## 3. ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES MÉTRIQUES

On utilise [BH, Thu, Hat] comme références de base.

Soient $X$ un ensemble et $G$ un groupe. Une action de $G$ sur $X$ est donnée par un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$, où $\mathfrak{S}_X$ désigne le groupe des bijections de $X$.

L'orbite d'un point $x$ est l'ensemble $G(x) = \{\rho(g)(x),\ g \in G\}$, et son stabilisateur, ou sous-groupe d'isotropie est $G_x = \mathrm{stab}(x) = \{g \in G,\ g(x) = x\}$. On rappelle que si $x$ et $y$ sont dans la même orbite, alors leurs stabilisateurs sont conjugués.

Les orbites de $G$ induisent une partition de $X$ et la relation « être dans la même orbite » est la relation d'équivalence associée sur $X$. On note $X/G$ l'espace quotient, c.à.d. l'ensemble des orbites, ou des classes d'équivalence.

On dit que l'action est fidèle si $\rho$ est injective, transitive si $X$ n'est formé que d'une orbite et libre si quel que soit $x \in X$, $g(x) = x$ implique $g = \mathrm{Id}$.

Si $X$ est un espace topologique, on munit le groupe des homéomorphismes $\mathrm{Homéo}(X)$ de la topologie compacte-ouverte : un voisinage d'un homéomorphisme $f : X \to X$ est donné par l'ensemble des homéomorphismes $g : X \to X$ tels que $g(K) \subset U$, où $K \subset X$ est compact, $U \subset X$ est ouvert et $f(K) \subset U$.

Exercice 3.1. — *Montrer que si $X$ est un espace métrique, alors la topologie compacte-ouverte correspond à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

### 3.1. Actions proprement discontinues

On suppose maintenant que $G$ opère par homéomorphismes sur $X$, autrement dit, $\rho(G) \subset \mathrm{Homéo}(X)$. On s'intéresse aux notions suivantes.

(1) L'action est discrète si l'orbite d'un point quelconque est un ensemble discret.

(2) L'action est errante si tout $x \in X$ admet un voisinage $V$ tel que
$$\{g \in G,\ g(V) \cap V \neq \emptyset\}$$
est fini.

(3) L'action est proprement discontinue si, pour tous compacts $K$ et $L$ de $X$,
$$\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$
est fini.

(4) L'action est cocompacte s'il existe un compact $K$ tel que $X = \cup_{g \in G} g(K)$.

Exercice 3.2. — *Montrer que si une action est discrète alors $\rho(G)$ est un sous-groupe discret de* $\mathrm{Homéo}(X)$*. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.*

Exercice 3.3. — *Montrer que si l'action est errante, alors le stabilisateur de chaque point est fini.*

EXERCICE 3.4. — *Montrer qu'une action d'un groupe dénombrable sur un espace localement compact est proprement discontinue si et seulement si l'application*

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g(x), x) \end{aligned}$$

*est propre, où* $G$ *est muni de la topologie discrète. Montrer alors que* $\ker \rho$ *est fini.*

EXERCICE 3.5. — *Montrer qu'une action proprement discontinue est errante, et qu'une action errante est discrète. Les réciproques sont-elles vraies ?*

EXERCICE 3.6. — *On considère l'action de* $\mathbb{Z}$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *par*

$$g_n(x, y) = (2^n x, y/2^n)\,.$$

(1) *Montrer que cette action est errante.*
(2) *Montrer que le quotient n'est pas séparé.*

EXERCICE 3.7. — *Montrer que si un groupe* $G$ *opère proprement discontinûment sur un espace localement compact* $X$ *alors, pour tout* $x \in X$*, il existe un voisinage* $U$ *de* $x$ *tel que* $\operatorname{stab} x = \{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$.

