5. INTERMÈDE : GROUPES DE SURFACE ET LEURS SOUS-GROUPES

Ce chapitre suit de près [Sco1, Sco2].

Soit X une surface. Une sous-surface $Y \subset X$ est *incompressible* si l'injection canonique $\iota : Y \hookrightarrow X$ induit une injection $\iota_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$. Si $X \setminus Y$ est une réunion de deux ouverts disjoints U et V, alors, en posant $X_U = Y \cup U$ et $X_V = Y \cup V$, on obtient un scindement de $\pi_1(X)$ au-dessus de $\pi_1(Y)$.

Le propos de ce chapitre est la réciproque de cette situation. Disons qu'un sous-groupe H de $\pi_1(X)$ est *géométrique* s'il représente le groupe fondamental d'une sous-surface.

Tout sous-groupe de type fini du groupe fondamental d'une surface, est-il géométrique ? Si le groupe fondamental de X se scinde au-dessus de H, ce scindement provient-il d'une sous-surface ? Les réponses de P. Scott sont positives, si on s'autorise à passer à un revêtement de degré fini.

Le prochain paragraphe étudie la propriété algébrique de séparabilité des sous-groupes avec son lien avec la topologie. Ensuite, on étudie les surfaces et surtout celles qui admettent une structure hyperbolique. Enfin, le dernier paragraphe montre que l'on peut rendre géométrique tout sous-groupe quitte à prendre un revêtement fini.

Exercice 5.1. — *Montrer qu'une sous-surface est incompressible si, et seulement si, toute composante du complémentaire n'est pas simplement connexe.*

5.1. Séparabilité et topologie profinie

Définition 5.2 (Topologie profinie). — *Soit G un groupe. La topologie profinie de G est la topologie dont les ouverts sont les réunions de classes gG_0, pour $g \in G$ et $G_0 < G$, un sous-groupe d'indice fini. Un sous-ensemble S de G est dit séparable si S est fermé dans la topologie profinie de G.*

Munissons G de la topologie profinie. Le groupe opère par translation à gauche par homéomorphismes.

Exercice 5.3. — *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le sous-groupe H est séparable.*

(2) *Pour tout $g \in G \setminus H$, il existe $G' < G$ d'indice fini qui contient H mais pas g.*

(3) *Pour tout $g \in G$, il existe un morphisme $\varphi : G \to F$ dans un groupe fini tel que $\varphi(g) \notin \varphi(H)$.*

En passant au complémentaire dans la définition ci-dessus on retrouve la définition « classique » de séparabilité : un sous-groupe $H < G$ est séparable si H est l'intersection des sous-groupes d'indice fini de G qui le contiennent.

On s'intéresse aux propriétés suivantes.

Définition 5.4 (finitude résiduelle et ses extensions). — *Un groupe G est résiduellement fini si le singleton constitué de l'élément neutre est fermé dans la topologie profinie de G. Le groupe G est résiduellement fini étendu (ERF) si tous ses sous-groupes sont séparables. On dit que G est localement résiduellement fini étendu (LERF) si ses sous-groupes de type fini sont séparables.*

Un groupe G est résiduellement fini si et seulement si sa topologie profinie est séparée. Noter qu'un groupe linéaire est résiduellement fini.

Lemme 5.5. — Soit G un groupe résiduellement fini, LERF ou ERF. Alors ses sous-groupes sont aussi résiduellement finis, LERF ou ERF respectivement et si G est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe G', alors G' est aussi résiduellement fini, LERF ou ERF respectivement.

Démonstration. Soit G'' un sous-groupe de G. Si H est un sous-groupe éventuellement de type fini de G'', alors c'est aussi le cas dans G, donc on peut le séparer de tout élément de G'' par un sous-groupe K d'indice fini dans G. Par conséquent, $K \cap G''$ est aussi d'indice fini dans G'' et H est séparable dans G''. Cela montre que si G est un groupe résiduellement fini, LERF ou ERF, alors ses sous-groupes sont aussi résiduellement finis, LERF ou ERF respectivement.

Supposons maintenant que G est un sous-groupe d'indice fini dans G' et que H est un sous-groupe éventuellement de type fini de G', tel que $H \cap G$ est séparable. On écrit $G' = \cup_{g \in T} gG$, où T est une transversale (finie) de G'/G. On peut supposer que si $g \in T$ et $gG \cap H \neq \emptyset$, alors $g \in H$. On écrit alors $T = T_H \cup T'$, avec $T_H = T \cap H$.

