_y \cap S_z)] \cap E' \\ &= p(m(S_x, S_y, S_z)) \,. \end{aligned}$$

Ceci montre (1).

Si (x, y) est une arête et Y est l'hyperplan transverse, alors, ou bien $Y \in \mathcal{H}'$ et alors $\#((S_x \cap E') \triangle (S_y \cap E')) = 2$, ou bien $Y \notin \mathcal{H}'$ et alors $S_x \cap E' = S_y \cap E'$. Du coup, on peut prolonger l'application aux arêtes. Plus généralement, si Q est un n-cube de X ; si $k \geq 0$ est le nombre d'hyperplans de $\mathcal{H}'$ qui coupent Q, alors $p(Q)$ sera un cube de dimension k. Ceci montre que p s'étend en une transformation cellulaire $p : X \to X'$. Réciproquement, soit Q' un cube de X' ; ce cube est déterminé par les hyperplans $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{H}'$ qui le définissent d'après la proposition 7.20 : il existe $S' \in \mathrm{Sel}(E', \leq, \sigma)$, des demi-espaces neutres $D_1, \ldots, D_k \in S'$ bordés par $Y_1, \ldots Y_k$ tels que les sommets de Q sont de la forme $(S, D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_\ell})$ avec $0 \leq \ell \leq k$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leq k$. Ces hyperplans sont transverses deux à deux car leurs demi-espaces sont minimaux dans S'. Donc le théorème de Helly affirme qu'ils s'intersectent — dans un cube Q de X. et on en déduit (2).

Montrons que p est surjective. Soient x un sommet de X et x' un sommet de X', décrit par une ultrasélection $S' \subset E'$. On veut montrer que S' est la trace d'une ultrasélection principale de E dans E'. On adapte l'argument de la proposition 7.17. On écrit $(S_x \cap E') \setminus S' = \{Z_1, \ldots, , Z_n\}$, et on suppose que Z_n est minimal dans $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$, donc dans $S_x \cap E'$. On montre qu'il existe une ultrasélection S_n de E telle que $S_n \cap E' = S_x \cup \{\sigma(Z_n)\} \setminus \{Z_n\}$. Si Z_n est aussi minimal dans S_x, alors $S_n = S_x \cup \{\sigma(Z_n)\} \setminus \{Z_n\}$ est aussi une ultrasélection de E qui vérifie ce que l'on veut. Sinon, on considère les hyperplans $Y_1, \ldots, Y_k$ qui séparent $\sigma(Z_n)$ de x. Ce sont les seuls hyperplans qui bordent des demi-espaces de S_x plus petits que Z_n. Du coup, on peut retourner chaque demi-espace bordé par un Y_j afin de rendre Z_n minimal, puis retourner Z_n. De proche en proche, on construit un chemin issu de x qui renverse chaque hyperplan Z_j afin d'obtenir une ultrasélection principale S telle que $S \cap E' = S$. Donc p est surjective sur les sommets.

Soit Q' un cube de X'. Il est défini par une présélection P' et par des éléments $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{H}' \setminus P'$ neutres tels que $P' \cup (\cup_j P_{Y_j})$ est une ultrasélection de X'. Ces hyperplans sont donc transverses dans X', donc dans X aussi. Par le théorème de Helly, ils s'intersectent dans X. Un point d'intersection appartient à un cube Q dont l'image est par définition Q'. Ceci montre (3).

Prenons un hyperplan combinatoire $\xi \in X^{(1)}/\Box$. Si l'hyperplan géométrique associé n'est pas dans $\mathcal{H}'$, alors chaque arête de ξ est envoyé sur un point. Si cet hyperplan est dans $\mathcal{H}'$, alors alors p transforme chaque arête de ξ en une arête. Du coup $p(\xi)$ est contenu dans un hyperplan combinatoire. Il reste à montrer que $p(\xi)$ est maximal. Soient $e \in \xi$ et e' une arête de X' tel que $p(e)\Box e'$ et supposons qu'ils bordent un carré Q'. D'après (3), il existe un cube $Q \subset X$ tel que $p(Q') = Q$. Par conséquent e' est dans l'image de ξ. Ceci montre (4).

Soit Z' un sous-complexe convexe de X' et notons $Z = p^{-1}(Z')$. Prenons $x, y \in Z$ et $z \in [x, y]$. On a donc $z = m(x, y, z)$ et, par (1), $p(z) = m(p(x), p(y), p(z))$ donc $p(z) \in [p(x), p(y)] \subset Z'$ par convexité. Donc $z \in Z$ et Z est convexe.

