6. COMPLEXES CUBIQUES CAT(0) : DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Les complexes cubiques CAT(0) sont définis par M. Gromov dans [Gro]. Ils généralisent la notion d'arbre simplicial en dimension supérieure. Le rôle des arêtes est joué par les hyperplans.

6.1. Espaces CAT(κ)

La plupart des résultats de ce paragraphe sont issus de [BH].

Soit (X, d) un espace métrique. Une *courbe* est une application continue $c : I \to X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur $\ell(c)$ de la courbe c (avec I compact) est par définition

$$\ell(c) = \sup \sum_{0 \leq j < n} d(c(t_j), c(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $I = [t_0, t_n]$. Lorsque I n'est pas compact, alors on définit $\ell(c) = \sup \ell(c|_J)$, où le supremum est pris sur tous les sous-intervalles compacts $J \subset I$.

Enfin, une courbe est *géodésique* si $c : I \to X$ préserve les distances : $d(c(s), c(t)) = |t-s|$ pour tous $s, t \in I$. Un espace est géodésique si toute paire de points est liée par une *géodésique.*

6.1.1. *Espaces modèles.* Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{M}_\kappa$ la variété riemannienne simplement connexe et complète de dimension 2 de courbure constante égale à κ, bien définie à isométries près.

- Si $\kappa = 0$, alors $\mathbb{M}_0$ s'identifie au plan euclidien $\mathbb{E}^2$.
- Si $\kappa = 1$, alors $\mathbb{M}_1$ s'identifie à la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$. Si $p, q \in \mathbb{S}^2$, alors $d(p, q)$ est l'unique nombre de $[0, \pi]$ tel que $\cos d(p, q) = \langle p, q \rangle$. Plus généralement, si $\kappa > 0$, alors $\mathbb{M}_\kappa$ s'identifie à la sphère de rayon $1/\sqrt{\kappa}$ de $\mathbb{E}^3$.
- Si $\kappa = -1$, alors $\mathbb{M}_{-1}$ s'identifie au plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Plus généralement, si $\kappa < 0$, alors $\mathbb{M}_\kappa$ s'identifie au plan de Poincaré auquel on a multiplié la distance par le facteur $1/\sqrt{-\kappa}$.

Donnons quelques propriétés.

Proposition 6.1. — *L'espace $\mathbb{M}_\kappa$ est un espace métrique géodésique. Son diamètre D_κ vaut $\pi/\sqrt{\kappa}$ si $\kappa > 0$ et est infini sinon. Si $\kappa \leq 0$, alors $\mathbb{M}_\kappa$ est uniquement géodésique et ses boules sont convexes. Si $\kappa > 0$, alors deux points p, q sont liés par un unique segment géodésique si et seulement si $d(p, q) < \pi/\sqrt{\kappa}$; de plus ses boules fermées de rayon strictement inférieur à $\pi/2\sqrt{\kappa}$ sont convexes.*

Pour la suite, nous aurons besoin de construire des triangles. Nous nous appuierons sur le lemme suivant dont la démonstration est laissée en exercice.

LEMME 6.2 (existence de triangles). — Soient $\kappa \in \mathbb{R}$ et $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ des distances telles que $d_i \leq d_j + d_k$ pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ et $d_1 + d_2 + d_3 < 2D_\kappa$. Alors il existe trois points a, b, c définissant un triangle dans $\mathbb{M}_\kappa$ tels que $d(a, b) = d_1$, $d(a, c) = d_2$ et $d(b, c) = d_3$.

6.1.2. *Triangles de comparaison.* Soit $\kappa \in \mathbb{R}$ et soit X un espace métrique géodésique. Un triangle est donné par trois points et trois segments géodésiques qui les relient (souvent sous-entendus). Soient a, b, c les sommets d'un triangle de X de périmètre strictement inférieur à $2D_\kappa$. Un triangle de comparaison de $T = \{a, b, c\}$ est un triangle $\bar{T} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ de $\mathbb{M}_\kappa$ tel que $d(a, b) = d(\bar{a}, \bar{b})$, $d(a, c) = d(\bar{a}, \bar{c})$ et $d(b, c) = d(\bar{b}, \bar{c})$. Si T est donné par des segments géodésiques, alors on peut construire une application de comparaison $\alpha : T \to \bar{T}$ qui, restreinte à chaque côté, est une isométrie.

On dit qu'un espace métrique géodésique X est $\mathrm{CAT}(\kappa)$, $\kappa \leq 0$, si, pour chaque triangle T de X et chaque triangle de comparaison $\bar{T}$ de $\mathbb{M}_\kappa$ associé, l'application de comparaison $\alpha : T \to \bar{T}$ dilate les distances : $d(\alpha(p), \alpha(q)) \geq d(p, q)$. Si $\kappa > 0$, alors X est $\mathrm{CAT}(\kappa)$ si X est D_κ-uniquement géodésique, c'est-à-dire que deux points à distance strictement inférieure à D_κ sont liés par un unique segment géodésique et si toute application de comparaison entre des triangles de périmètre strictement inférieur à $2D_\kappa$ est dilatante.

En particulier, X est $\mathrm{CAT}(1)$ si X est π-uniquement géodésique (deux points $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) < \pi$ sont reliés par un unique segment géodésique) et si tout triangle de périmètre $< 2\pi$ est plus pincé qu'un triangle de comparaison sur la sphère. On dit que X est $\mathrm{CAT}(0)$ si X est géodésique et si tout triangle est plus pincé qu'un triangle de comparaison du plan euclidien.

Un espace métrique X est de courbure (bornée par) κ si X est localement $\mathrm{CAT}(\kappa)$, c'est-à-dire que tout point x est le centre d'une boule convexe et non triviale qui est $\mathrm{CAT}(\kappa)$ pour la métrique induite.

6.1.3. *Espaces de courbure négative.* Un espace métrique est *de courbure négative* s'il est localement $\mathrm{CAT}(0)$.

PROPOSITION 6.3. — *Soit X un espace CAT(0). On a les propriétés suivantes.*

(1) *Deux points sont liés par un unique segment géodésique.*

(2) *L'espace X est contractile.*

On énonce un théorème fondamental permettant de passer du local au global.

THÉORÈME 6.4 (Cartan-Hadamard). — *Un espace complet de courbure négative est CAT(0) si et seulement s'il est simplement connexe.*

On peut se reporter à [BH, § II.4].

EXERCICE 6.5. — *Montrer la complétion d'un espace CAT(0) est toujours CAT(0).*

Angles.— Soit X un espace CAT(0) ; on considère un triangle $\{a, b, c\}$ et un triangle de comparaison $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Notons $\alpha = \alpha(a, b, c) \in [0, \pi]$ l'angle au sommet $\bar{a}$. On considère maintenant $b' \in [a, b]$ et $c' \in [a, c]$, ainsi qu'un triangle de comparaison $\{\bar{a}, \bar{b}', \bar{c}'\}$ et on note α' le nouvel angle au point $\bar{a}$. La condition CAT(0) montre que $\alpha \geq \alpha'$. Du coup, si on a deux germes de géodésiques γ et γ' issus de a, on définit *l'angle (d'Alexandroff)* du secteur au point a comme le plus grand minorant des angles de comparaison au point a des triangles $\{a, b, b'\}$ avec $b \in \gamma$ et $b' \in \gamma'$ *i.e.*,

$$\alpha(a, \gamma, \gamma') = \lim_{s,t \to 0} \alpha(a, \gamma(s), \gamma(t)) .$$

PROPOSITION 6.6. — *Dans un espace CAT(0), la somme des angles d'un triangle est inférieure à π.*

DÉMONSTRATION. Soit T un triangle. L'angle à un sommet est par construction inférieur à celui de n'importe quel triangle de comparaison. Or, dans un espace euclidien, la somme des angles vaut π, donc la somme des angles d'un triangle dans un espace CAT(0) est inférieure. ■

EXERCICE 6.7. — *Montrer que la somme des angles d'un triangle dans un espace CAT(0) vaut π si, et seulement si ce triangle est isométrique à un triangle euclidien.*

Isométries locales.— On établit quelques propriétés des espaces localement isométriques à des sous-espaces CAT(0).

