4. THÉORIE DE BASS-SERRE

Les références principales sont [Ser, SW]. Rappelons que si C est un sous-groupe propre de G, alors on dit que G se scinde au-dessus de C s'il existe deux sous-groupes A et B de G tels que G est la somme amalgamée $A *_C B$ ou s'il existe un sous-groupe A tel que G est l'extension HNN $A*_C$. Plus généralement, le goupe G est scindable s'il admet un scindement au-dessus de l'un de ses sous-groupes propres. La théorie de Bass-Serre permet de comprendre les scindements à partir d'actions sur les arbres. En particulier, il découlera le théorème suivant.

Théorème 4.1. — *Un groupe G admet un scindement si et seulement si G admet une action simpliciale sans point fixe sur un arbre.*

4.1. Graphes de groupes

Ce paragraphe généralise les notions de somme amalgamée et d'extension HNN.

Un *graphe abstrait* Γ est la donnée

- de deux ensembles V (sommets) et E (arêtes orientées),
- d'une involution sans point fixe $e \in E \mapsto \bar{e} \in E$ de changement d'orientation,
- d'applications $o, t : E \to V$ associant à une arête son origine et son point terminal telles que $o(e) = t(\bar{e})$.

Une *orientation* de Γ sera donnée par le choix d'une arête orientée parmi $\{e, \bar{e}\}$ pour chaque paire d'arêtes, c'est-à-dire par une section de $E \to E/(e \sim \bar{e})$. On peut associer à un graphe abstrait sa réalisation géométrique en lui associant le CW-complexe obtenu en identifiant de la réunion disjointe des segments $[0,1]_e$ paramétrés par $e \in E$ d'une part les segments $[0,1]_e$ avec leur orientation opposée $[1,0]_{\bar{e}}$ et d'autre part les extrémités $\{0\}_e$ et $\{0\}_{e'}$ qui ont même origine $o(e) = o(e')$.

Un *graphe de groupes* $\mathcal{G}$ est la donnée

- d'un graphe abstrait connexe $\Gamma = \Gamma(V, E, o, t)$,
- d'un groupe G_v pour chaque sommet $v \in V$,
- d'un groupe $G_e = G_{\bar{e}}$ pour chaque arête muni d'un morphisme injectif $G_e \to G_{t(e)}$, noté $g \mapsto g^e$.

A un graphe de groupes, on associe un *graphe d'espaces* $\mathcal{X}$ comme suit : le corollaire 2.23 associe un 2-complexe X_v ou $X_e = X_{\bar{e}}$ avec un seul sommet à chaque sommet $v \in V$ et à chaque paire d'arêtes $\{e, \bar{e}\}$ de sorte que les groupes fondamentaux soient isomorphes à G_v et G_e respectivement, ainsi que des applications continues $f_e : X_e \to X_{t(e)}$ réalisant les morphismes $G_e \to G_{t(e)}$ fournies par le lemme 2.24. On peut choisir f_e *cellulaire*, c'est-à-dire chaque n-squelette de X_e est transformé dans le n-squelette de $X_{t(e)}$, de sorte que son image définit un sous-complexe de $X_{t(e)}$.

On forme maintenant le CW-complexe total X_Γ associé au graphe d'espaces en considérant la réunion disjointe $(\sqcup X_v) \sqcup (\sqcup Y_e)$ où $Y_e = X_e \times [0,1]$, et en identifiant $(x,t) \in Y_e$ avec $(x, 1-t) \in Y_{\bar{e}}$, et $(x,1) \in Y_e$ avec $f_e(x) \in X_{t(e)}$. On définit $\pi : X_\Gamma \to \Gamma$, où on identifie Γ à sa réalisation, en posant $\pi(x) = v$ si $x \in X_v$, $\pi(x,t) = t \in [0,1]_e$ si $(x,t) \in Y_e$. On vérifie que p est continue et $\pi^{-1}(v) = X_v$, $\pi^{-1}(e) = Y_e$, etc.

Le *groupe fondamental du graphe de groupes* $G = G_\Gamma = G_{\mathcal{G}}$ est, par définition, le groupe fondamental de X_Γ, bien défini à isomorphisme près.

REMARQUE 4.2. — Pour rendre la construction de X_Γ plus canonique, on peut utiliser des espaces d'Eilenberg-MacLane pour chaque sommet et arête, on obtiendra ainsi un $K(G_\Gamma, 1)$ pour X_Γ ; voir [SW].

Notons que les recollements ne se font pas par des homéomorphismes comme pour les constructions HNN. Cependant, le lemme suivant montre que cela n'a pas d'incidence notable.

LEMME 4.3. — Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces connexes et localement par arcs qui induit un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux. Alors le groupe fondamental de $(X \times [0,1]) \sqcup Y/[(x,0) \sim f(x)]$ est aussi canoniquement isomorphe à celui de X.

Le lemme vient du fait que la rétraction par déformation de $X \times [0,1]$ sur $X \times \{0\}$ induit une rétraction par déformation du quotient sur Y.

L'objet de la suite est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Soit G le groupe fondamental d'un graphe de groupes et soit T_μ un sous-arbre maximal de Γ ; on désigne par E_μ une orientation de chaque arête de $\Gamma \setminus T_\mu$. Alors G est isomorphe au quotient du produit libre $(*_{v\in V} G_v) * \mathbb{F}(E_\mu)$ par la clôture normale N engendrée par $e\bar{e}$, $e \in E$, $eg^e\bar{e}(g^{\bar{e}})^{-1}$ pour $e \in E_\mu$ et $g^e(g^{\bar{e}})^{-1}$ pour $e \subset T_\mu$. Autrement dit, on identifie $\bar{e} = e^{-1}$ pour tout $e \in E$, $eg^e\bar{e} = g^{\bar{e}}$ pour $e \in E_\mu$ et $g^e = g^{\bar{e}}$ pour $e \subset T_\mu$.*

De plus, chaque groupe de sommet s'injecte dans G.

Ce théorème montre que le groupe G ne dépend ni des choix des espaces X_v et X_e, ni de l'arbre maximal T_μ choisi.

Plongement de Γ dans X.— Tout d'abord, on subdivise chaque arête en deux de sorte que chaque arête initiale est maintenant la réunion de deux arêtes $e^o * e^t$ reliées par un nouveau sommet v_e. Pour chaque espace X_v et X_e, on choisit des points bases b_v et b_e. On construit alors des arêtes entre ces points de manière compatible avec π comme suit. Pour chaque arête e, on considère l'arc $\{b_e\} \times [0,1]$ que l'on recolle à un arc joignant $b_{t(e)}$ à $f_e(b_e)$. On découpe alors chaque arête de Γ en trois parties, en envoyant la partie du milieu sur $\{b_e\} \times [0,1]$ pour que v_e s'envoie sur b_e, puis la première partie sur l'arc de

$X_{o(e)}$ reliant $b_{o(e)}$ à $f_{\bar{e}}(b_e)$ et la dernière reliant $b_{t(e)}$ à $f_e(b_e)$. On obtient ainsi $\iota : \Gamma \to X_\Gamma$. On se fixe un point base $v_0 \in \Gamma$ et on note $b_0 = \iota(v_0)$.

On constate que $\pi \circ \iota : \Gamma \to \Gamma$ est homotope à l'identité.

REMARQUE 4.5. — La définition du groupe fondamental d'un graphe de groupes est donnée à isomorphisme près : aucun point base n'est choisi. Le plongement du graphe Γ dans l'espace total permet d'identifier les groupes d'arête et de sommet avec les groupes fondamentaux correspondants.

DÉMONSTRATION. On se fixe un sommet v_0 et son point base b_0 pour calculer le groupe fondamental. Pour chaque sommet v du graphe subdivisé, on considère dans X_Γ le chemin joignant b_0 à b_v dans $\iota(T_\mu)$, ce qui nous permet de baser les différents groupes de sommet et d'arête en b_0.

On commence par traiter —par récurrence— le cas des graphes finis. Si on a une seule arête, alors on reconnaît les situations données par le théorème de van Kampen et par la construction HNN.

Fixons-nous maintenant un arbre maximal dans Γ fini : on construit par récurrence le groupe fondamental de l'arbre par des sommes amalgamées successives. A chaque étape, on effectue la somme amalgamée avec un nouveau groupe de sommet qui s'injecte donc dans le résultat final d'après le corollaire 3.24. On vérifie ainsi les relations de la forme $g^e = g^{\bar{e}}$ ($g \in G_e = G_{\bar{e}}$) définissant la somme amalgamée au-dessus de G_e. Enfin, les arêtes manquantes consistent en des constructions HNN qui sont reflétées par les identifications de la forme $eg^e\bar{e} = g^{\bar{e}}$, où e désigne la lettre stable de l'extension.

Passons maintenant au cas général. Comme dans le cas fini, on peut facilement montrer que $\pi_1(X_\Gamma, b_0)$ est un quotient du produit libre des groupes de sommet. Soit γ un lacet dans X et supposons de plus qu'il soit homotope au lacet trivial. Notons $F : I \times I \to X$ une telle homotopie. Par compacité, $F(I \times I)$ ne visite qu'un nombre fini d'espaces de sommets et d'arêtes. Par conséquent, cette homotopie ne concerne que le groupe fondamental d'un graphe de groupes fini. Par conséquent, γ est bien dans le sous-groupe normal N. ■

EXERCICE 4.6. — *Soit $\mathcal{G}$ un graphe de groupes, et notons R la clôture normale des sous-groupes de sommets $\{G_v, v \in V\}$. Montrer que G/R est isomorphe au groupe fondamental de Γ.*

4.2. **Théorème de structure**

Le théorème de structure identifie les groupes fondamentaux de graphes de groupes à des groupes opérant sur des arbres simpliciaux.

4.2.1. *Revêtements universels et graphes d'espaces.* L'objet de ce paragraphe est de décrire le revêtement universel d'un graphe d'espaces en fonction des revêtements universels des sous-complexes qui le composent.

On s'appuie sur le lemme suivant.