On a donc
$$H = \cup_{g \in T_H}(gG \cap H) = \cup_{g \in T_H} g(G \cap H)\,.$$
Or $G \cap H$ est fermé dans la topologie profinie de G, donc de G' aussi puisque G est d'indice fini dans G' ; du coup, $g(G \cap H)$ est aussi fermé car g opère par homéomorphisme. Par suite, H est une réunion finie de fermés de G', donc est fermé. Il vient que H est séparable dans G'.

Notons que $H \cap G$ est de type fini si H l'est car $H \cap G$ est d'indice fini dans H. Par conséquent, G' est aussi résiduellement fini, LERF ou ERF respectivement si c'est le cas de G. ∎

Pour ce qui nous concerne, l'importance de cette notion mise en évidence par Peter Scott provient de son interprétation géométrique :

Proposition 5.6. — *Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe G. Si H est un sous-groupe de G, on note $X_H = \tilde{X}/H$, $p_H : \tilde{X} \to X_H$ et $\widehat{p} : X_H \to X$ les revêtements associés. Un sous-groupe H de G est séparable si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X_H$, il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ qui factorise $p_H : X_H \to X$ tel que le revêtement $\widehat{p}' : X_H \to X'$ soit injectif sur K.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que la propriété géométrique est vérifiée. Prenons $x \in \tilde{X}$, $g \in G \backslash H$ et $K = \{p_H(x), p_H(g(x))\}$. Il existe donc un revêtement fini $p' : X' \to X$ qui factorise $p_H : X_H \to X$ tel que le revêtement $\widehat{p'} : X_H \to X'$ soit injectif sur K. L'espace X' est donc un quotient $\tilde{X}/G'$, avec $H < G' < G$ et G' d'indice fini dans G. Cela implique par ailleurs que g ne représente pas un lacet de X', donc est séparé de H dans G'.

Réciproquement, supposons que H es séparable. Prenons $K \subset X_H$. Soit $L \subset \tilde{X}$ tel que $p_H(L) = K$. Comme K est compact, on peut choisir L compact aussi. Du coup, comme l'action de G est proprement discontinue sur $\tilde{X}$, l'ensemble $E = \{g \in G,\ g(L) \cap L \neq \emptyset\}$ est fini. On utilise que H est séparable pour trouver un sous-groupe d'indice fini G' de G qui contient H mais pas $E \setminus H$. Notons $X' = \tilde{X}/G'$; on a $H < G' < G$ donc $p' : X' \to X$ est un revêtement fini qui factorise $p_H : X_H \to X$. De plus, si on a $g(L) \cap L \neq \emptyset$ et $g \in G'$, alors on a $g \in H$ par construction. Cela implique que le revêtement $\widehat{p'} : X_H \to X'$ est injectif sur K. ■

On généralise la notion de surface incompressible comme suit.

DÉFINITION 5.7. — *Une application continue $f : Y \to X$ entre espaces connexes par arcs et semilocalement simplement connexes est dite géométriquement incompressible si l'application induite aux revêtements universels de Y dans X est un plongement.*

Appliqué au sous-groupe H image du groupe fondamental d'un espace compact Y par une application géométriquement incompressible $Y \to X$, on obtient le corollaire suivant qui est exactement ce qui manque pour rendre géométrique un sous-groupe d'un groupe fondamental.

COROLLAIRE 5.8. — *Soit $f : Y \to X$ une application géométriquement incompressible entre espaces compacts, connexes par arcs et semilocalement simplement connexes. Si $\pi_1(Y)$ est séparable dans $\pi_1(X)$ alors il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ tel que $f : Y \to X$ se relève à X' en une injection.*

DÉMONSTRATION. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ les revêtements universels de X et Y et $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ le relèvement de f. Soit X_Y le revêtement de groupe $\pi_1(Y)$ au-dessus de X ; notons $p_Y : \tilde{X} \to X_Y$ son revêtement universel. Notons $K = (p_Y \circ \tilde{f})(\tilde{Y})$. Comme f est géométriquement incompressible, K est homéomorphe à Y (l'application $\tilde{f}$ commute avec l'action du $\pi_1(Y)$). On applique la proposition précédente à K : il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ qui factorise $X_Y \to X$ tel que le revêtement $\widehat{p'} : X_H \to X'$ soit injectif sur K. Cela signifie que f se relève à X' en une injection. ■

5.2. **Uniformisation de surfaces**

Un traitement exhaustif des surfaces peut se trouver dans l'ouvrage d'Ahlfors et Sario [AS]. Nous nous concentrons selon leur suggestion aux surfaces qui sont connexes et surtout qui admettent une base dénombrable de la topologie, ce qui implique qu'elles admettent des triangulations.