PROPOSITION 6.8. — *Soient X et Y deux espaces complets avec Y géodésique et X de courbure négative. Si $f : Y \to X$ est une isométrie locale, alors Y est de courbure négative et, pour tout $y \in Y$, l'application $f_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, f(y))$ est injective. En particulier, si X est CAT(0) alors $f : Y \to X$ est une isométrie donc Y est CAT(0) aussi.*

On établit un premier lemme.

LEMME 6.9. — Une géodésique locale dans un espace CAT(0) est une géodésique globale.

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma : I \to X$ une géodésique locale. Prenons $t_0 \in I$; il suffit de montrer que $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) = |t - t_0|$ pour tout $t \in I$. Notons

$$J = \{t \in I,\ d(\gamma(t), \gamma(t_0)) = |t - t_0|\} .$$

C'est un fermé non vide. Montrons qu'il est aussi ouvert ; soit $t \in J$, et supposons $t > t_0$. Du coup, $\gamma|_{[t_0,t]}$ est géodésique.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma|_{]t-2\varepsilon,t+2\varepsilon[}$ soit géodésique. Soit $s \in]t, t+2\varepsilon[$. On considère le triangle $T = \{\gamma(t_0), \gamma(t), \gamma(s)\}$ et un triangle de comparaison $f : T \to T'$. D'une part, on a

$$d(f(\gamma(s)), f(\gamma(t - \varepsilon))) \leq |s - t| + |t - (t - \varepsilon)| \leq s - t + \varepsilon ;$$

d'autre part, la propriété CAT(0) nous apprend

$$d(f(\gamma(s)), f(\gamma(t-\varepsilon))) \geq d(\gamma(s), \gamma(t-\varepsilon)) = s - t + \varepsilon$$

donc

$$d(f(\gamma(s)), f(\gamma(t-\varepsilon))) = s - t + \varepsilon = d(f(\gamma(s)), f(\gamma(t))) + d(f(\gamma(t)), f(\gamma(t-\varepsilon)))$$

ce qui signifie que ces points sont alignés donc $s \in J$. ■

DÉMONSTRATION. (prop. 6.8) L'espace Y est de courbure négative puisqu'il est localement isométrique à un espace de courbure de négative (si f est isométrique sur $B(y, 2r)$ alors tout triangle géodesique dont les sommets sont contenus dans $B(y, r)$ sera contenu dans $B(y, 2r)$) ; par conséquent, il est localement simplement connexe et on peut considérer son revêtement universel $\tilde{Y}$ que l'on munit de la distance de longueur induite. Le théorème de Cartan-Hadamard implique que $\tilde{Y}$ est un espace CAT(0). De même, le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est un espace CAT(0).

L'application f se relève en un plongement localement isométrique $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$. Notons $\tilde{y}$ un relevé de y et $c : [0, 1] \to Y$ un représentant d'un élément du $\pi_1(Y, y)$. S'il est non trivial, on peut supposer que son relevé $\tilde{c} : [0, 1] \to \tilde{Y}$ issu de $\tilde{y}$ est géodésique (il est homotope au segment $[\tilde{c}(0), \tilde{c}(1)]$ relativement aux extrémités). Mais alors, $\tilde{f} \circ \tilde{c}$ est une géodésique locale dans l'espace CAT(0) $\tilde{X}$, donc le lemme 6.9 implique que $\tilde{f} \circ \tilde{c}$ est géodésique. Par conséquent, il ne peut être trivial dans $\pi_1(X, f(y))$. Ceci montre que $f_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, f(y))$ est injective.

Si X est simplement connexe, alors le lemme 6.9 implique que l'image de tout segment géodésique est géodésique et de même longueur, donc f est un isométrie. ■

EXERCICE 6.10. — *L'ensemble des points fixes d'une isométrie est un ensemble convexe.*

6.2. **Complexes cubiques**

Un cube est un espace métrique isométrique à $[0, 1]^n \subset \mathbb{E}^n$, pour $n \geq 0$. Une face d'un cube est un sous-cube de dimension $k < n$ dont les squelettes sont dans le cube initial. Plus précisément, étant donnés $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{(-1/2), 1/2\}$ on obtient la face

$$Q \cap \{x_{j_\ell} = \varepsilon_\ell,\ \ell = 1, \ldots, k\}$$

de $Q = [(-1/2), (1/2)]^n$.

Un *complexe cubique* X est le quotient de la réunion disjointe Y d'une collection de cubes $\{Q_\lambda = [0, 1]^{n_\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ par une relation d'équivalence $\sim$ sujette aux conditions suivantes :

– pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la restriction $p_\lambda : Q_\lambda(\subset Y) \to X$ de la projection canonique $p : Y \to X = Y/\sim$ est injective ;
– deux cubes sont recollés ($p(Q_\lambda) \cap p(Q_\mu) \neq \emptyset$) le long de faces respectives de même dimension par une isométrie.

La topologie de chaque cube induit une topologie sur Y, donc une topologie sur X (topologie quotient). La distance sur les cellules induit une distance sur chaque composante connexe d'un complexe cubique, en décrétant que la distance entre deux points est le plus grand minorant des sommes de la forme

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{n} d(x_{j-1}, x_j),$$

où $x_0 = x$, $x_n = y$, et pour chaque i, il existe un cube qui contient les deux points x_j et x_{j-1}, et la distance est mesurée dans la métrique standard dans chaque cube.

On obtient ainsi une distance de longueur en associant une courbe polygonale à chaque chaîne $(x_j)_{0\leq j\leq n}$ en joignant deux points consécutifs contenus dans un même cube par le segment de ce cube ayant ces points pour extrémités.

Pour tout $x \in X$, on note $\varepsilon(x) = \inf \varepsilon(x, Q)$, où Q parcourt l'ensemble des cubes contenant x et où $\varepsilon(x, Q)$ est la distance de x à la réunion des faces de Q ne contenant pas x.

FAIT 6.11. — *Un point dans un complexe cubique est ou bien un sommet, ou bien à l'intérieur d'un unique cube Q_x de (dimension minimale). De plus, on a $\varepsilon(x) = 1$ si x est un sommet, ou $\varepsilon(x) = \mathrm{dist}(x, \partial Q_x)$ sinon. En particulier, on a $\varepsilon(x) > 0$.*

On notera Q_x le cube de dimension minimale contenant x.

DÉMONSTRATION. La première assertion découle des définitions. Si x est un sommet, alors n'importe quelle face disjointe de x est à distance 1. Sinon, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon(x, Q_x) = \mathrm{dist}(x, \partial Q_x)$. ■

Une courbe $\gamma : I \to X$ est *admissible* si, pour chaque cube Q, chaque composante connexe de l'intersection de γ *apQ* est une réunion de segments.

PROPOSITION 6.12. — *Toute courbe définie sur un intervalle compact est homotope à une courbe admissible de longueur inférieure.*

On s'appuiera sur le lemme suivant.

LEMME 6.13. — Soit x un point d'un complexe cubique X. Notons $\widehat{Q}_x$ la réunion des cubes contenant x. Alors $\widehat{Q}_x$ se rétracte sur $\{x\}$.