LEMME 4.7. — Soient X et Y deux espaces connexes, localement connexes par arcs et semilocalement simplement connexes. On suppose qu'il existe une application continue $f : Y \to X$ qui induit un morphisme injectif $f_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, f(y))$. Notons $p : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X et Z une composante connexe de $p^{-1}(f(Y))$. Alors $p|_Z : Z \to f(Y)$ est un revêtement universel de $f(Y)$. De plus, $\pi_1(X, f(y))$ opère sur les composantes connexes de $p^{-1}(f(Y))$ induisant une bijection entre ces composantes et $f_*\pi_1(Y, y)\backslash\pi_1(X, f(y))$.

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que $p|_Z$ est un revêtement. En effet, pour $x \in f(Y)$, il existe un voisinage U de $f(Y)$ connexe par arcs contenu dans un voisinage distingué V de X. Par conséquent, $p^{-1}(V)$ est homéomorphe à $V \times D$, où D est en correspondance bi-univoque avec $p^{-1}(\{x\})$, et $p^{-1}(U) \cap Z$ est aussi homéomorphe à $U \times (p|_Z)^{-1}(\{x\})$ car U est connexe par arcs.

Tout élément γ de $G = f_*(\pi_1(Y, y))$ produit par relèvement un chemin dans Z par connexité, ce qui implique que G préserve Z. Par ailleurs, comme $\tilde{X}$ est simplement connexe, son action est aussi libre donc Z est simplement connexe.

Prenons maintenant $\gamma \in \pi_1(X, f(y))$, et supposons $\gamma(Z) \cap Z \neq \emptyset$, il existe donc $z \in Z$ avec $\gamma(z) \in Z$. Comme Z est connexe par arcs, il existe un chemin les reliant dans Z induisant *via* p un lacet basé en $p(z)$ contenu dans $f(Y)$. Donc γ est un élément de G d'après la proposition 3.12. Par conséquent, $\pi_1(X, f(y))$ opère sur les composantes connexes de $p^{-1}(f(Y))$ et le stabilisateur d'une de ces composantes est isomorphe à $\pi_1(Y, y)$.

Notons enfin que $p \circ \gamma^{-1} : \gamma(Z) \to f(Y)$ est aussi un revêtement universel. ■

PROPOSITION 4.8. — *Le revêtement universel $\tilde{X}$ d'un graphe d'espaces $\mathcal{X}$ a la structure d'un graphe d'espaces $\tilde{\mathcal{X}}$ au-dessus d'un graphe $\tilde{\Gamma}$ muni d'une action de G sans inversion d'arêtes, d'une application simpliciale $p_\Gamma : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ et d'une projection $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{\Gamma}$ telles que*

(1) *l'espace associé au sommet $\tilde{v} \in \tilde{\Gamma}$ est le revêtement universel de $X_{p(\tilde{v})}$ et celui associé à l'arête $\tilde{e} \in \tilde{\Gamma}$ est le revêtement universel de $X_{p(\tilde{e})}$; on a de plus* $\operatorname{stab} \tilde{v} \simeq G_{p_\Gamma(\tilde{v})}$ *et* $\operatorname{stab} \tilde{e} \simeq G_{p_\Gamma(\tilde{e})}$ *pour tout sommet $\tilde{v}$ et toute arête $\tilde{e}$ de $\tilde{\Gamma}$;*

(2) *on a $\pi \circ p = p_\Gamma \circ \tilde{\pi}$;*

(3) *pour tout $g \in G$, on a $p_\Gamma \circ g = p_\Gamma$;*

(4) *pour tout $g \in G$, on a $\tilde{\pi} \circ g = g \circ \tilde{\pi}$.*

(5) *le quotient $\tilde{\Gamma}/G$ est naturellement isomorphe à Γ.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque sommet $v \in \Gamma$ et chaque arête $e \in \Gamma$, on considère un revêtement universel $p_v : \tilde{X}_v \to X_v$ et $p_e : \tilde{X}_e \to X_e$. On note que $\tilde{Y}_e = \tilde{X}_e \times [0, 1]$ est un revêtement universel de Y_e. Les applications $f_e : X_e \to X_{t(e)}$ se relèvent en applications continues $\tilde{f}_e : \tilde{X}_e \to \tilde{X}_{t(e)}$ qui induisent des applications de recollement entre $\tilde{Y}_e$ et $\tilde{X}_{t(e)}$.

D'après le théorème 4.4, les groupes de sommet, et donc d'arête, s'injectent dans G. Par conséquent, le lemme 4.7 montre que $\tilde{X}$ est une réunion de copies de $\tilde{X}_v$ et $\tilde{Y}_e$ recollées par les applications $\tilde{f}_e$. En effet, pour chaque composante connexe Z de $p^{-1}(X_v)$, on a un revêtement $\tilde{p}_Z : \tilde{X}_v \to Z$ telle que $p_v = p \circ \tilde{p}_Z$ obtenu par relèvement. Comme Z est simplement connexe, ce revêtement est en fait un homéomorphisme. On peut faire le même raisonnement pour les arêtes, en s'appuyant sur le lemme 4.3.

On définit $\tilde{\Gamma}$ en définissant $\tilde{V}$ comme l'ensemble des composantes provenant des sommets et $\tilde{E}$ avec celles provenant de $\tilde{Y}_e$ que l'on rattache aux sommets en fonction des fonctions de recollements. Ce graphe vient naturellement avec une projection continue $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to \tilde{\Gamma}$ qui induit une projection simpliciale $p_\Gamma : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ vérifiant $p \circ \pi = \tilde{\pi} \circ p_\Gamma$. On obtient ainsi une description de $\tilde{X}$ comme graphe d'espaces au-dessus de $\tilde{\Gamma}$.

Le lemme 4.7 affirme aussi que l'action de G sur $\tilde{X}$ permute les composantes de $p^{-1}(X_v)$ et de $p^{-1}(X_e)$ pour chaque sommet et arête de Γ. Ceci implique d'une part que l'action de G sur $\tilde{X}$ induit une action sur $\tilde{\Gamma}$ telle que $\tilde{\pi} \circ G = G \circ \tilde{\pi}$ et d'autre part que $\operatorname{stab} \tilde{v} \simeq G_{p_\Gamma(\tilde{v})}$ et $\operatorname{stab} \tilde{e} \simeq G_{p_\Gamma(\tilde{e})}$ pour tout sommet $\tilde{v}$ et toute arête $\tilde{e}$ de $\tilde{\Gamma}$.

Soient $\tilde{e}$ une arête de $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{m}$ son milieu et notons $e = p_\Gamma(\tilde{e})$ et $p_\Gamma(\tilde{m}) = e \times \{1/2\}$. Le même argument avec le lemme 4.7 appliqué à $X_e \times \{1/2\}$ montre que $\operatorname{stab} \tilde{m} \simeq G_e$, impliquant $\operatorname{stab} \tilde{m} = \operatorname{stab} \tilde{e}$. Cela signifie donc que G n'inverse pas les arêtes de $\tilde{\Gamma}$.

Par équivariance, on a $p_\Gamma \circ g = p_\Gamma$ pour tout $g \in G$ et p_Γ identifie des points de la même G-orbite, donc $\tilde{\Gamma}/G$ est isomorphe à Γ. ∎

REMARQUE 4.9. — L'application $p_\Gamma : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ n'est pas un revêtement. Par exemple, dans le cas d'une somme amalgamée, Γ est une arête alors que $\tilde{\Gamma}$ est infini.

4.2.2. *Du graphe de groupes à une action sur un arbre.* On se donne un graphe de groupes $\mathcal{G}$ auquel on associe son groupe fondamental G et un CW-complexe X de groupe fondamental G. Son revêtement universel $\tilde{X}$ est un graphe d'espaces au-dessus de $\tilde{\Gamma}$. La proposition 4.8 fournit une projection $p_\Gamma : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$.

PROPOSITION 4.10. — *Le graphe $\tilde{\Gamma}$ est un arbre muni d'une action simpliciale de G sans inversion d'arêtes tel que $\tilde{\Gamma}/G$ est isomorphe à Γ. Le stabilisateur d'un sommet $\tilde{v}$ est un conjugué de $G_{p_\Gamma(\tilde{v})}$.*

L'arbre $\tilde{\Gamma}$ ainsi construit s'appelle *l'arbre de Bass-Serre* du graphe de groupes $\mathcal{G}$.

DÉMONSTRATION. La proposition 4.8 réduit la démonstration à montrer que $\tilde{\Gamma}$ est un arbre. On plonge $\tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{X}$ comme suit. Pour chaque sous revêtement universel $\tilde{X}_v$ et $\tilde{X}_e$, on choisit des points bases $\tilde{b}_v$ et $\tilde{b}_e$. On construit alors des arêtes entre ces points de manière compatible avec $\tilde{\pi}$. On découpe alors chaque arête en trois parties, en envoyant la partie du milieu sur $\{\tilde{b}_e\} \times [0, 1]$ puis la première partie sur un arc dans $\tilde{X}_{o(e)}$ reliant $\tilde{b}_{o(e)}$ à $\tilde{f}_{\bar{e}}(\tilde{b}_e)$ et la dernière reliant $\tilde{b}_{t(e)}$ à $\tilde{f}_e(\tilde{b}_e)$. On obtient ainsi $\tilde{\imath} : \tilde{\Gamma} \to \tilde{X}$.

On vérifie que $\tilde{\pi} \circ \tilde{\imath} : \tilde{\Gamma} \to \tilde{\Gamma}$ est homotope à l'identité, ce qui implique que $\tilde{\Gamma}$ est simplement connexe, donc un arbre. ■

4.2.3. *D'une action sur un arbre à un graphe de groupes.* On suppose que G est un groupe qui opère simplicialement sur un arbre sans inversion d'arêtes. L'objet de ce paragraphe est de montrer que G s'écrit comme un graphe de groupes.