5.2.1. *Groupes fondamentaux de surfaces.* On dit qu'une surface est *close* si elle est compacte et sans bord.

On a la classification suivante.

THÉORÈME 5.9. — *Le groupe fondamental d'une surface non close est libre. Si la surface S est close, on est dans un des cas suivants, cf. le théorème 2.18.*
- *Si S est orientable, alors S est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ ou à la somme connexe S_g de g tores, $g \geq 1$. Dans ce cas, on $\pi_1(S) \simeq < a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g | [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] >$.*
- *Si S n'est pas orientable, alors S est homéomorphe à la somme connexe N_h de h plans projectifs, $h \geq 1$. Dans ce cas, on $\pi_1(S) \simeq < a_1, \ldots, a_h | a_1^2 \ldots a_h^2 >$.*

PROPOSITION 5.10. — *Soit X une surface non close de groupe fondamental de type fini. Pour tout compact K de X, il existe une sous-surface compacte $Y \hookrightarrow X$ contenant K dont l'injection induit un isomorphisme entre groupes fondamentaux.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ un point base, et soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ des lacets basés en x engendrant $\pi_1(X, x)$. On considère un voisinage régulier V de $K \cup (\cup \gamma_j)$, qui définit donc une surface à bord. Quitte à rajouter des rectangles, on peut supposer V connexe. L'injection $V \hookrightarrow Y$ induit une surjection $\pi_1(V, x) \to \pi_1(X, x)$. Notons que ∂V est compact, donc $X \setminus V$ a un nombre fini de composantes connexes. On ajoute à V les composantes connexes de $X \setminus V$ qui sont homéomorphes à un disque. On note Y le résultat obtenu : c'est une surface compacte. L'injection $Y \hookrightarrow X$ induit toujours une surjection entre groupes fondamentaux. Cette surjection est maintenant une injection par le théorème de van Kampen. ■

COROLLAIRE 5.11. — *Soit X une surface. Un sous-groupe H de $\pi_1(X)$ de type fini est séparable si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X_H = \tilde{X}/H$, il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ qui factorise : $p_H : X_H \to X$ telle que le revêtement $\widehat{p'} : X_H \to X'$ soit injectif sur K et tel que H soit géométrique dans X'.*

DÉMONSTRATION. Comme H est de type fini, la proposition 5.10 nous produit une sous-surface compacte Y de X_H de groupe fondamental isomorphe à H qui contient K. D'après la proposition 5.6, H est séparable si, et seulement si, il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ qui factorise : $p_H : X_H \to X$ tel que le revêtement $\widehat{p'} : X_H \to X'$ soit injectif sur Y. ■

PROPOSITION 5.12. — *Soit $g \geq 2$. Alors il existe un revêtement fini $S_g \to S_2$. Pour $h \geq 1$, il existe aussi un revêtement fini $S_{h-1} \to N_h$.*

DÉMONSTRATION. La première famille de revêtements provient d'un épaississement des bouquets de cercles et des revêtements construits au corollaire 3.19.

Pour la seconde famille, on considère les revêtements d'orientation : on note $M_h = N_h \times \{\pm 1\}$ et on considère la première projection $p : M_h \to N_h$ définie par $(x, \varepsilon) \mapsto x$ qui définit clairement un revêtement d'ordre deux. Comme N_h est non-orientable, on en déduit que M_h est connexe, compact, orientable et sans bord. Pour savoir à quelle surface S_g la surface M_h correspond, un argument de caractéristique d'Euler suffit.