DÉMONSTRATION. Sur chaque cube Q contenant x, on définit $F_Q : Q \times [0,1] \to Q$ en posant $F_Q(z,t) = x + t(z - x)$, en identifiant Q à un cube de l'espace euclidien par une isométrie. On vérifie que F_Q est une homotopie de Q $(t = 1)$ à $\{x\}$ $(t = 0)$.

On remarque que $F_Q = F_{Q'}$ sur $Q \cap Q'$, donc obtient ainsi la rétraction recherchée $F : \widehat{Q}_x \times [0,1] \to \widehat{Q}_x$ en recollant ces homotopies. ■

DÉMONSTRATION. (prop. 6.12) On suppose que γ n'est constante sur aucun intervalle ouvert. On procède en deux temps. Dans une première étape, on montre que γ est homotope à une courbe polygonale. Ensuite, on montrera comment déformer cette courbe pour devenir admissible. Notons

$$E = E_\gamma = I \setminus \{t \in I,\ \exists \varepsilon > 0,\ \gamma([t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap I) \subset Q_{\gamma(t)}\}$$

qui est compact dans I. On remarque que, pour chaque composante J de $I \setminus E$, il existe un cube Q tel que $\gamma(t) \in int(Q)$, impliquant en particulier $\gamma(J) \subset Q$.

Pour tout $t \in E$, posons $x = \gamma(t)$ et notons

$$\begin{cases} s_t = \inf\{s < t,\ \gamma([s,t]) \subset B(x, \varepsilon(x)/3)\} \\ s'_t = \inf\{s < t,\ \gamma([t,s]) \subset B(x, \varepsilon(x)/3)\} \end{cases}$$

On obtient ainsi un recouvrement de E par des intervalles $]s_t, s'_t[$ dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $]s_j, s'_j[$, tel que, pour tout j, il existe $x_j \in \gamma$ de sorte que $\gamma([s_j, s'_j]) \subset \overline{B_X(x_j, \varepsilon(x_j)/3)}$. On peut numéroter ces intervalles de sorte que $x_j < x_{j+1}$ et on peut se ramener à la situation où $s'_j \leq s_{j+1}$, quitte à diminuer les s' ou à augmenter les s_j.

Sur $[s_j, s'_j]$, il existe une homotopie de γ à la courbe $[\gamma(s_j), x] \cup [x, \gamma(s'_j)]$ en vertu du lemme 6.13. Sur $[s'_j, s_{j+1}]$, la courbe γ est contenu dans un cube, donc il existe une homotopie au segment $[\gamma(s'_j), \gamma(s_{j+1})]$. La courbe γ' ainsi obtenue est polygonale.

On écrit $I = [x_0, x_n]$, où les points x_j, $1 \leq j \leq n-1$ sont les points marqués ci-dessus. On déforme γ' de proche en proche comme suit. Notons j_1 le plus grand indice tel que $x_0, x_1, \ldots, x_{j_1}$ est contenu dans un même cube Q_1. On peut alors trouver une homotopie de γ' vers le segment $[x_0, x_{j_1}]$. Si j_k est construit, on note j_{k+1} le plus grand indice tel que $x_{j_k}, x_1, \ldots, x_{j_{k+1}}$ est contenu dans un même cube Q_{j+1}. On peut alors trouver une homotopie de γ' vers le segment $[x_{j_k}, x_{j_{k+1}}]$. On s'arrête quand n est atteint. ■

FAIT 6.14 (Structure des géodésiques). — *Soit X un complexe cubique. Toute géodésique $\gamma : I \to X$ est admissible. De plus, il existe une subdivision de I localement fini $(t_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{Z}$, et des cubes $(Q_j)_{j\in J}$ tel que $]\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})[$ est contenu dans l'intérieur de Q_j.*

DÉMONSTRATION. Soit $t \in I$;Il existe un unique cube Q_x de dimension minimale contenant x La composante connexe de $Q_x \cap \gamma$ contenant x est de la forme $[\gamma(s_t), \gamma(s'_t)]$ et on considère $I_x =]s_t - \varepsilon(\gamma(s_t))/3, s'_t + \varepsilon(\gamma(s'_t))/3[$. On obtient ainsi un recouvrement ouvert de I dont on peut extraire un sous-recouvrement localement fini $(I_j)_{j\in J}$ avec des indices ordonnés.

Soient $t \in I$ et $x = \gamma(t)$; observons que si $s_t < s'_t$, alors l'intervalle I_x figure automatiquement dans ce sous-recouvrement par construction. En revanche, si $s_t = s'_t$, alors $\gamma([s_t - \varepsilon(x)/3, s_t])$ est contenu dans le cube $Q_{\gamma(s_t - \varepsilon(x)/3)}$ et, $\gamma([s_t, s_t + \varepsilon(x)/3])$ est contenu dans le cube $Q_{\gamma(s_t + \varepsilon(x)/3)}$. Par conséquent, l'intervalle I_x est recouvert par ses voisins et n'est donc pas nécessaire. ■

FAIT 6.15. — *Deux cubes disjoints d'un complexe cubique sont à distance au moins* 1.

DÉMONSTRATION. Soient Q, Q' deux cubes d'un complexe cubique tel que $\mathrm{dist}(Q, Q') < 1$. Il existe donc une courbe admissible γ les joignant de longueur $\ell(\gamma) < 1$. On procède par récurrence sur le nombre de cubes dont γ traverse l'intérieur. Si ce nombre vaut 1, alors γ relie deux faces d'un même cube. Dans ce cas, on vérifie facilement que ces deux faces s'intersectent. Supposons maintenant que si une courbe γ' traverse l'intérieur de n cubes et sa longueur vérifie $\ell(\gamma') < 1$, alors les cubes extrêmes s'intersectent et supposons que γ traverse l'intérieur de $n+1$ cubes $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$. Par conséquent, la restriction de γ aux n premiers cubes est de longueur inférieure à celle de γ, impliquant par l'hypothèse de récurrence que $Q \cap Q_{n+1}$ est non vide. Du coup, on peut raccourcir γ en considérant une courbe partant d'un point de cette intersection et joignant Q'. On se ramène ainsi au cas $n = 1$. ■

PROPOSITION 6.16. — *Une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans un complexe cubique connexe X est convergente si, et seulement si, il existe $k \geq 0$ tel que $\lim d(x_n, X^{(k)}) = 0$. Sinon, il existe une suite de Cauchy (y_n) équivalente à (x_n) telle que les éléments de $(y_n)_n$ sont contenus dans une réunion croissante de cubes.*

En particulier, X est complet si et seulement s'il ne contient pas une suite de cubes emboîtés.

DÉMONSTRATION. Si la suite est convergente, elle tend vers un point x qui est donc contenu dans un squelette $X^{(k)}$. Par conséquent, on a $\lim d(x_n, X^{(k)}) = 0$.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy, et supposons que la suite ne tend pas vers un sommet. Quitte à oublier les premiers termes de la suite, on peut supposer que $d(x_p, x_q) \leq 1/6$ pour tous n, p, q. En notant Q_n le cube de dimension minimale contenant x_n, on obtient ainsi $d(Q_p, Q_q) \leq 1/6$, impliquant $Q_p \cap Q_q \neq \emptyset$. Par un procédé diagonal, on peut supposer que chaque cube Q_n contient une face F_n (qui peut être égale à Q_n) telle que $Q_n \cap Q_p = F_n$ pour $p \geq n$. Du coup, on a, pour $m \geq n \geq p$, $Q_m \cap Q_n \cap Q_p = F_n \cap Q_p = F_p$, donc la suite (F_n) est croissante.