Commençons par quelques remarques générales. Notons G_v le stabilisateur d'un sommet v de T et G_e le stabilisateur d'une arête e de T. Il vient $G_{g(v)} = gG_vg^{-1}$ et $G_{g(e)} = gG_eg^{-1}$ pour tout $g \in G$, tout sommet v et toute arête e. De plus, comme G opère sans inversion d'arêtes, on a aussi $G_e = G_{o(e)} \cap G_{t(e)}$.

Comme G opère simplicialement sans inversion d'arêtes sur T, le quotient T/G est un graphe.

Prenons maintenant un complexe X de groupe fondamental G et notons $\tilde{X}$ son revêtement universel. On obtient ainsi une action (diagonale) de G sur $\tilde{Z} = \tilde{X} \times T$ qui est simplement connexe. Par conséquent, le groupe fondamental de $Z = \tilde{Z}/G$ est isomorphe à G. Notons $p_Z : \tilde{Z} \to Z$ le revêtement universel de Z. Pour chaque point $x \in T$, $\mathrm{stab}(\tilde{X} \times \{x\}) = G_v$ si x est un sommet v, ou $\mathrm{stab}(\tilde{X} \times \{x\}) = G_e$ si $x \in e$. Dans ces deux cas, ce groupe est le groupe fondamental de $p_Z(\tilde{X} \times \{x\})$, et donc de $Z_v = p_Z(\tilde{X} \times \{v\})$ ou de $W_e = p_Z(\tilde{X} \times \{e\})$ selon le cas, d'après le lemme 4.7. Donc Z est la réunion des Z_v et W_e.

Notons que $p_Z(\tilde{X} \times \{v\}) = (\tilde{X}/G_v) \times (\{v\}/G)$, et $p_Z(\tilde{X} \times \{e\}) = (\tilde{X}/G_e) \times (e/G)$. Ceci définit une projection $\pi : Z \to T/G$ et de plus, pour chaque arête e de milieu $m(e)$, on peut écrire $W_e = Z_e \times [0,1]$ en posant $Z_e = p_Z(\tilde{X} \times \{m(e)\})$. On obtient ainsi une description de Z comme graphe d'espaces au-dessus de T/G.

Associons maintenant un graphe de groupes à ce graphe d'espaces. Pour cela, il suffit de plonger T/G dans Z comme dans le théorème 4.4 et de choisir les images des sommets et des milieux d'arête comme points base de chaque sous-espace. Cela produit une représentation des stabilisateurs comme groupes fondamentaux, ainsi que des injections des groupes d'arête dans les groupes de sommet en utilisant les arêtes plongées de T/G. On vérifie que le groupe fondamental de ce graphe de groupes est bien G.

4.2.4. *Equivalence des constructions.* Ce paragraphe montre l'équivalence des points de vue des paragraphes précédents.

Théorème 4.11 (de structure). — *Ces constructions sont inverses l'une de l'autre, à isomorphisme près et quitte à conjuguer les injections des graphes d'arêtes dans les graphes de sommets.*

Démonstration. Si on part d'une action de G sur un arbre T, on obtient un graphe de groupes $\mathcal{G}$ au-dessus de T/G associé à un graphe d'espaces et à un plongement de T/G dans l'espace total associé. Si on reconstruit un graphe d'espace $X_{\mathcal{G}}$ à partir du graphe de groupes, on obtient une action sur un arbre $\tilde{\Gamma}$. Le lemme 4.7 montre que la structure de $\tilde{\Gamma}$ et de T sont identiques, impliquant l'existence d'un isomorphisme équivariant entre ces arbres.

Réciproquement, si on part d'un graphe de groupes $\mathcal{G}$, on associe son espace $X_{\mathcal{G}}$ et son revêtement universel $\tilde{X}_{\mathcal{G}}$ qui se projette sur $\tilde{\Gamma}$. On obtient ainsi une action sur $\tilde{\Gamma}$ sans inversion d'arêtes telle que $\tilde{\Gamma}/G$ soit isomorphe à Γ. On associe maintenant les espaces $\tilde{Z} = \tilde{X}_{\mathcal{G}} \times \tilde{\Gamma}$ et $Z = \tilde{Z}/G$. D'après le paragraphe précédent, on a des injections de X_v et Y_e dans Z_v et W_e respectivement qui induisent des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux. En plongeant Γ dans $X_{\mathcal{G}}$, on peut s'assurer que ces isomorphismes permettent d'identifier aussi les injections des groupes d'arêtes dans les groupes de sommets. Ceci montre que l'on obtient le même graphe de groupes. ■

4.2.5. *Complément : présentation du groupe à partir d'une action sur un arbre.* Soit $\mathcal{G}$ un graphe de groupes. Nous avons vu que nous pouvions donner une présentation de son groupe fondamental comme sommes amalgamées et constructions HNN itérées à partir d'un sous-arbre maximal du graphe abstrait.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de faire la construction analogue pour un groupe G opérant sans inversion d'arêtes sur un arbre simplicial T.

Considérons un sous-arbre maximal $T_\mu \subset T/G$. Le plongement $T_\mu \hookrightarrow T/G$ admet un relèvement $T_f \subset T$ en vertu du lemme 4.12 suivant. Le sous-arbre T_f contient une famille de représentants des sommets de T sous l'action de G.

LEMME 4.12. — Soit $p : T \to \Gamma$ une application simpliciale localement surjective entre un arbre (simplicial) T et un graphe Γ. Si T_0 est un sous-arbre de Γ et $p(v) \in T_0$, alors il existe un relèvement de $j : T_0 \to T$ tel que $j(p(v)) = v$ et $p \circ j = \mathrm{Id}$.

DÉMONSTRATION. On montre que la collection des sous-arbres (T', j') de T_0 contenant $p(v)$ tels que $j' : T' \to T$ vérifie $j'(p(v)) = v$ et $p \circ j' = \mathrm{Id}$ est une famille inductive. Il existe donc un élément maximal (T_0', j_0'). Si T_0' n'était pas T_0, on pourrait trouver un sommet $v' \in T_0 \setminus T_0'$ voisin d'un sommet $v_0' \in T_0'$. Comme p est localement surjectif, il existe un antécédent $u \in T$ voisin de $j'(v_0')$, contredisant ainsi la maximalité de (T_0', j').■

Fixons-nous une orientation E_μ pour chaque arête hors de T_μ dans T/G. Pour chaque $a \in E_\mu$, il existe une arête e qui relève a telle que $t(e) = j(t(a))$. On définit $j(a) = e$. Notons que $o(e) \notin T_f$ car T est un arbre. Prenons maintenant une autre arête e' relevant a telle que $o(e') \in T_f$. Comme e et e' sont des relevés de a, il existe $\beta_e \in G_e$ tel que $\beta_e(e) = e'$. On appelle β_e un *élément de Bass-Serre*. On définit aussi $j(\bar{a}) = \overline{j(a)}$.

Associons maintenant un graphe de groupes modelé sur T/G. A chaque sommet $s \in T/G$, on associe G_v pour $v \in T_f$ représentant s. A une arête a de T/G contenu dans T_μ correspond une unique arête e de T_f ; on lui associe alors G_e. Supposons maintenant que a est une arête de $(T/G) \setminus T_\mu$. On lui associe le groupe G_e, où $e = j(a)$. On a l'injection naturelle $G_a \hookrightarrow G_{t(a)}$ provenant de $G_e \subset G_{t(e)}$; de plus, β_e induit une injection par conjugaison entre G_a et $G_{t(a)}$ puisque $\beta_e G_e \beta_e^{-1} = G_{\beta_e(e)}$.

Observons que le choix de e est paramétré par $G_{t(e)}/G_e$, celui de e' par $G_{o(e')}/G_{e'}$ et celui de β_e par G_e.

Le graphe de groupes ainsi défini est le même que par la topologie. En effet, prenons l'espace Z construit plus haut avec un plongement de T/G dans Z. Le groupe fondamental de Z_s associé au sommet s est naturellement isomorphe à $G_{j(s)}$ par relèvement ; pour les espaces d'arête a de T_μ, on obtient $G_{j(a)}$ par relèvement. Si a est dans E_μ, on peut considérer son relèvement dans $\tilde{Z}$ puis le projeter sur $\tilde{\Gamma}$ pour définir e et faire pareil avec $\bar{a}$ pour obtenir e'. En changeant le plongement de a dans Z, on obtient différents relèvements. Le choix de l'élément de Bass-Serre est défini à conjugaison près de l'identification de G_a et $G_{\bar{a}}$.

4.3. **Propriétés**

4.3.1. *Description algébrique de l'arbre de Bass-Serre.* Soit G un groupe opérant sur un arbre simplicial sans inversion d'arêtes. On se fixe un sous-arbre T_f contenant exactement un sommet par orbite, induisant une présentation comme graphe de groupes. Chaque sommet de T est donc sous la forme $g(v)$, $v \in T_f$. On a $g(v) = g'(v)$ si $g^{-1}g' \in G_v$. Donc le sommet $g(v)$ est décrit par la classe gG_v. De même les arêtes sont données par gG_e, correspondant aux couples $(gG_v, gG_{v'})$ avec $G_v \cap G_{v'} = G_e$.

Si G_Γ est le groupe fondamental d'un graphe de groupes, on peut lui associer un arbre dont les sommets seront les classes gG_v et les arêtes gG_e. Les arêtes d'un sommet $\tilde{v}$ de l'arbre construit sont en correspondance bi-univoque avec les classes $G_{p_\Gamma(\tilde{v})}/G_e$, où e parcourt les arêtes incidente à $p_\Gamma(\tilde{v})$ dans Γ.

4.3.2. *Formes normales.* On se donne un graphe de groupes $\mathcal{G}$ muni d'un point base v_0. On définit

$$\mathbb{F}(\mathcal{G}) = (*_{v\in V} G_v) * \mathbb{F}(E) / \ll e\bar{e}, eg^e e^{-1}(g^{\bar{e}})^{-1}, e \in E, g \in G_e \gg \,.$$

Si on se fixe un sous-arbre maximal $T_\mu \subset \Gamma$, et que l'on note N la clôture normale dans $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ du groupe libre engendré par les arêtes de T_μ, alors le quotient $\mathbb{F}(\mathcal{G})/N$ est naturellement isomorphe à $G_\mathcal{G}$ d'après le théorème 4.4. On obtient ainsi un morphisme surjectif $\Psi : \mathbb{F}(\mathcal{G}) \to G_\mathcal{G}$.