**Actions par isométries.** — On s'intéresse maintenant à des actions de groupes par isométries. Si $g$ est une isométrie d'un espace métrique $X$, on note $\ell(g) = \inf\{d(x, g(x)), x \in X\}$ la *distance de translation* de $g$, et $\operatorname{Min} g = \{x \in X,\ d(x, g(x)) = \ell(g)\}$. On dit que $g$ est *semisimple* si $\operatorname{Min} g$ est non vide. On dit aussi que $g$ est *elliptique* si $g$ a un point fixe, *loxodromique* si $\ell(g) > 0$ et semisimple et *parabolique* sinon.

EXERCICE 3.8. — *Soit* $G$ *un groupe qui opère par isométries sur un espace métrique.*

(1) *Montrer que* $\operatorname{Min} g$ *est non vide si* $g$ *est semi-simple.*
(2) *Montrer que si* $g, h \in G$ *alors* $\ell(hgh^{-1}) = \ell(g)$ *et* $\operatorname{Min} hgh^{-1} = h\operatorname{Min} g$.

EXERCICE 3.9. — *Soit* $G$ *un groupe qui opère géométriquement sur un espace métrique propre. Montrer que*

(1) *Tous les éléments de* $G$ *sont semisimples.*
(2) *L'ensemble* $\{\ell(g),\ g \in G\}$ *est discret dans* $\mathbb{R}$.

### 3.2. Revêtements

On se réfère à [DD, Hat, Mas, Ber]. Un revêtement est une transformation continue $p : X \to Y$ surjective telle que, pour tout $y \in Y$, il existe un espace discret $D$ non vide, un voisinage $U$ de $y$ et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$ tels que $\phi(x) = (p(x), d)$ pour tout $x \in p^{-1}(U)$. On dit que $Y$ est *la base*, $X$ *l'espace total* de $p$, $p^{-1}(\{y\})$ *la fibre* de $p$ au-dessus de $y$, $U$ *un voisinage distingué* de $y$ et $\phi$ une *trivialisation locale* de $p$ au-dessus de $U$.

On en déduit qu'un revêtement est un homéomorphisme local surjectif. Un revêtement est *universel* si $X$ est simplement connexe.

Soit $f : Z \to Y$ une application continue ; un *relèvement de* $f$ est une application continue $F : Z \to X$ telle que $p \circ F = f$. On a les propriétés suivantes.

PROPOSITION 3.10. — *Soit $p : X \to Y$ un revêtement entre espaces connexes, localement connexes par arcs.*

(1) *Pour toute application continue $f : Z \to Y$ telle que $Z$ est connexe, localement connexe par arcs, $f_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$, où $f(z) = p(x)$, il existe une unique application continue $F : Z \to X$ telle que $F(z) = x$ et $p \circ F = f$.*

(2) *L'espace $Y$ est simplement connexe si et seulement si tout revêtement au-dessus de $Y$ est trivial.*

Un revêtement $p : X \to Y$ induit un morphisme $p_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ injectif.

Le groupe $\pi_1(Y, y)$ opère à droite sur la fibre $p^{-1}(\{y\})$ par relèvement des lacets : si $x \in p^{-1}(\{y\})$ et $\gamma$ un lacet basé en $y$, on considère le relevé $\tilde{\gamma}$ d'origine $x$ et on pose $x \cdot \gamma = \tilde{\gamma}(1)$ ; on vérifie que $x \cdot (\gamma_1 * \gamma_2) = (x \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2$.

PROPOSITION 3.11. — *Soit $p : (X, x) \to (Y, y)$ un revêtement entre espaces connexes et localement connexes par arcs. L'action de $\pi_1(Y, y)$ sur la fibre $p^{-1}(\{y\})$ est transitive, de stabilisateur $p_*(\pi_1(X, x))$, donc la fibre est en bijection avec $p_*(\pi_1(X, x))\backslash\pi_1(Y, y)$.*

*En particulier, $p^{-1}(\{y\})$ est fini si et seulement si $f_*(\pi_1(X, x))$ est d'indice fini dans $\pi_1(Y, y)$.*

DÉMONSTRATION. On écrit $G = \pi_1(Y, y)$, $H = p_*(\pi_1(X, x))$ et $G = \sqcup_{g \in T} Hg$ pour une famille $T$ de représentants.