Une autre manière de définir le revêtement double est de plonger S_g dans $\mathbb{R}^3$ sous la forme d'une chaîne de tores de sorte que 0 soit un centre de symétrie. L'application $\iota : x \mapsto (-x)$ de $\mathbb{R}^3$ préserve S_g et opère sans point fixe. C'est une involution qui renverse l'orientation, donc S_g/ι est une surface close non-orientable. ■

5.2.2. *Pavages du plan hyperbolique et surfaces hyperboliques.* On s'inspire de [dR].

On considère un domaine convexe $\mathcal{D}$ du plan hyperbolique bordé par des sous-intervalles non dégénérés fermés (mais non nécessairement compacts) de géodésiques $\gamma_j,\ j \in J$, paramétrés dans l'ordre cyclique. On suppose que ces sous-géodésiques se coupent à angle droit si elles se coupent.

On note ρ_j la réflexion (hyperbolique) par rapport à la géodésique γ_j et on note G le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^2$ engendré par $\{\rho_j,\ j \in J\}$.

THÉORÈME 5.13. — *Le domaine $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental de l'action de G ; son orbite sous l'action de G définit un pavage de $\mathbb{H}^2$.*

Nous verrons ensuite comment montrer que la plupart des surfaces closes peuvent être munies d'une structure hyperbolique.

DÉMONSTRATION. La démonstration est proche de celle de la proposition 3.20. Notons $J' \subset J$ le sous-ensemble des indices tel que $\gamma_j \cap \gamma_{j+1}$ est un point du bord de $\mathcal{D}$ (qui correspond donc à un angle droit. On remarque que, comme l'intersection est à angle droit, on a $\rho_j \circ \rho_{j+1} = \rho_{j+1} \circ \rho_j$ pour $j \in J'$.

On note donc H le groupe de présentation $< s_j, j \in J | s_j^2, [s_j, s_{j+1}], j \in J' >$ que l'on munit de la topologie discrète. On construit une surface pavée par $\mathcal{D}$ et on montrera que cette surface est isométrique à $\mathbb{H}^2$ et que H est isomorphe à G.

On construit $X = \mathcal{D} \times H$ que l'on munit de la relation d'équivalence $\simeq$: engendrée par $(z,h) \simeq (z, hs_j)$ pour $j \in J$ et $z \in \partial\mathcal{D} \cap \gamma_j$. On note $\widehat{X} = X/\simeq$, qui a la structure d'une surface hyperbolique. En effet, on a trois types de carte à définir pour (z,h) :

(1) si z est un point intérieur à $\mathcal{D}$, alors on a une carte naturelle en regardant $(z,h) \mapsto z$;

(2) si z est à l'intérieur d'une géodésique γ_j, alors celle-ci est adjacente à deux copies $\mathcal{D} \times \{h\} \cup \mathcal{D} \times \{hs_j\}$ que l'on envoie sur $\mathcal{D} \cup \rho_j(\mathcal{D})$;

(3) si z est un sommet de $\gamma_j \cap \gamma_{j+1}$, alors le point appartient à 4 copies

$$\mathcal{D} \times \{h\} \cup \mathcal{D} \times \{hs_j\} \cup \mathcal{D} \times \{hs_{j+1}\} \cup \mathcal{D} \times \{hs_j s_{j+1}\}$$

que l'on envoie sur $\mathcal{D} \cup \rho_j(\mathcal{D}) \cup \rho_{j+1}(\mathcal{D}) \cup (\rho_j \circ \rho_{j+1})(\mathcal{D})$.

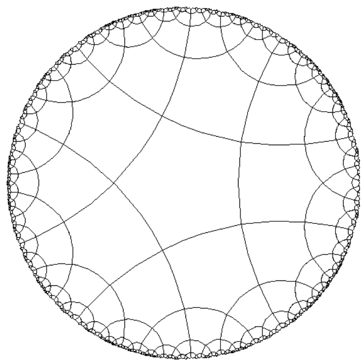
Le groupe H opère sur $\widehat{X}$ par $h' \cdot (z,h) = (z, h'h)$: il s'agit d'une action par isométries. Par construction, $\mathcal{D} \times \{e\}$ est un domaine fondamental. On en déduit que $\widehat{X}$ est complet.