Si c est un lacet $e_1, \ldots, e_n$ dans Γ basé en v_0, alors on définit un *mot* de $\mathbb{F}(\mathcal{G})$ de type c par un couple (c, μ), où $\mu = (h_0, \ldots, h_n)$, avec $h_0, h_n \in G_{v_0}$, $h_j \in G_{t(e_j)} = G_{o(e_{j+1})}$. On lui associe l'élément de $\mathbb{F}(\mathcal{G})$:

$$|c, \mu| = h_0 e_1 h_1 e_2 \ldots e_n h_n \,.$$

Ces lacets forment un sous-groupe de $\mathbb{F}(\mathcal{G})$, que l'on notera $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$.

Proposition 4.13. — *La projection $\Psi : \mathbb{F}(\mathcal{G}) \to G_\mathcal{G}$ induit par restriction à $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$ un isomorphisme $\psi : \pi_1(\mathcal{G}, v_0) \to G_\mathcal{G}$.*

DÉMONSTRATION. Par définition, on a $\ker \Psi \cap \pi_1(\mathbb{F}(\mathcal{G})) = \{1\}$. Donc il suffit de vérifier que la restriction de Ψ est surjectif. Fixons-nous l'espace total X_Γ associé et un plongement de Γ dans X_Γ comme dans les paragraphes précédents. On se fixe un point base b_0 de $\iota(\Gamma) \subset X_\Gamma$ appartenant à l'espace de sommet X_{v_0}.

Tout lacet γ basé en point b_0 de X_{v_0} dans X_Γ peut être décrit de la manière suivante. La projection $\pi(\gamma)$ définit un lacet dans Γ basé en v_0 donné par une suite d'arêtes orientées $c = (e_1, \ldots, e_n)$. Par homotopie, on peut supposer que $\pi(\gamma)$ est localement injectif sur les arêtes. On découpe γ en une juxtaposition $\gamma_0 * \gamma_1 * \ldots * \gamma_n$ de sorte que $\gamma_0 \subset X_{v_0} \cup X_{e_1}$, $\gamma_j \subset X_{e_{j-1}} \cup X_{o(e_j)} \cup X_{e_j}$ pour $1 \leq j < n$, et $\gamma_n \subset X_{v_0} \cup X_{e_n}$. Pour chaque indice $1 \leq j \leq n$, on considère un chemin c_j joignant b_{e_j} au point $\gamma_{j-1} \cap \gamma_j$. Notre chemin γ est donc homotope à

$$(\gamma_0 * \bar{c}_1 * \bar{e}_1^o) * e_1 * (\bar{e}_1^t * c_1 * \gamma_1 * \bar{c}_2 * \bar{e}_2^o) * e_2 * \ldots * e_n * (\bar{e}_n^t * c_n * \gamma_n)\,.$$

On remarque que $g_0 * \bar{c}_1 * \bar{e}_1{}^o$ est homotope à $h_0 \in G_{v_0}$, $(\bar{e}_j^t * c_j * \gamma_j * \bar{c}_{j+1} * \bar{e}_{j+1}^o)$ est homotope à $h_j \in G_{t(e_j)}$ et $\bar{e}_n^t * c_n * \gamma_n$ et homotope à $h_n \in G_{v_0}$.

On vient de montrer que $\Psi(|c, \mu|) = \gamma$. ■

On dit qu'un mot est *réduit* si, ou bien $h_j = 1$ et $e_{j+1} \neq \bar{e}_j$, ou bien $h_j \in G_{o(e_j)} \setminus G_{e_j}$ pour $1 \leq j \leq n$.

EXERCICE 4.14. — *Montrer que tout élément $\pi_1(\mathcal{G}, v_0)$ peut être représenté par un mot réduit. En considérant des transversales de $G_{o(e)}/G_e$, montrer que l'on peut obtenir une écriture unique.*

4.3.3. *Sous-groupes.* Si G opère sans inversion d'arêtes sur un arbre simplicial et si H est un sous-groupe de G alors H opère aussi sur le même arbre que G et est donc le groupe fondamental d'un graphe de groupes dont les groupes de sommet sont de la forme $gG_vg^{-1} \cap H$ et les groupes d'arêtes de la forme $gG_eg^{-1} \cap H$. Le graphe de H est décrit par les doubles classes HgG_v et HgG_e, c'est-à-dire par le quotient de l'arbre par H.

Dans le cas de produits libres, on obtient

COROLLAIRE 4.15 (Kurosh). — *Si G est un produit libre de groupes, alors tout sous-groupe est un produit libre de conjugués de sous-groupes des facteurs de G et d'un groupe libre.*

4.4. **Applications**

Nous donnons quelques applications.

4.4.1. *Scindements et points fixes.* Nous allons montrer le théorème 4.1 dans un cadre un peu plus général. Pour cela, on dit qu'un groupe G a la propriété (FA) si toute action simpliciale de G sur un arbre admet un point fixe.

On a la caractérisation suivante de cette propriété.

Théorème 4.16. — *Un groupe dénombrable G a la propriété (FA) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

(1) *G ne se scinde pas ;*

(2) *G est de type fini.*

Si G se scinde, alors l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre est sans point fixe. Réciproquement, si G admet une action sans point fixe, on peut supposer que G opère sans inversion d'arêtes quitte à les subdiviser en deux. Du coup, on a un scindement.

Démonstration. On suppose que G a la propriété (FA). Si G se scinde non trivialement, alors l'action de G sur son arbre de Bass-Serre n'a pas de point fixe : dans le cas amalgamé, $G = A *_C B$, l'élément (ab) opère sans point fixe sur son arbre de Bass-Serre en prenant $a \in A \setminus C$ et $b \in B \setminus C$ en vertu du lemme 3.38 ; dans le cas d'une construction HNN, la lettre stable opère sans point fixe. Ceci montre (1). Enfin, comme G est dénombrable, on a une suite croissante de sous-groupes de type fini $(G_n)_n$ tels que $\cup G_n = G$. On construit un arbre en prenant comme sommet la réunion disjointe des classes de G/G_n et on joint deux sommets $s \in G/G_n$ et $s' \in G/G_{n+1}$ par une arête si la classe s' est contenu dans s. Le groupe G admet une action naturelle sur cet arbre. Par (FA), on a un point fixe ξ. On a donc $\xi \in G/G_n$ pour un certain n et, comme G fixe ξ, cela signifie que $G = G_n$, donc que G est de type fini.

Réciproquement, supposons les deux points vérifiés et montrons (FA). On se donne donc une action de G sur un arbre T. Quitte à subdiviser les arêtes, on peut supposer que G opère sans inversion d'arêtes. Montrons que G opère sans élément hyperbolique. Si c'était le cas, on pourrait supposer que l'action de G est minimale. Le graphe quotient T/G serait un graphe décrivant G comme un graphe de groupes. Prenons une arête d'un axe hyperbolique. Supposons que cette arête sépare le graphe quotient en deux sous-graphes représentant deux sous-groupes A et B. Le théorème 4.4 montre alors que G est isomorphe à une somme amalgamée. Par construction, l'élément hyperbolique n'appartiendrait ni à A, ni à B. Donc cela contredirait (1). Si l'arête ne sépare pas T/G, alors on aurait une extension HNN conduisant encore à un scindement. Donc G opère sans élément hypebolique. Comme G est de type fini, la proposition 3.37 implique que G a un point fixe global.

■

Exercice 4.17. — *Montrer que si G vérifie (FA), alors il n'existe pas de surjection de G sur $\mathbb{Z}$.*

Remarque 4.18. — Si on ne veut pas supposer G dénombrable, alors l'énoncé reste vrai en remplaçant la condition de type fini par G est une suite croissante de groupes.

Exercice 4.19. — *Soient Δ un triangle équilatéral dans le plan euclidien et G le groupe engendré par les réflexions d'axes les droites portant les côtés de Δ.*

(1) *Montrer que G a pour présentation $< a, b, c | a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ca)^3 >$. En déduire que G a la propriété (FA).*

(2) *Montrer que G est le groupe d'isométries du plan qui préserve le pavage par triangles équilatéraux engendré par Δ. En déduire que G contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, qui ne vérifie pas la propriété (FA).*

4.4.2. *Décomposition en produits libres.* Un groupe G est *librement indécomposable* si, chaque fois que $G = A * B$, alors A ou B est trivial.

THÉORÈME 4.20. — *Soit G un groupe de type fini, alors il existe des sous-groupes librement indédomposables $G_1, \ldots, G_k$ tels que $G = G_1 * G_2 * \ldots * G_k$. De plus, si $G = H_1 * \ldots * H_\ell$ avec les H_j indécomposables, alors $k = \ell$ et, quitte à réordonner les sous-groupes, on aura H_j conjugué à G_j s'ils ne sont pas cycliques.*

On commence par un résultat permettant d'analyser les générateurs et la décomposition en produits libres.

THÉORÈME 4.21 (Grushko). — *Soit $G = A * B$ un groupe de type fini et $\varphi : \mathbb{F} \to G$ un morphisme surjectif d'un groupe libre de rang fini sur G. Alors il existe un scindement $\mathbb{F} = \mathbb{F}_A * \mathbb{F}_B$ tel que $\varphi(\mathbb{F}_A) = A$ et $\varphi(\mathbb{F}_B) = B$.*

DÉMONSTRATION. On donne une démonstration topologique suivant Stallings, voir [SW]. Soit X un complexe obtenu par deux complexes X_A et X_B de groupes fondamentaux A et B attachés le long d'un segment I de milieu b, que l'on choisit comme point base pour X. On cherche un complexe K de groupe fondamental $\mathbb{F}$ et une application cellulaire $f : K \to X$ qui réalise φ tel que $f^{-1}(\{b\})$ est contractile. Cette situation produit le scindement recherché. En notant $K_A = f^{-1}(X_A)$ et $K_B = f^{-1}(X_B)$, on obtient une décomposition de K de sorte que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_A * \mathbb{F}_B$ est le produit libre de chaque morceau et on a $\varphi(\mathbb{F}_A) = A$ et $\varphi(\mathbb{F}_B) = B$.