Soit Z un sous-complexe convexe de X. Soient $x, y \in Z$, et soit $z' \in [p(x), p(y)]$. Comme p est surjective, il existe $z \in X^{(0)}$ tel que $p(z) = z'$. Prenons $m = m(x, y, z)$ le point médian de $\{x, y, z\}$. Comme $m \in [x, y] \subset Z$, on a $z \in Z$; il suffit de vérifier que $p(m) = z'$. Pour cela, on applique (1) pour avoir $p(m) = m(p(x), p(y), z') = z'$ car $z' \in [p(x), p(y)]$. ∎

7.4. **Applications aux groupes**

L'objet de ce paragraphe est de trouver des critères permettant de montrer qu'un groupe opère sur un complexe cubique CAT(0) en préservant les cubes. On étudiera les propriétés de G dans le prochain chapitre. Typiquement, si G opère sur un ensemble V muni d'une structure d'espaces à murs $\mathcal{M}$, de sorte que, pour tout $m \in M$ et tout $g \in G$, $g(\mathcal{M}(m))$ est un mur, alors G admet une action sur la cubulation de $(V, \mathcal{M})$. Dans cette situation, on dira que $\mathcal{M}$ est une *structure d'espaces à murs G-invariante*. Plus généralement, si G opère sur un espace V, une *G-structure d'espace à murs* est la donnée d'un espace d'indices M muni d'une action de G et d'une structure d'espace à murs $\mathcal{M}$ paramétrés par M tels que, pour tout $m \in M$ et tout $g \in G$, $g(\mathcal{M}(m)) = \mathcal{M}(g(m))$.

Une *orientation* d'un espace à murs est le choix d'un demi-espace pour chaque mur, c'est-à-dire qu'elle est donnée par une application $\omega : M \to E_{\mathcal{M}}$ telle que $\omega(m)/\sigma = \mathcal{M}(m)$ pour tout $m \in M$. A partir d'une application $\omega : M \to 2^E$, on associe la famille de murs $\{\omega(m), E \setminus \omega(m)\}$. On parlera de *$G$-structure d'espace à murs orientés* pour toute G-structure d'espace à murs muni d'une orientation équivariante, vérifiant donc $\omega(g(m)) = g(\omega(m))$.

7.4.1. *Ensemble commensuré.* Soit V un ensemble muni d'une action d'un groupe G. On dit que $S \subset V$ est *G-commensuré* si, pour tout $g \in G$, la différence symétrique $S \triangle gS$ est finie.

Cela permet d'obtenir une action de G sur $\mathrm{Comm}_S(V)$, donc sur le complexe cubique associé par le théorème 7.3 en vertu de la proposition 7.5

Ces ensembles sont canoniquement reliés aux structures d'espaces à murs orientés sur le groupe comme le montre la proposition suivante. Cette relation permettra de prendre un sous-complexe de $\mathrm{Comm}_S(V)$.

PROPOSITION 7.34. — *Etant donnée une action d'un groupe G sur un ensemble V, on a une bijection canonique*

$$\{\text{ensembles commensurés de } V\} \longrightarrow \{G\text{-structures d'espace à murs orientés sur } G\}\,.$$

A un ensemble G-commensuré S sur V, on associe la structure à murs orientés $\{\{A_v, G \setminus A_v\}\}_{v \in V}$ définie par $A_v = \{h \in G \mid v \in h(S)\}$. L'application réciproque associe à une G-structure à murs orientés (A_v) sur G l'ensemble $S = \{v \in V,\ e \in A_v\}$.

DÉMONSTRATION. Le point central est de remarquer que $g(S) \triangle S$ correspond aux murs dans G qui séparent l'élément neutre de G à g.

Soient $S \subset X$, $v \in V$, $A_v = \{h \in G \mid v \in h(S)\}$ et $g \in G$; alors

$$\begin{aligned} g(A_v) &= \{gh \in G,\ v \in h(S)\} \\ &= \{h \in G,\ v \in g^{-1}h(S)\} \\ &= \{h \in G,\ g(v) \in h(S)\} = A_{g(v)}\,. \end{aligned}$$

Donc on obtient une famille équivariante de sous-ensembles sur G. Du coup, on obtient une structure d'espaces à murs si, pour tout $g \in G$, le nombre de murs induits qui séparent g de e est fini.

On vérifie que $S = \{v \in V,\ v \in e(S)\} = \{v \in V,\ e \in A_v\}$, donc ces opérations sont bien inverses l'une de l'autre.