On définit $\varphi : H \to G$ en posant $\varphi(s_{j_1} \dots s_{j_k}) = \rho_{j_1} \dots \rho_{j_k}$. Ce morphisme est bien défini car les relations de H sont des relations de G. L'application $X \to \mathbb{H}^2$ définie par $(z, h) \mapsto \varphi(h)(z)$ induit une isométrie locale $f : \widehat{X} \to \mathbb{H}^2$. Comme $\widehat{X}$ est complet, on en déduit que f est surjective. Donc, f est un revêtement sur $\mathbb{H}^2$. Or $\mathbb{H}^2$ est simplement connexe, donc f est un homéomorphisme, donc une isométrie. Du coup, G et H sont aussi isomorphes. ■

Corollaire 5.14. — *Il existe un pavage de $\mathbb{H}^2$ par pentagones réguliers à angle droit. Le groupe du pavage est*

$$\Gamma =< s_j,\ j \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} | s_j^2, [s_j, s_{j+1}], j \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} > \ .$$

Démonstration. Dans le modèle du disque unité, on considère les cinq rayons joignant l'origine aux racines cinquième de l'unité. A chaque $t > 0$, on considère les points de chaque rayon à distance hyperbolique t de l'origine. Ils définissent les sommets d'un pentagone régulier d'angle α_t, où $t \mapsto \alpha_t$ est continue et décroissante de $3\pi/5$ (cas euclidien) à 0. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t > 0$ tel que $\alpha_t = \pi/2$, Le théorème précédent permet de conclure. ■



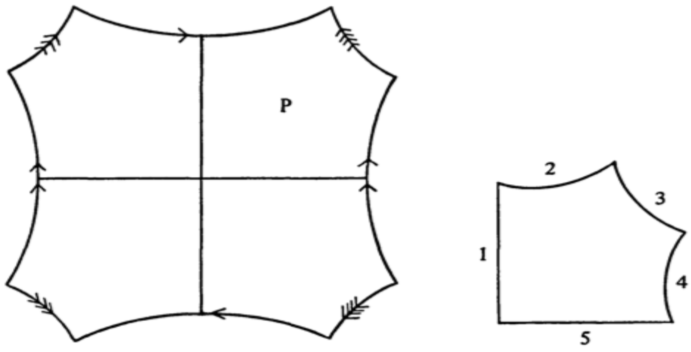
Exercice 5.15. — *On se propose de montrer que tout surface S_g, $g \geq 2$ admet une structure hyperbolique, en s'inspirant des constructions précédentes.*

(1) *Montrer qu'il existe un $4g$-gone régulier P d'angle $\pi/(2g)$.*
(2) *Fabriquer une surface $\widehat{X}$ à l'aide de P et de $G =< a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] >$.*
(3) *Montrer que $\widehat{X}/G$ est homéomorphe à S_g.*
(4) *En déduire que $\widehat{X}$ est isométrique à $\mathbb{H}^2$ et que G est conjugué à un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{H}^2$.*

5.3. La propriété LERF pour les groupes fondamentaux des surfaces closes

La proposition 5.12 et le lemme 5.5 montrent qu'il suffit de traiter le cas de la surface non-orientable X obtenue comme quotient de S_2 par une involution que nous décrivons ci-dessous.

Tout d'abord, on peut paver S_2 par huit pentagones hyperboliques à angle droit, établissant ainsi son hyperbolicité, ainsi que toutes les autres surfaces closes avec $h \geq 3$ et $g \geq 2$. La symétrie ι préserve le pavage, et induit donc un pavage de X par quatre pentagones qui, dépliés, forment un convexe de $\mathbb{H}^2$ avec une symétrie d'ordre 4. Notons G son groupe fondamental. C'est un sous-groupe du groupe Γ du pavage par pentagones.



EXERCICE 5.16. — *Montrer que $G < \Gamma$ est engendré par $s_1s_2s_5$, s_1s_4, s_3s_5 et $s_1s_3s_1s_5$. Montrer que $X = \mathbb{H}^2/G$ est la surface obtenue en faisant la somme connexe de trois copies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

THÉORÈME 5.17. — *Le groupe G est LERF.*

DÉMONSTRATION. Soit $H \subset G$ un sous-groupe de type fini et soit $K \subset X_H = \mathbb{H}^2/H$, un compact. D'après la proposition 5.10, il existe $Y \subset X_H$ compact, qui contient K et dont le goupe fondamental est canoniquement isomorphe à H. Notons $p : \mathbb{H}^2 \to X_H$ le revêtement universel de X_H. Notons aussi $Z = p^{-1}(Y)$. D'après le lemme 4.7, Z est connexe car $\pi_1(Y) = \pi_1(X_H)$, et $p_H : Z \to Y$ est un revêtement universel.