Si $x'$ est un autre antécédent, on considère un chemin le reliant à $x$ : sa projection est un lacet basé en $y$, montrant ainsi que l'action est transitive.

Si $\gamma$ est un lacet basé en $y$, il s'écrit donc $h * g$ ; on le relève en un chemin $\tilde{\gamma}$ basé en $x$ de sorte que l'action de $h$ est un lacet basé en $x$ (par unicité du relèvement) et $g$ transforme $x$ en un autre relevé $x'$ de $y$. Si on avait $x = x'$, alors $g$ se relèverait dans $\pi_1(X, x)$, et serait donc dans $H$. Ceci montre que le stabilisateur de $x$ est bien $p_*(\pi_1(X, x))$. ■

On associe à un revêtement $p : X \to Y$ le groupe $\mathrm{Aut}_Y X$ des homéomorphismes $h$ de $X$ tels que $p \circ h = p$. On dit qu'un revêtement est *galoisien* si l'action de $\mathrm{Aut}_Y X$ est transitive sur les fibres de $p$, et on l'appelle le groupe de Galois de $X$.

PROPOSITION 3.12. — *Soient $X$ un espace localement compact et $G$ un groupe discret opérant sur $X$ par homéomorphismes et soit $p : X \to X/G$ la projection canonique. On munit $Y = X/G$ de la topologie quotient. Alors l'action de $G$ est libre et proprement discontinue si et seulement si $X/G$ est séparé et $p : X \to X/G$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois $G$.*

*Sous ces conditions, on suppose en outre que $X$ est connexe et localement connexe par arcs. Soient $x \in X$ et $y = p(x)$. Pour tout $\gamma \in \pi_1(Y, y)$, il existe un unique $g_\gamma \in G$ tel que $g_\gamma(x) = x \cdot \gamma$ et $\gamma \in \pi_1(X/G, y) \mapsto g_\gamma \in G$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $p_*(\pi_1(X, x))$.*

REMARQUE 3.13. — La démonstration montre que si les orbites sont discrètes et, pour chaque $x \in X$, il existe un voisinage $U$ tel que $g(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$, alors $X \to X/G$ est un revêtement.

DÉMONSTRATION. Supposons l'action libre et proprement discontinue.

Soit $x \in X$. Il existe un voisinage $U$ de $x$ tel que $g(U) \cap U = \emptyset$. En effet, si $K$ un voisinage compact de $x$ assez petit, seul un nombre fini de translations $g(K)$ intersectent $K$, avec $x \notin g(K)$ dès que $g \neq 1$. Donc $U = K \setminus \cup_{g \neq 1} g(K)$ convient. Par conséquent, $p^{-1}(G(U))$ est homéomorphe à $U \times G$, où on a muni $G$ de la topologie discrète. Par conséquent $p : X \to X/G$ est un revêtement, $G$ opère transitivement sur les fibres par définition donc il est galoisien de groupe de Galois $G$.

Si $x$, $y$ sont deux points d'orbites distinctes, on considère la réunion $K$ de deux voisinages compacts disjoints de ces points. Comme l'action est libre $K \setminus \cup_{g \neq 1} g(K)$ contient $\{x, y\}$ et comme elle est proprement discontinue, il s'agit encore de la réunion disjointe de voisinages de $x$ et $y$. Par conséquent $X/G$ est séparé.

Réciproquement, si $X/G$ est séparé et la projection $p : X \to X/G$ est un revêtement, alors pour tout $G(x)$, il existe un ouvert $G(U) \subset X/G$ tel que $p^{-1}(G(U))$ est homéomorphe à $G(U) \times G$. Par conséquent, l'action est libre. De plus, $X/G$ étant séparé, si $x$ et $y$ sont d'orbites distinctes, il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ qui les contiennent. Par conséquent, pour tout $(x, y) \in X \times X$, il existe $U \times V \ni (x, y)$ tel que $g(U) \cap V \neq \emptyset$ pour au plus un élément $g \in G$.