Pour montrer le lien entre ensembles G-commensurés et espaces à murs orientés, on écrit

$$\begin{aligned} g(S) \triangle S &= \{v \in V,\quad g \in A_v \text{ et } e \notin A_v\} \cup \{v \in V,\quad g \notin A_v \text{ et } e \in A_v\} \\ &= \{v \in V,\ A_v \text{ sépare } \{e, g\}\} \end{aligned}$$

Donc S est G-commensuré si et seulement si $\{A_v\}_v$ définit une structure d'espaces à murs orientés. ∎

Etudions maintenant les complexes cubiques obtenus dans les deux cas.

PROPOSITION 7.35. — *Soient $S \subset V$ un ensemble G-commensuré et $\mathcal{M}$ les murs associés sur G. Notons X_S le complexe cubique modelé sur $\mathrm{Comm}_V(S)$ et $X_{\mathcal{M}}$ le complexe obtenu par la structure d'espace à murs. Il existe un plongement isométrique canonique $\iota : X_{\mathcal{M}} \to X_S$ équivariante.*

DÉMONSTRATION. Notons $W \subset V$ l'ensemble des sommets v tels que $A_v \notin \{\emptyset, G\}$: ce sont les sommets qui définissent donc des murs non triviaux dans G. De manière équivalente, $v \in W$ s'il existe $g \in G$ tel que $v \in S \triangle g(S)$.

Pour $v \in V$, posons $B_v = \{T \in \mathrm{Comm}_V(S),\ v \in T\}$. D'après la proposition 7.5, B_v correspond à un demi-espace bordé par l'hyperplan défini par v. De plus,

$$g(B_v) = \{T \in \mathrm{Comm}_V(S),\ v \in g^{-1}(T)\} = B_{g(v)}\,.$$

On obtient donc une G-structure d'espace à murs orientés sur $\mathrm{Comm}_V(S)$.

Notons Z l'intersection sur $V \setminus W$ des demi-espaces bordés par V qui contiennent S. Par définition de W, Z contient $G(S)$ et tout hyperplan de Z sépare $G(S)$.

Posons $S_g = \{v \in V,\ v \in g(S)\}$. On vérifie que si $g, h \in G$ alors

$$g(S_h) = \{g(v) \in V,\ v \in h(S)\} = \{v \in V,\ g^{-1}(v) \in h(S)\} = S_{gh}$$

donc $S = S_e$ et $S_g = g(S)$.

On définit $\Phi : G \to G(S)$ en posant $\Phi(g) = S_g$. D'après ci-dessus, Φ est équivariante. De plus, pour $v \in W$, on a

$$\Phi(A_v) = \{S_h,\ v \in h(S)\} = \{h(S),\ v \in h(S)\} = B_v \cap G(S)\,.$$

Cela implique que Φ met en bijection la G-structure d'espaces à murs sur G avec celle sur $G(S)$ induite par les $\{B_v,\ v \in W\}$. Par conséquent, les complexes cubiques associés sont isométriques.

Il reste à vérifier que la cubulation de $\{G(S), \{B_v,\ v \in W\}\}$ est isométrique à Z. Si T est un sommet de Z, il existe $s_1, \ldots, s_k \in S \cap W$, $t_1 \ldots, t_m \in W \setminus S$ tels que $T = (S \setminus \{s_j\}) \cup \{t_i\}$. Autrement dit,

$$T = (S, B_{s_1}, \ldots B_{s_k}, B^*_{t_1}, \ldots, B^*_{t_\ell})$$

où B^*_v désigne le demi-espace complémentaire à B_v. Or, toute ultrasélection principale s'exprime ainsi. ∎

7.4.2. *Groupes de codimension 1.* On présente une version relative des bouts d'un groupe qui permettra de faire opérer un groupe sur un complexe cubique. Commençons par une proposition préliminaire.

PROPOSITION 7.36. — *Soit H un groupe muni de deux actions libres proprement discontinues par isométries sur des espaces métriques X et Y. On suppose qu'il existe une quasi-isométrie $\phi : X \to Y$ equivariante. Alors les espaces quotients X/H et Y/H sont quasi-isométriques.*

Les distances sur les espaces quotients sont définies dans le lemme suivant.

LEMME 7.37. — Soit H un groupe topologique muni d'une action libre proprement discontinue par isométries sur un espace métrique X. La formule

$$d_Q(H(x), H(y)) = \inf\{d(x, h(y)),\ h \in H\}$$

définit une métrique sur X/H compatible avec la topologie quotient.

DÉMONSTRATION. On vérifie tout d'abord que la définition de d_Q ne dépend pas du représentant puisque H opère par isométries. De plus, d_Q est bien symétrique.