On part avec le bouquet de cercles K_0 et l'application cellulaire f_0 transformant chaque boucle sur le lacet de $X^{(1)}$ décrivant son image par φ. On note que $f_0^{-1}(\{b\})$ est un nombre fini de points. Le lemme 4.22 ci-dessous montre que l'on peut modifier f_0 en un nombre fini d'étapes pour obtenir f. ∎

LEMME 4.22. — Supposons donnés un 2-complexe K de groupe fondamental $\mathbb{F}$ et une application cellulaire $f : K \to X$ réalisant φ telle que $f^{-1}(\{b\})$ est formé de $N+1$ arbres disjoints. Il existe un autre complexe L de groupe fondamental $\mathbb{F}$ et une application cellulaire $g : L \to X$ réalisant φ telle que $g^{-1}(\{b\})$ est formé d'au plus N arbres disjoints.

DÉMONSTRATION. Soit $c : [0,1] \to K^{(1)}$ un chemin reliant deux composantes connexes de $f^{-1}(\{b\})$. Son image $f(c)$ est un lacet dans X, donc l'image d'un lacet γ de K issu de $c(0)$ par surjectivité de φ. Par suite $\kappa = \bar{\gamma} * c$ est un chemin dont l'image par f est un lacet basé en b homotopiquement trivial dans X. On peut découper κ en la juxtaposition de chemins

$\kappa_1 * \cdots * \kappa_n$ de sorte que $f(\kappa_j)$ est un lacet dans X_A ou X_B, et deux tels chemins consécutifs ne sont pas dans le même morceau. Si l'un des lacets $f(\kappa_j)$ est homotopiquement trivial et que κ_j relie deux points d'une même composante de $f^{-1}(\{b\})$, on peut supposer que κ_j est contenu dans une composante de $f^{-1}(\{b\})$ sans altérer notre construction.

Comme $f(\kappa)$ est homotopiquement trivial, la décomposition en produit libre nous dit que, pour au moins un des sous-chemins κ_j, $f(\kappa_j)$ est trivial. Or, on s'est arrangé pour que κ_j joint deux composantes distinctes de $f^{-1}(\{b\})$. On construit maintenant L en rajoutant une arête e de mêmes extrémités que κ_j et en recollant un disque le long de $\kappa_j \cup \bar{e}$. On construit $g : L \to X$ en posant $g|_K = f$, $f|_e = b$ et en l'étendant au disque par l'homotopie de $f(\kappa_j)$ à b. Le théorème de van Kampen nous assure que le groupe fondamental de L est toujours $\mathbb{F}$ et que g réalise φ. Or les deux composantes de $f^{-1}(\{b\})$ qui étaient reliées par κ_j sont maintenant connectées dans L par e. ■

EXERCICE 4.23. — *Trouver une démonstration de ce théorème par la théorie de Bass-Serre.*

Notons $\mu(G)$ le nombre minimal de générateurs de G.

COROLLAIRE 4.24. — *Si $G = A * B$ et G est de type fini, alors $\mu(G) = \mu(A) + \mu(B)$.*

DÉMONSTRATION. Comme A et B engendrent G, on a $\mu(G) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Soit maintenant $\mathbb{F}$ un groupe libre de rang $\mu(G)$. Il existe un morphisme $\varphi : \mathbb{F} \to G$. Le théorème de Grushko nous permet donc d'écrire $\mathbb{F} = \mathbb{F}_A * \mathbb{F}_B$ de sorte que $\mu(G) = \operatorname{rg} \mathbb{F}_A + \operatorname{rg} \mathbb{F}_B \geq \mu(A) + \mu(B)$. ■

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4.20.

DÉMONSTRATION. Comme G est de type fini, le théorème de Grushko (voire son corollaire) montre que G se décompose en au plus $\mu(G)$ facteurs librement indécomposables.

Supposons que l'on ait deux décompositions

$$G = G_1 * \ldots * G_k = H_1 * \ldots * H_\ell \,.$$

On peut supposer $k \leq \ell$. Si chaque G_j est cyclique, alors G est libre, donc chaque H_j est libre aussi, et, par unicité du rang, on obtient $k = \ell$.

Supposons maintenant que $G_1, \ldots, G_m$ est non cyclique et $G_{m+1}, \ldots, G_k$ le sont, $m \leq k$. En faisant opérer G_1 sur l'arbre de Bass-Serre associé à $*H_j$, on conclut que G_1 doit stabiliser un sommet en vertu du théorème de Kurosh, donc il existe $g_1 \in G$ tel que $G_1 \subset g_1 H_1 g_1^{-1}$ (quitte à réordonner les H_j). Donc H_1 n'est pas cyclique non plus, et il existe g_2 et j tels que $H_1 \subset g_2 G_j g_2^{-1}$. Donc $G_1 < (g_1 g_2) G_j (g_1 g_2)^{-1}$. Mais cela signifie que ces groupes stabilisent des points de l'arbre de Bass-Serre de $*G_j$ de la même orbite, impliquant donc que $j = 1$ et $G_1 = g_1 H_1 g_1^{-1}$.

De proche en proche, on montre que chaque G_j est conjugué à H_j, $1 \leq j \leq m$. On conclut en remarquant les isomorphismes

$$G_{m+1} * \ldots * G_k \simeq G/ \ll G_1, \ldots G_m \gg \simeq G/ \ll H_1, \ldots, H_m \gg \simeq H_{m+1} * \ldots * H_\ell\,.$$

Comme le groupe de gauche est libre, on conclut que $k = \ell$ et que chaque H_j est cyclique.■

On donne un exemple de groupe dénombrable qui n'est pas de type fini pour lequel le théorème 4.20 ne tient pas. Il s'agit de

$$G =< a_j, j \geq 0, b_k, k \geq 1 | a_{n-1} = [a_n, b_n], n \geq 1 > \ .$$

On remarque tout d'abord que

$$G =< b_1 > * < a_j, j \geq 1, b_k, k \geq 2 | a_{n-1} = a_n, b_n], n \geq 2 >= \mathbb{Z} * G\,.$$

Par conséquent, on n'a pas unicité de l'écriture sous forme d'un produit libre fini.

Supposons maintenant que l'on puisse écrire G sous forme de produit libre

$$G = *_{j \geq 0} G_j\,.$$

Il existe n tel que $a_0 \in A = *_{0 \leq j \leq n} G_j$. Du coup, on peut écrire $G = A * B$. Le lemme 4.25 montre de proche en proche que A contient tous les générateurs de G, donc B serait trivial.

Lemme 4.25. — Supposons que $G = A * B$ avec A et B non triviaux. Si $g = [a, b]$ avec $g \in A$, alors $a, b \in A$.

Démonstration. Notons $H =< a, b >$. Le théorème de Kurosh permet d'écrire $H = (H \cap A) * C$ pour un sous-groupe $C < H$. Si H n'est pas inclus dans A, alors $H \cap A$ et C ont tout deux au moins un générateur, donc sont cycliques, en vertu du théorème de Grushko. Par conséquent, H est isomorphe à $\mathbb{F}_2$, et le morphisme $H \to H/D(H)$ devrait être injectif sur chaque facteur. Mais ceci contredit que g est un commutateur non trivial dans $H \cap A$. ■

4.5. **Groupes avec une infinité de bouts**

On se propose de montrer le théorème suivant, et d'en tirer quelques conséquences dans le paragraphe suivant.

Théorème 4.26 (Stallings). — *Un groupe de type fini a au moins deux bouts si et seulement si G se scinde au-dessus d'un groupe fini.*

Nous ne traiterons que le cas à une infinité de bouts, et admettrons le cas à deux bouts.

4.5.1. *Description d'un arbre par ses sous-arbres.* Soit T un arbre. Chaque arête découpe T en deux composantes connexes. Si e est une arête orientée, on désigne par T_e la composante connexe de $T \setminus e$ qui contient son point terminal $t(e)$. Observons que $T \setminus T_e = T_{\bar{e}}$.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des sous-arbres ainsi obtenus, que l'on munit de l'inclusion et du passage au complémentaire que l'on notera A^* pour $A \in \mathcal{D}$. On a les propriétés suivantes pour $A, B \in \mathcal{D}$.

(A1) Si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$.

(A2) Si $A \subset B$ alors A n'est pas inclus dans B^*.

(A3) L'ensemble $\{C \in \mathcal{D},\ A \subset C \subset B\}$ est fini.

(A4) Ou bien $A \subset B$, ou bien $A \subset B^*$, ou bien $A^* \subset B$, ou bien $A^* \subset B^*$.

Les éléments de $\mathcal{D}$ sont donc en correspondance avec les arêtes. On peut récupérer les sommets de l'arbre en prenant l'intersection des sous-arbres qui les contiennent.

4.5.2. *Ensembles presque invariants.* Si X est un ensemble, on dit que deux parties A et B sont *commensurables* ou *presque égales* ($A \overset{p}{=} B$) si leur différence symétrique $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est fini. On dira que A est *presque inclus* ($A \overset{p}{\subset} B$) dans B si $A \setminus B$ est fini.

EXERCICE 4.27. — *Soit X un ensemble, montrer que l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(X)$ muni de la différence symétrique et de l'intersection a une structure d'anneau.*

Soit G un groupe et $A \subset G$. On dit que A est *presque invariant* si, pour tout $g \in G$, A et Ag sont presque égaux. On dira que A un sous-ensemble propre presque invariant si A et son complémentaire $A^* = G \setminus A$ sont infinis.