Si la suite est stationnaire, alors on a convergence. Sinon, on note y_n la projection orthogonale de x_n sur F_n. On vérifie que (y_n) est de Cauchy. ■

6.3. Complexes cubiques... CAT(0)

Un complexe cubique CAT(0) est un complexe cubique qui, muni de la distance définie au paragraphe précédent, vérifie la propriété CAT(0). L'objet de ce paragraphe est de présenter des critères qui permettent d'assurer qu'un complexe cubique est bien CAT(0).

Soit X un complexe cubique. A chaque sommet $v \in X^{(0)}$, on associe un complexe simplicial appelé le *link* de v et noté $\mathrm{Lk}(v, X)$. Chaque n-cube incident à v produit un $(n-1)$-simplexe du link. Les incidences des cubes produisent les incidences de leurs simplexes associés. Chaque arête incidente à v produit un sommet ; deux arêtes qui bordent un carré donnent une arête du 1-squelette ; trois carrés qui bordent un cube donne un 2-simplexe, etc. De manière équivalente, l'intersection de X avec la sphère S de rayon $(1/2)$ centrée en v définit le link : l'intersection de S avec chaque n-cube a une structure naturelle de $(n-1)$-simplexe, avec les recollements sous-jacents.

Un *complexe de drapeaux* est un complexe simplicial K tel que tout sous-graphe complet du 1-squelette de K est le 1-squelette d'un simplexe de K.

Un complexe cubique K satisfait la *condition de link* si, pour tout sommet $v \in K$, le complexe $\mathrm{Lk}(v, K)$ est un complexe de drapeaux.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 6.17 (M. Gromov). — *Un complexe cubique est de courbure négative si et seulement si le link de tout sommet est de drapeaux. En particulier, un complexe cubique X est CAT(0) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *X est simplement connexe ;*

(2) *le link de tout sommet est de drapeaux.*

La démonstration en dimension finie se trouve par exemple dans [BH, Theorem II.5.18]. Le cas de la dimension infinie est traité dans les annexes de [Lea]. Nous présentons quelques étapes ci-dessous pour la dimension finie.

Exercice 6.18. — *Montrer qu'un complexe par carrés vérifie la condition du link si toute courbe fermée simple dans n'importe quel link est de longueur au moins* 4.

6.3.1. *Cônes euclidiens.* Un *complexe sphérique droit* est un complexe simplicial modelé sur la sphère dont toutes les arêtes sont de longueur $\pi/2$ et deux arêtes incidentes s'intersectent à angle droit. Le link d'un sommet d'un complexe cubique est naturellement muni d'une structure de complexe sphérique à angle droit. On a

Théorème 6.19. — *Un complexe cubique est de courbure négative si et seulement si le link de tout sommet est CAT(1), quand on le munit de sa structure de complexe sphérique à angle droit.*

Pour ce théorème, on définit le *cône euclidien* sur un espace métrique Y [BH, § I.5.6] : c'est le quotient $C(Y) = [0, \infty) \times Y/(0, y) \sim (0, y')$. On note $(t, y) = ty$, et pour $x = ty, x' = t'y'$ on pose
$$d(x, x')^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' \cos(d_\pi(y, y'));$$
où $d_\pi(y, y') = \min\{\pi, d(y, y')\}$.

Théorème 6.20 (Berstovskii). — *Soit Y un espace métrique. Le cône euclidien $C(Y)$ est $CAT(0)$ ssi Y est $CAT(1)$.*

Voir [BH, Theorem II.3.14] pour une démonstration.

6.3.2. *Critères combinatoires.* La dimension finie intervient dans la démonstration du théorème 6.17 quand on procède par récurrence pour montrer le résultat suivant.

Proposition 6.21. — *Un complexe sphérique droit de dimension finie est CAT(1) si, et seulement s'il est de drapeaux.*

I. Leary passe en dimension infinie en montrant que l'on peut se ramener au cas de la dimension finie [Lea]. Il s'appuie sur des résultats ultérieurs.

On présente deux conditions combinatoires équivalentes. La première est donnée par M. Gromov et la seconde est utilisée par M. Sageev [Sag].

Proposition 6.22. — *Soit X un complexe cubique. Sont équivalentes :*

(1) *Le link de tout sommet $v \in X$ est un complexe de drapeaux.*

(2) *Pour tout $(n-3)$-cube appartenant à trois $(n-2)$-cubes c_1, c_2, c_3 tels que pour tout (i,j), il existe un $(n-1)$-cube admettant c_i, c_j comme faces, alors c_1, c_2, c_3 font partie d'un même n-cube ;*

Démonstration. Supposons $n \geq 4$, sinon c'est clair. Soit v un sommet du $(n-3)$-cube, qui correspond à une $(n-4)$-cellule dans le link $L(v, X)$. Le link $L(v, X)$ contient des $(n-3)$ cellules correspondant à c_1, c_2, c_3, qui contiennent par hypothèse le squelette d'un $(n-1)$-simplexe, et donc le $(n-1)$ simplexe entier.

Pour la réciproque, on procède par récurrence sur le nombre de sommets d'un sous-graphe complet du link d'un sommet v. Si $n = 3$, alors cela signifie que v est un sommet adjacent à trois arêtes qui définissent deux à deux un carré. Donc ils bordent un cube. Supposons que chaque sous-graphe complet à n sommets forme le 1-squelette d'un n-simplexe du link de v. Prenons maintenant un sous-graphe complet à $(n+1)$-sommets $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Du coup, $(e_1, \ldots, e_{n-2})$ définit un $(n-2)$-cube qui appartient à trois $(n-1)$-cubes définis par $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1})$, $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_n)$ et $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n+1})$. Chacune de ses paires sont les faces d'un n-cube $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$, $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_{n+1})$ et $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_n, e_{n+1})$. Donc ces trois cubes font partie d'un $(n+1)$-cube correspondant à $(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n, e_{n+1})$.

■

6.3.3. *Isométries locales.*

Lemme 6.23. — Si X est un complexe cubique alors tout cube du complexe est plongé isométriquement dans X.

Démonstration. Soit Q un cube contenu dans un complexe cubique CAT(0). Prenons $x, y \in X$. D'après le lemme 6.9, il suffit de montrer que tout segment de Q est une géodésique locale dans X. Prenons donc $x, y \in Q$. Pour tout $z \in [x,y]$, on a $\varepsilon(z) \geq \min\{\varepsilon(x), \varepsilon(y)\}$ si x, y sont dans l'intérieur de Q. Du coup, $[x,y] \cap B_Q(z, \varepsilon(z)/4)$ est géodésique car toute autre courbe devrait quitter Q pour être plus courte, ce qui est absurde. Donc tout segment contenu dans l'intérieur de Q est géodésique. En passant à la fermeture, on en déduit que Q est isométriquement plongé dans X. ■

Le résultat suivant est tiré de [CW].

Proposition 6.24. — *Soit $f : Y \to X$ une application localement injective et cellulaire entre complexes cubiques avec X de courbure négative. Alors f est une isométrie locale si et seulement si, pour tout $y \in Y$, $f(Lk(y,Y))$ est complet dans $Lk(f(y),X)$: si l'image de sommets du link $Lk(y,Y)$ forme un simplexe dans $Lk(f(y),X)$, alors ils formaient un simplexe dans $Lk(y,Y)$.*

Démonstration. Tout d'abord, un sous-complexe complet d'un complexe de drapeaux est lui-même de drapeaux.

Supposons que f est une isométrie locale. En vertu de la proposition 6.8, on en déduit que Y est de courbure négative et le link de tout sommet de Y vérifie la condition de drapeaux. Comme f préserve la combinatoire des links, il s'ensuit que l'image du link de tout sommet de Y est complet dans le link de son image.