Si $d_Q(H(x), H(y)) = 0$, alors il existe une suite (h_n) de H telle que $h_n(y)$ tend vers x. Or $K = \{x\} \cup \{h_n(x),\ n \geq 0\}$ est compact. Or $(h_n \circ h_m^{-1})(K) \cap K \neq \emptyset$ pour tout $m, n \geq 0$, donc $\{h_n\}_n$ est fini puisque l'action est proprement discontinue, donc K aussi, ce qui implique $y \in H(x)$.

On se donne $x, y, z \in X$ et $\varepsilon > 0$; Il existe $h, h' \in H$ tels que $d_Q(H(x), H(y)) \leq d(x, h(y)) + \varepsilon/2$ et $d_Q(H(y), H(z)) \leq d(y, h'(z)) + \varepsilon/2$. Par conséquent

$$\begin{aligned} d_Q(H(x), H(z)) &\leq d(x, (h \circ h')(z)) \leq d(x, h(y)) + d(h(y), (h \circ h')(z)) \\ &\leq d(x, h(y)) + d(y, h'(z)) \leq d_Q(H(x), H(y)) + d_Q(H(y), H(z)) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Donc d_Q vérifie bien l'inégalité triangulaire. Enfin, la projection canonique est clairement contractante. ■

On passe à la démonstration de la proposition 7.36.

DÉMONSTRATION. Comme ϕ est H-équivariante, elle induit une transformation $\varphi : X/H \to Y/H$. Soient $x, y \in X$; pour tout $h \in H$, on a $d(\phi(x), \phi(h(y))) \leq \lambda d(x, h(y)) + c$ donc

$$d_Q(\varphi(H(x)), \varphi(H(y))) = d_Q(H(\phi(x)), H(\phi(y)) \leq \lambda d(x, h(y)) + c$$

pour tout $h \in H$. Par suite, $d_Q(\varphi(H(x)), \varphi(H(y))) \leq \lambda d_Q(H(x), H(y)) + c$.

De même, $(1/\lambda)d(x, h(y)) - c \leq d(\phi(x), \phi(h(y)))$ donc

$$(1/\lambda)d_Q(H(x), H(y)) - c \leq (1/\lambda)d(x, h(y)) - c \leq d(\phi(x), \phi(h(y))) \leq d(\phi(x), h(\phi(y))$$

et on en déduit $(1/\lambda)d_Q(H(x), H(y)) - c \leq d_Q(\varphi(H(x)), \varphi(H(y)))$.

Enfin, on vérifie sans mal que $\varphi(X/H)$ est c-dense dans Y/H. ■

Cette proposition nous permet de définir les notions suivantes.

DÉFINITION 7.38 (bouts relatifs, codimension 1). — *Soit H un sous-groupe d'un groupe G de type fini. Le nombre de bouts relatifs $e(G, H)$ de G par rapport à H est le nombre de bouts de $H\backslash X$, où X désigne un graphe de Cayley localement fini sur lequel on fait opérer H par translations à gauche.*

On dit que H est de codimension 1 si $e(G, H) \geq 2$.

La proposition 7.36 montre que $e(G, H)$ ne dépend pas du graphe de Cayley choisi. On peut remarquer que $e(G, \{e\}) = e(G)$. La question naturelle se pose de savoir si, comme pour le théorème de Stallings, on a un scindement de G au-dessus de H si et seulement si $e(G, H) \geq 2$. Nous verrons que la réponse générale est négative dans le prochain chapitre. Voir [Sco, Sag1] pour plus de détails sur les bouts relatifs.

Notre objectif est le théorème suivant :

THÉORÈME 7.39 (Sageev). — *Si H est un sous-groupe de codimension 1, alors G opère sur un complexe cubique CAT(0) X qui admet un hyperplan Y tel que, si $v \in X$ et Z, Z^* désigne les demi-espaces bordés par Y alors*

(1) *H est un sous-groupe d'indice fini dans* $\mathrm{stab}Y$ *;*

(2) *$\{g \in G,\ g(v) \in Z\}$ et $\{g \in G,\ g(v) \in Z^*\}$ sont des réunions infinis de H-orbites.*

Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $\pi : G \to H\backslash G$ la projection canonique. Suivant les idées développées pour les groupes à une infinité de bouts, Sageev définit dans [Sag1] un *H-ensemble presque invariant* comme un ensemble $A \subset G$ tel que

(1) pour tout $h \in H$, on a $hA = A$;

(2) $\pi(A) = H\backslash A$ et $\pi(G \setminus A) = H\backslash(G \setminus A)$ sont infinis ;

(3) pour tout $g \in G$, $A \triangle Ag$ est H-fini, c'est-à-dire $\pi(A \triangle Ag)$ est fini.