Si G est engendré par S fini et X désigne son graphe de Cayley, alors, pour un sous-ensemble $A \subset G$, on note ∂A l'ensemble des arêtes qui relient un point de A à un point de A^*, définissant son bord.

PROPOSITION 4.28. — *Un groupe G de type fini a au moins deux bouts si et seulement s'il existe un sous-ensemble propre presque invariant. De plus, chaque ensemble presque invariant contient au moins un bout et son bord est fini.*

DÉMONSTRATION. On se fixe un système de générateurs fini S et son graphe de Cayley X.

Supposons que G ait au moins deux bouts. Par la proposition 1.24, il existe donc un compact K connexe contenant e tel que $X \setminus K$ ait au moins deux composantes connexes infinies. Notons B l'une d'elle et $A = K \cup B$. Si $a \in G$, et $g \in A \setminus Aa$, alors $g \in A$ et $ga^{-1} \notin A$. Du coup on a $d(ga^{-1}, K) \leq d(ga^{-1}, g) = |a|_S$. Comme X est localement fini et K est fini, cela implique que g est dans un ensemble fini. Prenons maintenant $g \in Aa \setminus A$, alors $g \notin A$ et $ga^{-1} \in A$. On montre de même que $Aa \setminus A$ est fini, donc A est presque invariant et, par construction, A est propre.

Réciproquement, on se donne un ensemble propre presque invariant A. Notons K l'ensemble des arêtes joignant un point de A à son complémentaire. Une telle arête correspond à un couple (a, as) pour $a \in A$, $s \in S$ et $as \notin A$. Donc $K \subset \cup_{s\in S} A \triangle As$ et on en déduit que K est fini. De plus K est le bord de A donc A a au plus $|K|$ composantes connexes, dont une au moins est infini. De même pour son complémentaire. Donc la proposition 1.24 montre que G a au moins deux bouts. ∎

EXERCICE 4.29. — *Montrer qu'un ensemble $A \subset G$ est presque invariant si et seulement si ∂A est fini.*

On peut en déduire la réciproque du théorème de Stallings.

COROLLAIRE 4.30. — *Si un groupe G de type fini se scinde au-dessus d'un groupe fini, alors G a au moins deux bouts.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'action de G sur l'arbre de Bass-Serre associé au scindement au-dessus du sous-groupe fini F. On se fixe l'arête e stabilisé par F, on note T_1 et T_2 les composantes de $T \setminus e$ et $v = t(e)$. Soit $A = \{g \in G,\ g(v) \in T_1\}$. Comme l'action est transitive sur les arêtes, A et son complémentaire sont infinis.

Prenons maintenant $a \in G$ et $g \in A \setminus Aa$. Cela signifie que $g(v) \in T_1$ et $(ga^{-1})(v) \in T_2$. Par conséquent, e est contenu dans le segment $[g(v), (ga^{-1})(v)]$ et $g^{-1}(e) \subset [v, a^{-1}(v)]$. Or a étant fixé, on constate que le segment $[v, a^{-1}(v)]$ est une union finie d'arêtes $(e_j)_{1\le j\le n}$ et il existe pour chacune un élément $g_j \in G$ tel que $g_j(e) = e_j$. Par suite, $g^{-1} \in \cup_{1\le j\le n} g_j F$ qui est fini. Ceci montre que A est propre et presque invariant. ∎

On caractérise maintenant les groupes à deux bouts.

PROPOSITION 4.31. — *Le groupe G a deux bouts si et seulement si, pour tout ensemble propre presque invariant A, $\{g \in G,\ A \overset{p}{=} g(A)\}$ est infini.*

DÉMONSTRATION. Si $e(G) = 2$, il existe un sous-groupe H d'indice deux qui fixe ses bouts. Soit A un ensemble propre presque invariant donné par la proposition 4.28. Cet ensemble contient une unique composante non bornée car $e(G) = 2$ et A est propre. Donc A définit un bout de G. De plus, pour tout $h \in H$, $h(A)$ définit le même bout. Donc $A^* \cap h(A)$ est fini. De même, l'ensemble $h(A^*) \cap A$ est fini aussi. Du coup $h(A) \overset{p}{=} A$. Enfin, H étant infini, on peut conclure que

$$\{g \in G,\ A \overset{p}{=} g(A)\}$$

est infini aussi.

Réciproquement, supposons maintenant $\{g \in G,\ A \overset{p}{=} g(A)\}$ infini. Notons H ce sous-ensemble de G, qui est manifestement un groupe :

$$gh^{-1}(A) \triangle A \subset g(h^{-1}(A) \triangle A) \cup g(A) \triangle A$$

donc, si $g, h \in H$, alors gh^{-1} aussi.

On peut supposer $e \in A$ et $H \cap A$ infini. Comme H est infini, on peut trouver $h \in H$ tel que $h(A) \subset A \setminus \{e\}$. Du coup h engendre un sous-groupe cyclique et pour tout $n > 0$, on a $h^n(A) \subset A$. Soit K un compact fini connexe. Pour n assez grand, on aura $h^n(K) \subset A$. Soit B une composante connexe non bornée de $X \setminus K$ contenu dans A^* ; il vient $h^n(B)$ définit toujours (au moins) un bout dans A^* car on a $h^n(A) \overset{p}{=} A$. Mais tous les bouts de A^* intersectent K qui est fini. Donc $1 \leq e(A^*) < \infty$. Par symétrie, on obtient $e(A) = e(A^*) = 1$ donc $e(G) = 2$. ■

Pour la suite, et d'après la démonstration de la proposition 4.28, si $e(G) \geq 2$, il existe un sous-ensemble propre presque invariant A tel que ∂A est fini et connexe. Dorénavant, on ne considérera que ces ensembles presque invariants.

LEMME 4.32. — Si A, B sont propres et presque invariants, alors, pour presque tout $g \in B$, on a $g(A) \subset B$ ou $g(A^*) \subset B$. En particulier,

$$\{g \in G,\ g(A) \not\subset B, g(A) \not\subset B^*, g(A^*) \not\subset B, g(A^*) \not\subset B^*\}$$

est fini.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que pour presque tout $g \in B$, on a $g(A) \subset B$ ou $g(A^*) \subset B$. Comme B est presque invariant, pour tout sommet $a \in \partial A$, $B \setminus Ba^{-1}$ est fini, donc $ga \in B$ pour presque tout $g \in B$. Par suite, $g(\partial A)$ est contenu dans B et $g^{-1}(\partial B)$ est contenu dans une composante connexe C de A ou A^* pour presque tout $g \in B$. Si cette composante est dans A, alors A^* est contenu dans $g^{-1}(B)$ car ∂A est connexe et contenu dans $g^{-1}(B)$, donc $g(A^*) \subset B$; sinon, C est dans A^* et $g(A) \subset B$.

Par symétrie, on traite le cas $g \in B^*$. ■

LEMME 4.33. — Soit G ayant une infinité de bouts. Soient A, B, C propres et presque invariants. L'ensemble

$$\{g \in G,\ A \overset{p}{\subset} g(C) \overset{p}{\subset} B\}$$

est fini.

DÉMONSTRATION. On peut supposer $A \overset{p}{\subset} B$, mais $A \not\subset B$ en rajoutant à A un élément de B^* le cas échéant. Il vient

$$\{g \in G,\ A \overset{p}{\subset} g(C) \overset{p}{\subset} B\} \subset \{g \in G,\ g(C) \overset{p}{\subset} B, g(C) \not\subset B\} \cup \{g \in G,\ A \overset{p}{\subset} g(C), A \not\subset g(C)\}\,.$$

On considère $\{g \in G,\ g(C) \overset{p}{\subset} B, g(C) \not\subset B\}$, et on suppose que g n'est pas dans l'ensemble fini

$$\{g \in G,\ g(C) \not\subset B, g(C) \not\subset B^*, g(C^*) \not\subset B, g(C^*) \not\subset B^*\}\,.$$

Par conséquent, si $g(C) \overset{p}{\subset} B$ et $g(C) \not\subset B$, alors $g(C^*) \subset B^*$. En effet, on peut vérifier que les autres cas ne sont pas possibles. Du coup, on a $g(C) \overset{p}{=} B$, et g est dans un ensemble fini d'après la proposition 4.31. De même, l'ensemble $\{g \in G,\ A \overset{p}{\subset} g(C), A \not\subset g(C)\}$ est dans la réunion

$$\{g \in G,\ g(C) \not\subset A, g(C) \not\subset A^*, g(C) \not\subset A, g(C^*) \not\subset A^*\} \cup \{g \in G,\ g(C) \overset{p}{=} A\}$$

donc l'ensemble est fini. ∎

On dit qu'un ensemble propre presque invariant A est *étroit* si ∂A est de cardinal minimal parmi les ensembles presque invariants.

Lemme 4.34. — Si l'intersection décroissante d'ensembles propres presque invariants étroits est non vide, alors la suite est stationnaire.

Démonstration. On suppose que (A_n) est une suite décroissante d'ensembles étroits et $\cap A_n = B$ est non vide. On note k le cardinal de ∂A_n. Si $e \in \partial B$, alors $e \in \partial A_n$ pour tout n assez grand. Du coup, ∂B ne peut avoir plus que k arêtes.

On remarque que $A_n = (A_n \setminus B) \triangle B$. Du coup, l'un parmi $A_n \setminus B$ et B est infini. De plus, on a $\partial A_n = \partial(A_n \setminus B) \cup \partial B$. Donc, si l'un de ces ensembles est infini, il est étroit impliquant que l'autre n'a pas de bord et est donc vide. Cela implique que B est étroit car non vide. Du coup, $B = A_n$. ∎

Il existe donc des ensembles étroits qui sont minimaux pour l'inclusion. En particulier, il existe un ensemble étroit, propre, presque invariant qui est minimal parmi ceux qui contiennent e. On le note A_e.

Lemme 4.35. — Pour tout ensemble presque invariant propre B, l'une des conditions suivantes est vérifée : $A_e \overset{p}{\subset} B$, $A_e \overset{p}{\subset} B^*$, $A_e^* \overset{p}{\subset} B$ ou $A_e^* \overset{p}{\subset} B^*$.