Réciproquement, on suppose que f est vérifie la condition combinatoire. Comme f préserve la combinatoire des links, on en déduit que Y vérifie la condition de drapeaux. En effet, tout sous-graphe complet Γ d'un link $\mathrm{Lk}(y,Y)$ est transformé en un sous-graphe complet de $\mathrm{Lk}(f(y),X)$, qui borde donc un simplexe. La condition de complétude implique que Γ est le 1-squelette d'un simplexe de $\mathrm{Lk}(y,Y)$. Il reste à vérifier que f est une isométrie locale. Pour cela, il suffit de montrer que l'image d'une géodésique de Y se transforme en une géodésique locale de X d'après la proposition 6.8. On remarque tout d'abord que chaque cube de Y est transformé en un cube de X de même dimension.

Soient γ une géodésique de Y et y un point de cette géodésique. On étudie deux cas. Si γ est contenu dans l'intérieur d'un cube Q au voisinage de y, alors $f(\gamma)$ est aussi géodésique au voisinage de $f(y)$ d'après le lemme 6.23. Si $y \in Q \cap Q'$, où Q et Q' s'intersectent le long d'une face propre de chacun d'eux et γ passe de Q à Q' en y, alors Q et Q' ne sont pas les faces d'un cube commun, sinon γ ne serait pas géodésique au voisinage de y. Par conséquent, $f(Q)$ et $f(Q')$ ne sont pas non plus les faces d'un cube de X par hypothèse sur f. Par conséquent $f \circ \gamma$ est géodésique au voisinage de y. ■

6.3.4. *Groupes d'Artin à angle droit et complexe de Salvetti.* On présente une classe d'exemples fondamentale dans la théorie.

Définition 6.25. — *Soit Σ un graphe (fini). On note $v_1,\dots,v_k$ les sommets de Σ. Le* groupe d'Artin à angle droit (RAAG) A_Σ *est le groupe de présentation*

$$A_\Sigma = \left\langle v_1,\dots,v_k : [v_i,v_j] = 1 \textit{ si } v_i \textit{ et } v_j \textit{ sont joints par une arête de } \Sigma \right\rangle.$$

A Noter que la définition de A_Σ spécifie un système de générateurs particulier.

Les groupes d'Artin à angle droit ont été introduits par Baudisch [Bau] sous le nom de groupes semilibres, mais ils sont aussi nommés *groupes de graphe*, ou groupes partiellement commutatifs.

La prochaine définition est due à Salvetti [Sal]. Soit Σ un graphe (fini). On construit un CW-complexe S_Σ^0 comme suit :

(1) S_Σ^0 a un seul sommet x_0 ;

(2) S_Σ^0 a une arête (orientée) e_v pour chaque sommet v de Σ (d'extrémités le seul sommet x_0) ;

(3) S_Σ^0 a un carré de bord $e_u e_v \bar{e}_u \bar{e}_v$ si les sommets u et v sont joints par une arête dans Σ ;

(4) pour $n > 2$, le n-squelette est défini par récurrence —en attachant un n-cube à chaque sous-complexe isomorphe au bord d'un n-cube qui ne borde pas déjà un n-cube.

Comme les cubes fermés ne sont pas plongés dans S_Σ^0, il ne s'agit pas d'un complexe cubique au sens que nous avons défini plus haut.

DÉFINITION 6.26 (complexe de Salvetti). — *Le complexe de Salvetti est le complexe S_Σ obtenu en prenant la subdivision barycentrique de S_Σ^0. Autrement dit, on coupe chaque n-cube en 2^n cubes en subdivisant chaque arête en deux.*

EXERCICE 6.27. — *Montrer que S_Σ vérifie la condition du link de Gromov et que le groupe fondamental du complexe de Salvetti S_Σ est le groupe d'Artin à angle droit A_Σ.*

Soit $\tilde{S}_\Sigma$ le revêtement universel de S_Σ. C'est un complexe cubique CAT(0) sur lequel A_Σ opère géométriquement.

6.4. **Hyperplans**

La notion d'hyperplans est d'abord développée par Sageev [Sag]. Elle joue un rôle prépondérant dans l'étude des complexes cubiques CAT(0) et de leurs groupes d'automorphismes. Ce paragraphe est largement inspiré des notes de Rolli [Rol], agrémentées de celles de Farley [Far].

Soit X un complexe cubique CAT(0). On définit la relation d'équivalence $\Box$ sur les arêtes (orientées) ainsi : on a $e \Box e'$ s'il existe des arêtes $e_0, \ldots, e_n$ telles que $e_0 = e$, $e_n = e'$ et $\{e_j, e_{j+1}\}$ sont parallèles, bordent un carré dans $X^{(2)}$ et définissent la même orientation.

REMARQUE 6.28. — Etant donnés $1 \leq j_1 < \ldots < j_{n-2} \leq n$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in \{(-1/2), 1/2\}$ on obtient le carré

$$Q \cap \{x_{j_k} = \varepsilon_k,\ k = 1, \ldots, n-2\}$$

de $Q = [(-1/2), (1/2)]^n$. On a $n(n-1)2^{n-3}$ carrés dans un n-cube, $n \geq 2$.

Dans un cube $Q = [(-1/2),(1/2)]^n$, on a $2n$ classes d'équivalence orientée et n non orientée. Chaque classe contient 2^{n-1} arêtes parallèles. Chaque sommet contient exactement une arête de chaque classe.

Une classe d'équivalence définit un *hyperplan combinatoire* de X.

6.4.1. *Hypercubes.* Pour $Q = [(-1/2),(1/2)]^n$, $n \geq 1$, et e_j un vecteur de base, on définit l'hypercube $H(Q,e_j) = Q \cap \{x_j = 0\}$. Si $e \subset Q \subset X$, alors on définit $H(Q,e)$ en identifiant Q au cube $[(-1/2),(1/2)]^n$ et e à un vecteur de base.

Si e et e' sont parallèles dans Q, alors $H(Q,e) = H(Q,e')$; de plus si $Q' \subset Q$ et e est une arête de Q' alors $H(Q',e) = H(Q,e) \cap Q'$.

A un hyperplan combinatoire $\xi \in X^{(1)}/\square$, on associe *l'hyperplan géométrique*

$$Y = Y_\xi = \cup_{e\in\xi} \cup_{Q\supset e} H(Q,e)\,.$$

Une arête de ξ est dite *duale* à Y.

Pour chaque n-cube, $H(Q,e)$ a la structure d'un $(n-1)$-cube, dont les sommets correspondent à la $\square$-classe de e dans Q.

On note $N(Y) \subset X$ le sous-complexe de X engendré par les cubes qui intersectent Y et $\partial N(Y)$ les cubes de $N(Y)$ qui sont disjoints de Y. On définit aussi le sous-complexe

$$X\backslash\backslash Y = X \setminus (N(Y) \setminus \partial N(Y))\,.$$

Le résultat fondamental des hyperplans est le suivant, démontré par la suite :

THÉORÈME 6.29. — *Un hyperplan est convexe et son complémentaire est formé de deux composantes connexes convexes.*

6.4.2. *Complexe des hypercubes.* Pour chaque cube Q de X, notons ξ_Q une $\square$-classe de Q. On définit *le complexe des hypercubes combinatoires* $\mathcal{H}_N(X)$ ainsi :

– Les cubes sont

$$\{(Q,\xi_Q),\ Q \subset X, \xi_Q \in Q^{(1)}/\square\}\,.$$

– On colle deux cubes (Q,ξ_Q) et $(Q',\xi_{Q'})$ si $Q \cap Q' \neq \emptyset$ et $\xi_Q \cap \xi_{Q'} \neq \emptyset$.