En vertu du corollaire 5.11, on cherche un sous-groupe $G' < G$ d'indice fini qui contient H tel que, si $g' \in G'$ et $g'(int(Z)) \cap int(Z) \neq \emptyset$ alors $g' \in H$. Cela impliquera que Y s'injectera dans $X' = \mathbb{H}^2/G'$, qui sera un revêtement fini X.

La surface X' doit donc être pavée par des pentagones. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des géodésiques formant le 1-squelette du pavage par pentagones de $\mathbb{H}^2$. Du coup, on définit $\widehat{Z}$ comme l'intersection des demi-espaces contenant Z bordés par les géodésiques de $\mathcal{L}$ disjointes de $int(Z)$. C'est un convexe contenant Z, invariant par H, car H préserve $\mathcal{L}$ (sous-groupe de Γ) et Z, donc les demi-espaces contenant Z.

On admet temporairement le fait suivant

FAIT 5.18. — *Le quotient $\widehat{Y} = \widehat{Z}/H$ est compact, de groupe fondamental H, et pavé par des pentagones.*

Par construction, $\widehat{Z}$ est bordé par des géodésiques qui se coupent à angle droit. Donc le théorème 5.13 implique $\widehat{Z}$ engendre un pavage régulier de groupe $\widehat{\Gamma} < \Gamma$ engendré par les réflexions par rapport aux géodésiques bordant son bord. De plus, $\widehat{Z}$ est un domaine fondamental de $\widehat{\Gamma}$.

Notons $\Gamma' =< \widehat{\Gamma} \cup H >$ et montrons que Γ' est d'indice fini dans Γ. Pour cela, on montre d'abord que $\widehat{\Gamma}$ est distingué dans Γ'. En effet, si ρ_ℓ est une réflexion par rapport à une géodésique $\ell \in \mathcal{L}$ contenant un côté de $\widehat{Z}$ et si $h \in H$, alors $h\rho_\ell h^{-1} = \rho_{h(\ell)}$ est la réflexion par rapport à la géodésique $h(\ell)$. Par invariance de $\mathcal{L}$ et $\widehat{Z}$ par H, cette réflexion est aussi dans $\widehat{\Gamma}$. Du coup, on a $\Gamma'/\widehat{\Gamma} \simeq H$ et

$$\mathbb{H}^2/\Gamma' = (\mathbb{H}^2/\widehat{\Gamma})/H = \widehat{Z}/H = \widehat{Y}$$

est compact, donc pavé par un nombre fini de pentagone. On conclut ainsi que $\Gamma' < \Gamma$ est d'indice fini.

Posons maintenant $G' = \Gamma' \cap G$ et $X' = \mathbb{H}^2/G'$. Le groupe G' est d'indice fini dans G car Γ' l'est dans Γ. De plus, si $g \in G'$ vérifie $g(int(\widehat{Z}) \cap int(\widehat{Z}) \neq \emptyset$, alors $g \in H$ par construction de Γ'. ■

Il reste le fait à démontrer.

Démonstration. (fait 5.18) On construit d'abord une sous-surface N à bord géodésique homotope à Y. Pour cela, on utilise le fait que ∂Y est constitué d'un nombre fini de composantes qui sont des courbes fermées simples homotopiquement non triviales dans X_H. Chacune de ces courbes est donc homotope à une unique géodésique (en effet, dans $\mathbb{H}^2$, le relèvement de l'homotopie montre que les extrémités à l'infini sont complètement déterminées). La surface N bordée par ces géodésiques est la surface recherchée.

De plus, il existe $C < \infty$ telle que Y soit contenue dans le C-voisinage de N. Soit $M = p^{-1}(N)$, qui est connexe, et dont le C-voisinage contient Z. L'ensemble M est convexe, bordé par des géodésiques.

On peut maintenant montrer que $\widehat{Y}$ est pavé par un nombre fini de pentagones. Tout d'abord chaque H-orbite de $\mathcal{L}$ qui intersecte $int(\widehat{Z})$ doit aussi intersecter Z par construction. Comme Z/H est compact, on n'en a qu'un nombre fini. Il suffit de montrer que leur projection est compacte dans X_H pour conclure que $\widehat{Y}$ est pavé par un nombre fini de pentagones et donc que $\widehat{Y}$ est compact.