Démonstration. On peut supposer que $e \in B$. Il suffit de montrer que l'un de $A_e \cap B$, $A_e \cap B^*$, $A_e^* \cap B$ et $A_e^* \cap B^*$ est fini. Notons ces ensembles $X_1, \ldots, X_4$. On a $\partial X_j \subset \partial A_e \cup \partial B$. Or chaque arête de $\partial A_e \cup \partial B$ est dans deux des ∂X_j, donc $\sum |\partial X_j| \leq 4k$. Si tous les X_j sont infinis, alors ils sont presque invariants, donc $|\partial X_j| = k$ par étroitesse. Cela implique $A_e \cap B = A_e$ car A_e est minimal pour la propriété de contenir e. Donc $A_e \subset B$, ce qui est en contradiction avec nos conditions. ∎

4.5.3. *Construction d'un arbre.* On commence par montrer comment construire un arbre.

Proposition 4.36. — *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble muni d'un ordre partiel et d'une involution sans point fixe qui vérifient (A1)-(A4). Il existe un arbre T dont les arêtes sont canoniquement en correspondance avec les éléments de $\mathcal{D}$, et les sommets avec un choix $\mathcal{C}$ d'un élément par paire $\{A, A^*\}$, $A \in \mathcal{D}$, tels que*
- *si $A, B \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{C}$ et $A \subset B$ alors $B \in \mathcal{C}$;*
- *toute suite décroissante de $\mathcal{C}$ admet un élément minimal.*

On définit un sommet v comme une partie de $\mathcal{D}$ telle que

(V1) pour tout $A \in \mathcal{D}$, l'ensemble $\{A, A^*\} \cap v$ est singleton ;

(V2) pour tout $A \in v$ et tout $B \in \mathcal{D}$, si $A \subset B$ alors $B \in v$;
(V3) toute suite décroissante (A_n) de v admet un élément minimal.

On définit alors une arête comme une paire (v, w) de sommets dont la différence symétrique a exactement deux éléments, c'est-à-dire qu'il existe $A \in v$, tel que $w = v \setminus \{A\} \cup \{A^*\}$.

On montre qu'il existe bien des sommets.

LEMME 4.37. — Soit $A \in \mathcal{D}$; l'ensemble

$$t(A) = \{B \in \mathcal{D} \setminus \{A^*\},\ A \subset B \text{ ou } A^* \subset B\}$$

est un sommet et A est minimal dans $t(A)$.

DÉMONSTRATION. Considérons $B, B^* \in \mathcal{D}$; d'après (A4), ou bien $A \subset B$ donc $B \in t(A)$, ou bien $A \subset B^*$ donc $B^* \in t(A)$, ou bien $A^* \subset B$ donc $B \in t(A)$, ou bien $A^* \subset B^*$ donc $B^* \in t(A)$. Ceci montre (V1). Supposons $B \subset C$ et $B \in t(A)$; si $A \subset B$, alors $A \subset C$ donc $C \in t(A)$, et si $A^* \subset B$ alors $A^* \subset C$ donc $C \in t(A)$. On a donc établi (V2). Supposons maintenant $(B_n)_n$ décroissante dans $t(A)$. Si $A \subset B_n$ et $A^* \subset B_{n+1}$, alors $B_n^* \subset A \subset B_n$, ce qui est impossible par (A2). De même, on ne peut avoir $A \subset B_n^*$ et $A \subset B_{n+1}$. Donc on a ou bien $A \subset B_n \subset B_0$ pour tout n, ou bien $A^* \subset B_n \subset B_0$ pour tout n. Mais (A3) implique que le nombre de B_n est fini dans chaque cas, ce qui montre que la suite admet un minimum, établissant ainsi (V3). Le fait que A soit minimal vient de la définition même de $t(A)$. ∎

On montre maintenant comment passer d'un sommet à un autre.

LEMME 4.38. — Soit v un sommet et soit $A \in v$; alors $w = v \setminus \{A\} \cup \{A^*\}$ est un sommet si et seulement si A est minimal dans v.

DÉMONSTRATION. Si A est minimal, montrons que w est un sommet : (V1) est automatiquement vérifié. Supposons $B \in w$ et $B \subset C$; si $B \in v$, alors on a aussi $C \in v$ donc $C \in w$ car $C \neq A$ puisque A est minimal ; si $B = A^*$, alors $C^* \subset A$, donc $C^* \notin v$ par minimalité de A, donc $C \in v$ et $C \in w$. Enfin, si (B_n) est une suite décroissante de w, ou bien elle admet A^* comme élément minimal, ou bien la suite est aussi dans v à partir d'un certain moment ; donc il existe un élément minimal.

On suppose maintenant que w est un sommet : si A n'était pas minimal, on aurait $A \in w$, contredisant (V1). ∎

DÉMONSTRATION. (Prop. 4.36) On doit vérifier que notre graphe est connexe et sans circuit fermé. On se fixe $A \in \mathcal{D}$ et on considère un sommet v. L'ensemble $v \setminus t(A)$ contient au moins un élément minimal, sinon on pourrait construire une suite décroissante dans v contredisant (V3). Soit A_1 cet élément ; il est aussi minimal dans v en entier, car si $B \subset A$ avec $B \in v \cap t(A)$, alors on aurait $A_1 \in t(A)$. Donc on peut construire $v_1 = v \setminus \{A_1\} \cup A_1^*$. De proche en proche, on construit une suite de sommets (v_n) ainsi que des éléments $(A_n)_n$, minimaux dans $v_{n-1} \setminus t(A)$. Montrons que cette suite est croissante. En effet, on ne peut avoir $A_{n+1} \subset A_n$ car A_n est minimal dans v_{n-1}, ni $A_{n+1} \subset A_n^*$ par (V1), car A_{n+1} est dans v_{n-1} ; enfin, si on a $A_{n+1}^* \subset A_n$, alors A_{n+1} ne serait pas minimal dans v_n. Par conséquent, (A4) implique que $A_n \subset A_{n+1}$. Du coup, $(A_n^*)_n$ est une suite décroissante dans $t(A)$ qui admet un minimum. On obtient que v_m est maximal, de sorte que $v_m = t(A)$. Donc le graphe est connexe.

Soient maintenant deux sommets v, w et supposons que l'on ait deux élément minimaux A et B dans $v \setminus w$. Du coup, on ne peut avoir $A \subset B$, ni $A \subset B^*$ (car on aurait $A^* \in v$), ni $A^* \subset B^*$ ni $A^* \subset B$ car on aurait $B \in w$. Donc (A4) implique qu'il n'y a qu'un seul élément minimal entre v et w. Donc il n'y a qu'un seul chemin reliant ces deux sommets.

Enfin, si A est minimal dans un sommet v, alors $v = t(A)$: remarquons d'abord que $A \in t(A) \cap v$, et prenons $B \in \mathcal{D} \setminus \{A^*\}$; ou bien $A \subset B$, donc $B \in v \cap t(A)$, ou bien $A \subset B^*$, donc $B^* \in v \cap t(A)$, ou bien $A^* \subset B$, donc $B \in t(A)$ et $B^* \subset A$, donc $B^* \notin v$ par minimalité de A dans v et $B \in v$, ou bien $A^* \subset B^*$, ce qui implique de même $B^* \in t(A) \cap v$. Donc A n'apparaît qu'une seule fois comme arête. ■

On suppose que G est un groupe de type fini avec une infinité de bouts. Soit A_e un ensemble étroit, propre, presque invariant qui est minimal parmi ceux qui contiennent e.

On note $\mathcal{A} = \{g(A_e),\ g \in G\}$; la presque égalité $\overset{p}{=}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces classes d'équivalence que l'on munit de la presque inclusion $\overset{p}{\subset}$ et du (presque !) passage au complémentaire $A \mapsto A^*$. Les conditions (A1), (A2) sont clairement vérifiées. La condition (A3) est donnée par le lemme 4.33 et la condition (A4) par le lemme 4.35. Donc la proposition 4.36 nous construit un arbre T. L'action de G sur $\mathcal{A}$ induit une action simpliciale de G sur T avec une seule orbite d'arêtes. De plus, la proposition 4.31 montre que le stabilisateur d'une arête est un groupe fini. Il reste à montrer que G n'a pas de point fixe. Or, comme l'action est transitive sur les arêtes, il suffit de montrer que T a au moins trois arêtes consécutives. D'après la proposition 4.31 et le lemme 4.32, on est dans une des situations suivantes :

(1) il existe $g \in A$ tel que $g(A) \overset{p}{\subset} A$, mais $g(A) \overset{p}{\neq} A$; dans ce cas $g^2(A) \overset{p}{\subset} g(A) \overset{p}{\subset} A$ sont nos trois arêtes ;

(2) il existe $g^* \in A^*$ tel que $g(A^*) \overset{p}{\subset} A^*$, mais $g^*(A^*) \overset{p}{\neq} A^*$; dans ce cas $(g^*)^2(A^*) \overset{p}{\subset} g^*(A^*) \overset{p}{\subset} A^*$ sont nos trois arêtes ;

(3) enfin, pour presque tout $g \in A$ et presque tout $g^* \in A^*$, on a $g(A) \overset{p}{\subset} A^*$ et $g^*(A^*) \overset{p}{\subset} A$; du coup, on peut trouver $h = g^*g$ tel que $h(A) \overset{p}{\subset} A$, mais $h(A) \overset{p}{\neq} A$, ce qui nous ramène au premier cas.

Donc l'action de G est sans point fixe sur T et les stabilisateurs d'arête sont finis. On en déduit que G admet un scindement au-dessus d'un groupe fini. Cela conclut la démonstration du théorème de Stallings.