Le *complexe des hypercubes* $\mathcal{H}(X)$ $(\subset \mathcal{H}_N(X))$ correspond au complexe dont les cubes sont les $H(Q,\xi_Q)$ avec les recollements sous-jacents.

Notons $\iota : (Q,\xi_Q) \to Q(\subset X)$ la première projection.

On remarque que, pour toute composante connexe Z de $\mathcal{H}_N(X)$, il existe un unique hyperplan combinatoire ξ de X tel que $\iota(Z) = N(Y_\xi)$ et $\iota(\cup_{Q\subset Z}(H(Q,\xi_Q))) = Y_\xi$.

LEMME 6.30. — L'application $\iota : \mathcal{H}_N(X) \to X$ est une isométrie locale.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6.24, il suffit de vérifier que, pour chaque sommet v et chaque k-uplet de son link, si son image est un graphe complet du link de $\iota(v)$, alors c'était déjà le cas dans le link de v. Soient donc v un sommet, Z la composante connexe $\mathcal{H}_N(X)$ contenant v et définie par une classe ξ, et $e_1,\ldots,e_k$ des arêtes issues de

v telles que $\iota(e_j)$ forment un graphe complet du link de $\iota(v)$. Comme X est CAT(0), ce sont des arêtes d'un unique cube Q de X.

Tout d'abord, notons $e \in \xi$ l'arête issue de v définissant Z. Si l'une des e_j est e, alors Q contient e, donc est dans Z. Sinon, on note que tout cube (Q, ξ_Q) contenant v doit aussi contenir $e \in \xi_Q$; par suite, $\{e, e_j\}$ forme une arête de $\iota(\mathrm{Lk}(v, Z))$ pour chaque j, montrant que $\{e, e_1, \ldots, e_k\}$ est un graphe complet, donc borde un cube $Q' \supset Q$ et $Q' \subset Z$. ■

Le prochain énoncé reprend plus précisément la première partie du théorème 6.29.

COROLLAIRE 6.31. — *Soit Z une composante connexe de $\mathcal{H}_N(X)$ et Y l'hyperplan tel que $\iota(Z) = N(Y)$.*

(1) *L'application $\iota : Z \to N(Y)$ est une isométrie.*
(2) *Z est un complexe cubique CAT(0).*
(3) *Y est convexe et $Y \cap Q$ est ou bien vide, ou bien un unique hypercube de Q.*
(4) *Y admet une structure canonique de complexe cubique CAT(0).*
(5) *Les complexes $N(Y)$ et Z sont isométriques à $Y \times [(-1/2), 1/2]$.*
(6) *Pour tout $t \in [(-1/2), 1/2]$, $Y \times \{t\}$ est convexe.*

DÉMONSTRATION. Comme $\iota : Z \to X$ est une isométrie locale, la proposition 6.8 nous affirme que c'est une isométrie sur son image. Par conséquent, Z est $CAT(0)$. Dans chaque cube (Q, ξ_Q) de Z, on définit la reflexion $\rho : Q \to Q$ en posant $\rho(x,t) = (x, -t)$ où $(x,t) \in H(Q, \xi_Q) \times [-1/2, 1/2]$. Par construction de $\mathcal{H}_N(X)$, les réflexions se recollent pour définir une isométrie ρ sur chaque composante connexe de $\mathcal{H}_N(X)$ en vertu de la proposition 6.24. L'ensemble de ses points fixes est l'hyperplan géométrique associé à ξ, donc est aussi convexe et fermé. En prenant l'image par ι, on obtient le résultat pour Y. La structure cubique sur Y est induite par les hypercubes de $\mathcal{H}(X)$ provenant de Z. On vérifie comme ci-dessus que l'application $Y \times [(-1/2), 1/2)] \to Z$ définie cube par cube est une isométrie.

Pour le dernier point, on constate que si $|t| \leq 1/2$, alors on a une isométrie $Y \to Y \times \{t\} \subset Z$. ■

COROLLAIRE 6.32. — *Si γ est une géodésique qui intersecte en deux points distincts un hyperplan Y alors γ est entièrement contenue dans Y.*

DÉMONSTRATION. On suppose $\gamma : I \to X$ et on note $a = \inf\{t \in I,\ \gamma(t) \in Y\}$ et $b = \sup\{t \in I,\ \gamma(t) \in Y\}$. Par convexité de Y et unique géodésie de X, on a $\gamma(]a, b[) \subset Y$.

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a[\subset I$ et $\gamma(]a - \varepsilon, a[) \cap Y = \emptyset$. Comme les cubes sont euclidiens, on ne peut trouver de cube Q tel que $\gamma(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[)[\subset Q$. Par conséquent, $\gamma(a)$ est à l'intersection de deux cubes Q et Q' de $N(Y)$, avec $\gamma(]a - \varepsilon, a[) \subset Q'$ et $\gamma([a, a + \varepsilon[) \subset Q$. Forcément Q et Q' sont de dimension au moins 2, $Q \cap Q'$ de dimension au moins 1 contenant les cubes engendrés par $\xi_Q \cap \xi_{Q'}$, et $Q \cup Q'$ est localement convexe au voisinage de $\gamma(a)$: ceci implique $\gamma(]a-\varepsilon,a[)\subset Y$. On procède de même au voisinage de b. ■

6.4.3. *Demi-espaces.* L'objet de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante qui achèvera la démosntration du théorème 6.29 et d'en tirer quelques corollaires.

PROPOSITION 6.33. — *Si Y est un hyperplan d'un complexe cubique CAT(0) X, alors $X\setminus Y$ et $X\setminus\setminus Y$ sont tout deux composés de deux composantes connexes qui sont convexes.*

Les composantes connexes de $X\setminus Y$ sont des *demi-espaces.*

On utilise la notion de projection adaptée ici au cadre CAT(0).

PROPOSITION 6.34. — *Soient X un espace CAT(0) et $Z\subset X$ un sous-espace convexe et complet. Pour tout $x\in X$, il existe un unique $z=p(x)\in Z$ tel que $d(x,Z)=d(x,z)$. De plus, l'application $p:X\to Z$ est 1-Lipschitz et, pour tout $y\in[x,p(x)]$, on a $p(y)=p(x)$.*

DÉMONSTRATION. Soient $x\in X$ et $(z_n)_n$ une suite de Z telle que $\lim d(x,z_n)=d(x,Z)$. Nous allons montrer que (z_n) est une suite de Cauchy : cela montrera l'existence et l'unicité de la projection. On se fixe p,q assez grands, ainsi qu'un triangle de comparaison $(\bar x,\bar z_p,\bar z_q)$. Notons y le milieu de $[z_p,z_q]$ et $\bar y$ son représentant. L'identité du parallèlogramme implique

$$(1/2)d(\bar z_p,\bar z_q)^2=d(\bar x,\bar z_p)^2+d(\bar x,\bar z_q)^2-2d(\bar x,\bar y)^2$$

donc

$$d(z_p,z_q)^2\le 2[d(x,z_p)^2+d(x,z_q)^2-2d(x,y)^2]\,.$$

Si $\varepsilon>0$ est fixé, on peut supposer que $d(x,z_p),d(x,z_q)\le d(x,Z)+\varepsilon$ de sorte que

$$d(z_p,z_q)^2\le 4[(d(x,Z)+\varepsilon)^2-d(x,Z)^2]\le 4\varepsilon(2d(x,Z)+\varepsilon)$$

puisque $y\in Z$ par convexité. Donc la projection de x est bien définie.

Si $y\in[x,p(x)]$, alors on obtient

$$d(x,p(y))\le d(x,y)+d(y,p(y))\le d(x,y)+d(y,p(x))\le d(x,p(x))$$

donc $p(y)=p(x)$ par unicité.