PROPOSITION 7.40. — *Un sous-groupe H est de codimension 1 si et seulement s'il existe un H-ensemble presque invariant.*

DÉMONSTRATION. On se fixe un système de générateurs fini S de G et son graphe de Cayley X. Le sous-groupe H opère sur X et on not $X_H = H\backslash X$ l'espace de ses orbites.

Supposons que $e(G, H) \geq 2$ soit que X_H ait au moins deux bouts. Par la proposition 1.24, il existe donc un compact K connexe contenant H tel que $X_H \setminus K$ ait au moins deux composantes connexes infinies. Notons B_0 l'une d'elles, $B = K \cup B_0$ et $A = \pi^{-1}(B)$. Si $a \in G$, et $g \in A \setminus Aa$, alors $g \in A$ et $ga^{-1} \notin A$. Du coup on a $d(ga^{-1}, \pi^{-1}(K)) \leq d(ga^{-1}, g) = |a|_S$. Comme X est localement fini et K est fini, cela implique que $\pi(g)$ est dans un ensemble fini. On montre de même que $\pi(Aa \setminus A)$ est fini, donc $\pi(A)$ est presque invariant et, par construction, A est H-invariant.

Réciproquement, on se donne un H-ensemble presque invariant A. Notons K l'ensemble des arêtes joignant un point de $\pi(A)$ à son complémentaire. Une telle arête correspond à un couple (a, as) pour $a \in A$, $s \in S$ et $as \notin A$. Donc $K \subset \cup_{s \in S} \pi(A \triangle As)$ et on en déduit que K est fini. De plus K est le bord de $\pi(A)$ donc $\pi(A)$ a au plus $|K|$ composantes connexes, dont une au moins est infini. De même pour son complémentaire. Donc la proposition 1.24 montre que X_H a au moins deux bouts. ∎

Passons à la démonstration du théorème 7.39.

DÉMONSTRATION. (thm 7.39) Si H est de codimension 1 dans G, alors on peut considérer un H-ensemble presque invariant S. En considérant un graphe de Cayley localement fini X de G et en notant $\pi : X \to X_H = H\backslash X$ la projection canonique, on peut supposer que S contient H et que
$pi(H)$ est rattaché une classe hors de $\pi(S)$.

On remarque que G opère par translations à droite sur $H\backslash G$ en posant $g \cdot Hk = Hkg^{-1}$ et que S est par définition G-commensuré pour cette action.

Par conséquent, la proposition 7.34 nous fournit une G-structure d'espace à murs sur G paramétré par X_H. Il nous vient une action de G sur la cubulation de cet espace à murs.

Remarquons que le mur induit par H est $A_H = \{g \in G,\ H \subset gS\}$. Si $h \in H$, alors $hA_H = A_{Hh} = A_H$ car S est H-invariant donc H stabilise l'hyperplan Y et le demi-espace Z induit par A_H. Si $g \in G$ stabilise S, alors g stabilise le sous-ensemble fini F des classes de $\pi(S)$ qui sont rattachés au complémentaire. Par conséquent, on a $Hg \subset HF$, donc g appartient à HF. Cela montre que H est d'indice fini dans stabA_H, donc de stab$Y$ car stabA_H est d'indice au plus deux dans ce dernier.

Enfin, comme S et son complémentaire sont H-infinis, il en de même de $\{g \in G,\ g(v) \in Z\}$ et $\{g \in G,\ g(v) \in Z^*\}$. ■

RÉFÉRENCES

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CN] Indira Chatterji and Graham Niblo. From wall spaces to CAT(0) cube complexes. *Internat. J. Algebra Comput.* **15**(2005), 875–885.

[Che] Victor Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.* **24**(2000), 125–179.

[Cor] Yves Cornulier. Group actions with commensurated subsets, wallings and cubings. preprint., 2014.

[HP] Frédéric Haglund and Frédéric Paulin. Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 181–248 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

[HW] G. C. Hruska and Daniel T. Wise. Finiteness properties of cubulated groups. *Compos. Math.* **150**(2014), 453–506.

[Nic] Bogdan Nica. Cubulating spaces with walls. *Algebr. Geom. Topol.* **4**(2004), 297–309 (electronic).

[Sag1] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)* **71**(1995), 585–617.

[Sag2] Michah Sageev. Codimension-1 subgroups and splittings of groups. *J. Algebra* **189**(1997), 377–389.

[Sco] Peter Scott. Ends of pairs of groups. *J. Pure Appl. Algebra* **11**(1977/78), 179–198.