4.6. Applications du théorème de structure des groupes à une infinité de bouts

4.6.1. *Groupes virtuellement libres.*

THÉORÈME 4.39 (Stallings). — *Un groupe sans torsion, virtuellement libre, est libre.*

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur le rang de G. Si G est fini, il est trivial, car sans torsion. Si $\mu(G) = 1$, alors il est cyclique par définition, donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Sinon, comme il est quasi-isométrique à un groupe libre (de rang au moins 2), on a $e(G) \geq 2$, donc le groupe G se scinde au-dessus du groupe trivial car il est sans torsion : ou bien $G = A * B$ ou bien $G = A*_e = G * \mathbb{Z}$. Dans ces deux cas, le théorème de Grushko nous dit que $\mu(A), \mu(B) < \mu(G)$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure. ■

REMARQUE 4.40. — Nous n'avons pas eu besoin du théorème de Stallings pour les groupes à deux bouts.

4.6.2. *Graphe fini de groupes finis.*

L'objet de ce paragraphe est le résultat suivant.

PROPOSITION 4.41. — *Le groupe fondamental d'un graphe fini de groupes finis contient un sous-groupe libre d'indice fini.*

La démonstration consiste en la construction d'un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$ de sorte que la restriction de φ à chaque groupe de sommet soit une injection. Ainsi, $\ker \varphi$ sera un sous-groupe d'indice fini de G, qui sera libre, car tout élément de torsion doit être contenu dans un conjugué d'un groupe de sommet.

Pour cela, si F est un groupe fini, on dit que $\rho : F \to \mathfrak{S}_n$ est une *représentation régulière* si l'action de F induite par ρ sur $\{1, \dots, n\}$ est libre. Remarquons que si F est d'ordre n, l'action par translation à gauche $\rho_s : F \to \mathfrak{S}_n$ définie par $\rho_s(g)(f) = gf$ est régulière.

On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.42. — *Une représentation régulière de F dans $\mathfrak{S}_n$ existe si et seulement si $|F|$ divise n. Dans ce cas, deux représentations sont conjuguées.*

DÉMONSTRATION. Comme l'action de F sur $\{1, \dots, n\}$ est libre, chaque orbite de F est de cardinal l'ordre de F, en bijection avec F par l'application $g \mapsto \rho(g)(x)$ où x est un représentant de l'orbite. Comme cet ensemble se décompose en orbites, l'ordre de F divise n.

Si n est un multiple de $|F|$, alors on peut considérer $\otimes_{1 \leq j \leq n/|F|} \rho_s : F \to \mathfrak{S}_n$.

Supposons maintenant que $\rho_1, \rho_2 : F \to \mathfrak{S}_n$ sont régulières. On considère des sections $s_j : \{1, \dots, n\}/\rho_j(F) \to \{1, \dots, n\}$, de sorte que $s_j(\xi) \in \xi$. Le nombre d'orbites sous ρ_1 et ρ_2 sont identiques, donc on a une bijection b entre espaces quotients. On définit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

ainsi. Le point j est dans une orbite ξ sous ρ_1, et s'écrit $j = \rho_1(g)(s_1(\xi))$. On pose alors $\sigma(j) = \rho_2(g)(s_2(b(\xi)))$.

Du coup, si $h \in F$, alors

$$\sigma\circ\rho_1(h)(j) = \sigma\circ\rho_1(h)(\rho_1(g)(s_1(\xi))) = \sigma\circ\rho_1(hg)(s_1(\xi)) = \rho_2(hg)(s_2(b(\xi))) = \rho_2(h)(\sigma(j))\,.$$

■

COROLLAIRE 4.43. — *Soient F un groupe fini et n un multiple de $|F|$, et soient F' et F'' deux sous-groupes de F.*

(1) *Une représentation régulière de F' s'étend en une représentation régulière de F.*
(2) *Si $\varphi : F' \to F''$ est un isomorphisme et $\rho : F \to \mathfrak{S}_n$ est une représentation régulière, alors il existe $s \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\rho(\varphi(g)) = \sigma\rho(g)\sigma^{-1}$ pour tout $g \in F'$.*

DÉMONSTRATION. On se donne $\rho : F' \to \mathfrak{S}_n$. Quitte à conjuguer ρ, on peut supposer que ρ est la restriction de la représentation $\otimes\rho_s$. Donc on a une extension à F.

On se donne $\rho : F \to \mathfrak{S}_n$, alors $\rho\circ\varphi$ et ρ sont deux représentations régulières de F', donc elles sont conjuguées. ■

DÉMONSTRATION. (prop. 4.42) Soit $\mathcal{G}$ un graphe fini de groupes finis. On se fixe un multiple n de l'ordre des groupes de sommet. Soit T_μ un sous-arbre maximal de Γ. On construit par récurrence une représentation régulière $\rho_v : G_v \to \mathfrak{S}_n$ de sorte que $\rho_{o(e)}|_{G_e} = \rho_{t(e)}|_{G_e}$, pour $e \subset T_\mu$. Enfin, si $e \in E_\mu$, il existe σ_e telle que $\rho_{o(e)}|_{G_e} = \sigma_e \circ \rho_{t(e)}|_{G_e} \circ \sigma_e^{-1}$.

Ces représentations induisent une représentation $\rho : G \to \mathfrak{S}_n$, régulière sur chaque sommet, en vertu de la propriété universelle des sommes amalgamées et des constructions HNN. Du coup, $\ker\varphi$ est sans torsion, car un tel élément fixe forcément un point de l'arbre de Bass-Serre, et se retrouverait donc dans un groupe de sommet. Donc $\ker\varphi$ opère librement sur un arbre, donc est libre, et comme il est d'indice fini dans G, il est aussi de rang fini. ■

4.6.3. *Accessibilité.* Soit G un groupe de type fini. Si $e(G) \geq 2$, alors le théorème de Stallings affirme que G se scinde au-dessus d'un groupe fini et on obtient un ou deux groupes de sommet. Si l'un d'eux a au moins deux bouts, alors on peut le scinder à nouveau et continuer ainsi de suite. On obtient ainsi un arbre enraciné et étiqueté par des sous-groupes de G. La racine est étiquetée par G et chaque sommet est étiqueté par un sommet du scindement de son parent au-dessus d'un sous-groupe fini. Un sommet est une feuille si le groupe associé est fini ou n'a qu'un seul bout. On dit que le groupe G est *accessible* si l'arbre ainsi associé à G est fini.

THÉORÈME 4.44 (Dunwoody [Dun1, Dun2]). — *On a les résultats suivants sur l'accessibilité.*

– *Un groupe de présentation finie est accessible.*
– *Il existe un groupe de type fini non accessible.*

Ce théorème est hors de portée vu les outils développés jusqu'à présent. Notons que la classe des groupes accessibles reste encore mystérieuse, bien qu'elle soit géométrique. Nous montrerons cependant une condition équivalente en termes de graphes de groupes.

Proposition 4.45. — *Un groupe de type fini est accessible si et seulement s'il est le groupe fondamental d'un graphe fini de groupes ayant au plus un bout avec des groupes de sommets finis.*

Raffinements de graphes de groupes.— Pour construire un graphe de groupes, nous allons donner un critère pour raffiner un graphe de groupes. Soit $\mathcal{G} = (\Gamma, \{G_v\}, \{G_e\}, G_e \hookrightarrow G_{t(e)})$ un graphe de groupes et supposons que v_0 est un sommet de Γ et que G_{v_0} soit lui-même le groupe fondamental d'un graphe de groupes $\mathcal{H} = (H, \{H_v\}, \{H_e\}, H_e \hookrightarrow H_{t(e)})$. On fait l'hypothèse suivante : pour chaque arête e de Γ incidente à v_0, il existe $h_e \in G_{v_0}$ et un sommet $v_e \in H$ tels que $h_e g^e h_e^{-1} \in H_v$ pour tout $g \in G_e$.

On construit un nouveau graphe de groupes comme suit : les sommets sont $V(\Gamma \setminus \{v_0\}) \cup V(H)$; les arêtes sont celles de Γ et de H. Les recollements sont les mêmes pour les arêtes non incidentes à v_0 ; pour celles-ci, on définit $t(e) = v_e$. Les groupes sont bien sûr les mêmes, munis des mêmes injections quand elles sont définies ; pour une arête incidente à v_0, on définit $G_e \to H_{v_e}$ par $g \mapsto h_e g^e h_e^{-1}$.

Fait 4.46. — *Le groupe fondamental de ce raffinement est isomorphe à G.*

Démonstration. La seule différence tient dans les injections des groupes d'arête dans G_{v_0} qui sont post-composées par des automorphismes intérieurs. Ces automorphismes consistent à changer le plongement Γ dans l'espace total et plus précisément les demi-arêtes joignant les points base des arêtes aux sommets correspondants, donc ils ne modifient pas le groupe fondamental. ■

Nous pouvons maintenant passer à la proposition.

Démonstration. (prop. 4.45) Si G est le groupe fondamental d'un graphe fini de groupes ayant au plus un bout avec des groupes de sommet finis, alors on a l'accessibilité en regroupant les sommets pour présenter G comme une itération finie de sommes amalgamées et de constructions HNN au-dessus de groupes finis.

Réciproquement, nous allons utiliser l'accessibilité et les raffinements de graphes de groupes pour construire un graphe fini de groupes ayant au plus un bout avec des groupes de sommets finis de groupe fondamental G. Pour cela, on doit vérifier que les plongements des groupes d'arête G_e dans G_{v_0} sont conjugués dans des graphes de sommet. En effet, si T désigne l'arbre de Bass-Serre de $\mathcal{H}$, alors on a une action de G_e sur T. D'après la proposition 3.37, G_e a un point fixe car G_e est fini. Du coup, G_e stabilise un point, donc c'est un sous-groupe d'un stabilisateur d'un sommet de T, donc un conjugué d'un groupe de $\mathcal{H}$. ■

RÉFÉRENCES

[Dun1] Martin J. Dunwoody. The accessibility of finitely presented groups. *Invent. Math.* **81**(1985), 449–457.

[Dun2] Martin J. Dunwoody. An inaccessible group. In *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, volume 181 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 75–78. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[SW] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

[Ser] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.