Enfin, prenons $x,y\in X$, et montrons que $d(p(x),p(y))\le d(x,y)$. Pour cela, on considère deux triangles de comparaison pour $(x,y,p(x))$ et $(y,p(x),p(y))$ que l'on recolle isométriquement le long de $[\bar y,\overline{p(x)}]$. Il suffit de montrer que les angles du quadrilatère sont obtus aux points $\overline{p(x)}$ et $\overline{p(y)}$. Au point $\overline{p(y)}$, cela vient du fait que $d(y,p(y))\le d(y,p(x))$. Quant à l'autre point, prenons $\bar w\in[\bar x,\overline{p(y)}]\cap[\bar y,\overline{p(x)}]$ qui correspond à $w\in[y,p(x)]$. On a

$$d(x,p(y))\le d(x,w)+d(w,p(y))\le d(\bar x,\bar w)+d(\bar w,\overline{p(y)})=d(\bar x,\overline{p(y)})\,.$$

Donc $d(\bar x,\overline{p(x)})\le d(\bar x,\overline{p(y)})$, ce qui nous permet de conclure. ■

LEMME 6.35. — Soit e une arête ; notons $p : X \to e$ la projection sur e et Y l'hyperplan défini par e. Si $m = Y \cap e$, alors $p^{-1}(\{m\}) = Y$.

DÉMONSTRATION. Soit Q un cube contenant e. Pour tout $x \in Q$ et par géométrie élémentaire (!), on a $p(x) = m$ si et seulement si $x \in H(Q,e)$.

Soit $x \in Y$ et considérons le triangle $(x, p(x), m)$: si $p(x) \neq m$, alors l'angle en m est $\pi/2$ et plus grand en $p(x)$: impossible, donc $p(x) = m$.

Soit $x \in X$ et supposons $p(x) = m$. On considère le segment $[x,m]$: il intersecte l'intérieur d'un cube Q qui contient e comme arête. Là encore, la géométrie élémentaire montre que $[x,m] \cap Q \subset H(Q,e)$, donc $x \in Y$. ∎

DÉMONSTRATION. (Prop. 6.33) Tout d'abord, avec les notations du lemme 6.35, on a $p(X \setminus Y) = e \setminus \{m\}$. Comme la projection est continue, on en déduit que $X \setminus Y$ n'est pas connexe. De plus, pour tout $x \notin Y$, le segment $[x, p(x)]$ ne peut pas couper Y en un point y, car on aurait $p(x) = p(y) = m$. Donc ce segment est contenu dans une composante connexe de $X \setminus Y$. Donc $X \setminus Y$ a au plus deux composantes.

Soient x, y dans une même composante connexe et $[x,y]$ le segment géodésique. Notons que ce segment ne peut intersecter Y en plus d'un point en vertu du corollaire 6.32. S'il intersecte Y, ce n'est donc qu'en un seul point ; il ne peut traverser Y car les projections seraient dans des composantes différentes de $e \setminus \{m\}$. Mais il doit traverser un hyperplan parallèle $Y \times \{t\}$, ce qui est aussi impossible par le corollaire 6.31. Ceci montre que les composantes de $X \setminus Y$ sont convexes.

D'après le corollaire 6.31, on sait aussi que $N(Y)$ est CAT(0) donc convexe. Cela implique que $p(N(Y)) = e$ et que $X\setminus\setminus Y = p^{-1}(e \cap X^{(0)})$. Ceci implique que $X\setminus\setminus Y$ a deux composantes connexes. De plus, ce corollaire nous dit aussi que les composantes de $\partial N(Y)$ sont convexes, donc les composantes de $X\setminus\setminus Y$ sont convexes aussi. ∎

6.4.4. *Intersections.* On étudie les propriétés d'intersection d'hyperplans et de demi-espaces.

PROPOSITION 6.36. — *Soient $Y_1, \ldots, Y_k$ des hyperplans distincts qui s'intersectent deux à deux. Alors $\cap Y_j$ est non vide.*

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence : supposons d'abord $k = 3$. Si l'intersection est vide, alors on peut former un triangle avec les sommets dans deux hyperplans : les angles d'Alexsandroff sont tous les trois droits, ce qui est impossible dans un espace CAT(0).

Supposons que la proposition soit établie pour k hyperplans, On considère maintenant $k+1$ hyperplans. Les intersections $Y_j \cap Y_{k+1}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, forment des hyperplans du complexe cubique Y_{k+1} qui s'intersectent deux à deux d'après le cas $k = 3$. Donc l'hypothèse de récurrence implique que $\cap(Y_j \cap Y_{k+1})$ est non vide. ∎

COROLLAIRE 6.37. — *Si $Z_1, \ldots, Z_k$ sont des demi-espaces qui s'intersectent deux à deux, alors $\cap_{1\le j\le k} Z_j$ est non vide.*

DÉMONSTRATION. On ne perd rien à supposer qu'aucun demi-espace n'est inclus dans un autre. Notons $Y_1, \ldots, Y_k$ les hyperplans qui les bordent. Si on avait $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, alors on aurait $Z_i \subset Z_j$, $Z_j \subset Z_i$ ou $Z_i \cap Z_j = \emptyset$. Donc la proposition 6.36 implique que $\cap Y_j \neq \emptyset$. Considérons un cube Q qui contient un point d'intersection. Comme chaque hyperplan est défini par une arête, ils sont tous orthogonaux deux à deux dans Q. On peut supposer, dans Q, que Z_j est défini par $\{x_j > 0\}$. Donc l'intersection des demi-espaces est non vide.■

Cette démonstration montre que ce corollaire est aussi vrai pour des demi-espaces combinatoires.

COROLLAIRE 6.38. — *Si X est de dimension finie, alors il existe au plus* $\dim X$ *hyperplans qui s'intersectent deux à deux.*

6.5. Métrique combinatoire

On suit de près l'exposition de Haglund [Hag].

Soit X un complexe cubique CAT(0). On définit la *distance combinatoire* d_c sur $X^{(0)}$ comme la distance qui consiste à ne calculer que les longueurs de chemins d'arêtes. On notera un chemin d'arêtes $[v_0, \ldots, v_n]$, où les v_j désignent les sommets traversés dans cet ordre et on écrira $e_j = [v_{j-1}, v_j]$ pour les arêtes.

On dit qu'un sous-complexe Z de X est *combinatoirement convexe* si toute d_c-géodésique joignant deux sommets de Z est contenue dans Z.

On dit que deux hyperplans Y et Y' sont *intertangents* s'il existe des arêtes e et e' duales à Y et Y' qui s'intersectent et dont les extrémités sont à distance deux (ces arêtes ne sont pas au bord d'un même carré).

LEMME 6.39. — Deux hyperplans intertangents sont disjoints.

Le corollaire 6.31 montre qu'un hyperplan n'a pas *d'autotangence.*

DÉMONSTRATION. Si jamais ils s'intersectent en un point x, alors on considère le triangle de sommets x, $y \in e \cap Y$ et $y' \in e' \cap Y'$: c'est un triangle dont tous les angles sont droits : impossible. ■

COROLLAIRE 6.40. — *Soit X un complexe cubique CAT(0).*

(1) *La distance combinatoire entre deux points est le nombre d'hyperplans qui séparent ces points.*

(2) *Un chemin d'arêtes est géodésique s'il est localement injectif et s'il n'intersecte un hyperplan au plus une seule fois.*

(3) *Les demi-espaces combinatoires* $X\backslash\backslash Y$ *sont combinatoirement convexes.*

(4) *Si* Y *est un hyperplan,* $\partial N(Y)$ *est composé de deux composantes disjointes combinatoirement convexes.*

Soient Y un hyperplan et $\gamma = [v_0, \ldots, v_n] \subset N(Y)$, $n \geq 2$, un chemin d'arêtes tel que e_1 soit duale à Y. Un *mouvement élémentaire de* γ *par rapport à* Y est le remplacement de γ par le chemin $\gamma' \subset N(Y)$ de même extrémités ainsi construit (on rappelle que $\rho : N(Y) \to N(Y)$ désigne la réflexion par rapport à Y de $N(Y)$) :
– si $e_1 \Box (\pm e_n)$, alors $\gamma' = [\rho(v_1), \ldots, \rho(v_{n-1})]$;
– sinon, $\gamma' = [\rho(v_1), \ldots, \rho(v_n), v_n]$.