Prenons l'une d'elles, ℓ, et montrons que $p(\ell)$ est compact dans X_H. Notons que ℓ contient des sommets du pavage régulièrement espacés. Pour chaque bout de ℓ, nous allons montrer qu'il existe un sommet et une géodésique orthogonale à ℓ qui n'intersecte pas le C-voisinage de M. Cela impliquera que $\widehat{Z}$ ne contient pas les bouts et donc que la projection est compacte.

Plaçons-nous dans le modèle du demi-plan : on peut représenter ℓ par la demi-droite verticale contenant i, et on peut supposer que ∂M contient un demi-cercle $\mathcal{C}$ qui coupe ℓ et sépare l'origine (dans $\mathbb{C}$) de M. Le C-voisinage de $\mathcal{C}$ est bordé par des arcs de cercle coupant $\mathbb{R}$ aux mêmes points que $\mathcal{C}$. Par convexité des disques, on peut donc trouver un demi-cercle orthogonal à ℓ disjoint du C-voisinage de M. Comme les sommets du pavage sont régulièrement espacés, on peut supposer que ce demi-cercle est dans $\mathcal{L}$. Cela conclut la démonstration du fait. ■

5.4. La propriété LERF pour les groupes fondamentaux des surfaces non closes

L'objectif de ce paragraphe est d'établir le théorème de Hall suivant :

THÉORÈME 5.19. — *Soient X une surface non close, H un sous-groupe de $\pi_1(X)$ de type fini et $g \in \pi_1(X) \setminus H$. Il existe un revêtement fini $p' : X' \to X$ tel que $\pi_1(X')$ contient H, mais pas g, et tel que H soit géométrique. De plus, H est un facteur libre de $\pi_1(X')$.*

EXERCICE 5.20. — *Soit X une surface compacte à bord. Montrer qu'il existe un graphe dans Γ dans X tel que*

(1) *L'ouvert $X \setminus \Gamma$ est connexe et simplement connexe.*
(2) *On peut fabriquer X à partir d'un 2-complexe formé d'une seule 2-cellule, dont on recolle le bord en identifiant par paires des 1-cellules de son bord.*

DÉMONSTRATION. Comme H et g sont contenus dans un facteur libre de rang fini de $\pi_1(X)$, on peut se ramener au cas où X est compact à bord. On note $X_H \to X$ le revêtement associé à H.

D'après l'exercice ci-dessus, on se donne un disque fermé D dont on découpe ∂D en un nombre fini de côtés de telle sorte que l'on puisse reconstruire X en identifiant des paires de côtés. On étiquette les côtés de sorte que chaque paire de côtés identifiés portent le même nom avec des signes opposés : pour fabriquer X, on recolle donc les côtés qui ont même nom et signe opposé.

Du coup, on obtient les revêtements de X en recollant des copies de D de sorte que chaque côté portant un signe soit recollé à un autre portant le même nom avec le signe opposé.

D'après la proposition 5.10, il existe $Y \subset X_H$ compact, qui contient K et dont le groupe fondamental est canoniquement isomorphe à H. Désignons par $\widehat{Y}$ la réunion des copies de D qui recouvrent Y. C'est un ensemble fini car Y est compact. On peut montrer par récurrence sur le nombre de copies que les côtés du bord de $\widehat{Y}$ vont par paires de même nom mais de signe opposé. Du coup, on peut recoller ces côtés ensembles afin d'obtenir une surface compacte X' qui contient Y et revêt X. Cela termine la démonstration dans ce cas. ■

RÉFÉRENCES

[AS] Lars V. Ahlfors and Leo Sario. *Riemann surfaces.* Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[dR] Georges de Rham. Sur les polygones générateurs de groupes fuchsiens. *Enseignement Math.* **17**(1971), 49–61.

[Sco1] Peter Scott. Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc. (2)* **17**(1978), 555–565.

[Sco2] Peter Scott. Correction to : "Subgroups of surface groups are almost geometric" [J. London Math. Soc. (2) **17** (1978), no. 3, 555–565 ; MR0494062 (58 #12996)]. *J. London Math. Soc. (2)* **32**(1985), 217–220.