DÉMONSTRATION. Soit γ un chemin d_c-géodésique dont les extrémités sont contenues dans le même demi-espace défini par Y. Supposons qu'il traverse Y. On peut alors se ramener au cas où les extrémités sont séparées du reste de γ par Y. S"il reste contenu dans $N(Y)$, alors le mouvement élémentaire par rapport à Y réduira la longueur de γ d'au moins deux. Sinon, on peut trouver un hyperplan Y' intertangent à Y traversé par γ. D'après le lemme 6.39, γ doit retraverser au moins une fois cet hyperplan. En itérant, on arrivera à la situation précédente. Du coup, les demi-espaces sont combinatoirement convexes.

Ceci implique qu'une géodésique combinatoire ne coupe un hyperplan qu'au plus une fois. Les hyperplans coupés sont en bijection avec les arêtes du segment, donc la distance entre deux points est bien le nombre d'hyperplans qui séparent ces points.

Si un chemin d'arêtes est localement injectif et s'il n'intersecte un hyperplan au plus une seule fois, alors le nombre d'hyperplans qui séparent les extrémités sont ceux qui coupent ce chemin, donc il est géodésique.

Enfin, la convexité des deux composantes de $\partial N(Y)$ provient du fait qu'un chemin géodésique ne peut traverser deux fois un hyperplan et qu'il n'y a pas d'intertangence. ■

COROLLAIRE 6.41. — *Le* 1*-squelette d'un complexe cubique CAT(0)* X *est un graphe médian : pour tous* $x, y, z \in X^{(0)}$*. il existe un unique* $m \in X^{(0)}$ *tel que*

$$d(x,y) = d(x,m) + d(m,y), \quad d(x,z) = d(x,m) + d(m,z), \quad d(y,z) = d(y,m) + d(m,z)\,.$$

Chepoi montre en fait qu'un graphe médian est le 1-squelette d'un complexe cubique CAT(0) [?] ; voir aussi le prochain chapitre.

DÉMONSTRATION. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans qui séparent $\{x, y, z\}$: ils sont en nombre fini d'après le corollaire 6.40. Pour chaque hyperplan $Y \notin \mathcal{H}$ qui ne sépare pas $\{x, y, z\}$, on note Z_Y le demi-espace combinatoire qui les contient et on considère $Z = \cap Z_Y$: c'est un complexe cubique CAT(0).

La collection d'hyperplans de Z est $\mathcal{H}$. Pour chaque $Y \in \mathcal{H}$, il existe un unique demi-espace Z_Y qui contient deux des trois points. Ces demi-espaces s'intersectent donc deux à deux dans Z qui est CAT(0) et le corollaire 6.37 implique que $\cap Z_Y$ est non vide. Il ne contient qu'un seul point que nous noterons m. On remarque que tout hyperplan qui sépare x de $\{y, z\}$ sépare aussi x de m. Soit Y est un hyperplan qui sépare x de m ; s'il ne sépare par $\{x, y\}$, alors il ne peut séparer non plus z par construction de m. Mais un tel hyperplan n'intersecte pas Z, donc il sépare x de $\{y, z\}$. En faisant le même raisonnement avec y et z, on en déduit que m est médian. ■

LEMME 6.42. — Soient $x, y \in X^{(0)}$ deux sommets d'un complexe cubique CAT(0). Alors il existe un segment géodésique combinatoire reliant x à y contenu dans les mêmes cubes que $[x, y]$.

DÉMONSTRATION. Notons $Q_1, \ldots, Q_n$ les cubes dont l'intérieur intersecte $[x, y]$ donnés par le fait 6.14, muni de la subdivision (s_j) ; on écrit $x_j = \gamma(s_j)$.

On note $v_0 = x$. On associe des sommets (v_j) associés par récurrence. Supposons v_{j-1} construit ; pour chaque hypercube $H(Q, e)$ de Q_j, on associe un demi-espace de la manière suivante :

– si $x_j \notin H(Q_j, e)$, on considère le demi-espace Z_e^j dual à e contenant x_j ;
– si $x_j \in H(Q_j, e)$, alors on considère le demi-espace Z_e^j dual à e contenant v_{j-1}.
  Remarquons que x_{j-1} ne peut appartenir au même hyperplan car γ serait contenu dedans en vertu du corollaire 6.32 (impossible puisque ses extrémités en sont disjoints).

On choisit alors v_j comme étant l'unique sommet de Q_j de l'intersection des Z_e^j. On a donc $v_n = y$.

On complète $\{v_0, \ldots, v_n\}$ par des sommets pour obtenir un chemin d'arêtes ainsi : on choisit dans $Q_j^{(0)}$ un segment géodésique reliant v_{j-1} à v_j.

On affirme que la concaténation de ces géodésiques combinatoires est bien un d_c-segment. Il suffit pour cela de vérifier que chaque hyperplan n'est intersecté au plus qu'une seule fois. Si Y intersecte ce segment dans un cube Q_j, alors il sépare v_{j-1} de v_j. Par construction, $x_j \notin Y$; si x_{j-1} n'est pas dans Y non plus, alors Y sépare $\{x_{j-1}, x_j\}$; sinon, il sépare $\{x_{j-2}, x_j\}$. Or un segment géodésique n'intersecte Y qu'au plus une fois. ■

COROLLAIRE 6.43. — *Si X est de dimension finie, alors la distance CAT(0) et la distance combinatoire sur $X^{(0)}$ sont quasi-isométriques.*

DÉMONSTRATION. Pour tous sommets $x, y \in X^{(0)}$, on a $d(x, y) \leq d_c(x, y)$. Dans un cube, de dimension n, on a, d'après le théorème de Pythagore, $d_c \leq \sqrt{n} d$. Donc le chemin construit dans le lemme 6.42 est de longueur au plus $\sqrt{\dim X} d(x, y)$. ■

RÉFÉRENCES

[Bau] A. Baudisch. Subgroups of semifree groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **38**(1981), 19–28.

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[ch6 :Che] Victor Chepoi. Graphs of some CAT(0) complexes. *Adv. in Appl. Math.* **24**(2000), 125–179.

[CW] John Crisp and Bert Wiest. Embeddings of graph braid and surface groups in right-angled Artin groups and braid groups. *Algebr. Geom. Topol.* **4**(2004), 439–472.

[Far] Dan Farley. A proof of Sageev's Theorem on hyperplanes in CAT(0) cubical complexes. `arXiv:0909.0968 [math.GT]`, 2009.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Hag] Frédéric Haglund. Finite index subgroups of graph products. *Geom. Dedicata* **135**(2008), 167–209.

[Lea] Ian J. Leary. A metric Kan-Thurston theorem. *J. Topol.* **6**(2013), 251–284.

[Rol] Pascal Rolli. Notes on CAT(0) cube complexes. Preprint, 2012.

[Sag] Michah Sageev. Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes. *Proc. London Math. Soc. (3)* **71**(1995), 585–617.

[Sal] M. Salvetti. Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbf{C}^N$. *Invent. Math.* **88**(1987), 603–618.