Soit $K \subset X$ un compact. On recouvre $K \times K$ par un nombre fini d'ouverts $U \times V$ vérifiant la propriété ci-dessus. Par suite, l'action est proprement discontinue.

On suppose maintenant que $p : X \to X/G$ est un revêtement galoisien, $X$ est connexe et localement connexe par arcs. Si $\gamma \in \pi_1(X/G, y)$, alors $x \cdot \gamma$ est un point de $X$ tel que $p(x \cdot \gamma) = y$. Comme l'action de $G$ est transitive sur les fibres, il existe $g_\gamma \in G$ tel que $g_\gamma(x) = x \cdot \gamma$ ; comme l'action de $G$ est libre, $g_\gamma$ est unique.

Remarquons que si $\gamma$ est un lacet de $X/G$ basé en $y$, $\tilde{\gamma}$ son relèvement basé en $x$, et si $g \in G$, alors $\tilde{\gamma}$ est un chemin joignant $x$ à $x \cdot \gamma$, $g \circ \tilde{\gamma}$ est le relevèment de $\gamma$ basé en $g(x)$ joignant $g(x)$ à $g(x \cdot \gamma)$, donc $g(x \cdot \gamma) = g(x) \cdot \gamma$ (les actions commutent).

Il vient, pour $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X/G, y)$,

$$(g_\gamma \circ g_{\gamma'})(x) = g_\gamma(x \cdot \gamma') = g_\gamma(x) \cdot \gamma' = (x \cdot \gamma) \cdot \gamma' = x \cdot (\gamma\gamma') = g_{\gamma\gamma'}(x)$$

impliquant donc que $\gamma \mapsto g_\gamma$ est un morphisme de groupes. Il est surjectif car $X$ est connexe par arcs, donc il existe $\tilde{\gamma}$ reliant $x$ à $g(x)$ pour $g \in G$ arbitraire. Donc $g = g_{p \circ \tilde{\gamma}}$.

Un élément du noyau est représenté par un lacet $\gamma$ tel que $x \cdot \gamma = x$, donc le relèvement de $\gamma$ est un lacet en $x$. La réciproque est claire. ■

Voilà une description un peu plus précise du groupe d'automorphismes de revêtement.

PROPOSITION 3.14. — *Soient $X$ un espace connexe, localement connexe par arcs et localement compact et soit $p : (X, x) \to (Y, y)$ un revêtement. Le groupe $\mathrm{Aut}_Y X$ est isomorphe à $p_*\pi_1(X, x)\backslash N(p_*\pi_1(X, x))$. Il opère sur $X$ librement et proprement discontinûment. Pour tout sous-groupe $G$ de $\mathrm{Aut}_Y X$, la projection canonique $p' : X/G \to Y$ est un revêtement.*

Si $H$ est un sous-groupe d'un groupe $G$, le *normalisateur* $N(H)$ de $H$ dans $G$ est le sous-groupe $N(H) = \{g \in\ G,\ gHg^{-1} = H\}$. C'est le plus grand sous-groupe de $G$ dans lequel $H$ est distingué.

PROPOSITION 3.15. — *Soit $p : (X, x) \to (Y, y)$ un revêtement avec $X$ connexe, localement connexe par arcs et localement compact. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *le revêtement $p$ est galoisien ;*

(2) *le sous-groupe $p_*(\pi_1(X, x))$ est distingué dans $\pi_1(Y, y)$ ;*

(3) *il existe un groupe discret $G$ opérant proprement discontinûment sur $X$ et un homéomorphisme $h : X/G \to Y$ tel que $h \circ \pi = p$, où $\pi : X \to X/G$ est la projection canonique.*

*Dans ce cas, on a $\mathrm{Aut}_Y X = G$, $\mathrm{Aut}_Y X$ est isomorphe à $p_*(\pi_1(X, x))\backslash\pi_1(Y, y)$ et $Y$ est homéomorphe à $X/\mathrm{Aut}_Y X$.*

**Revêtement universel.** — On dit qu'un espace $X$ est *semilocalement simplement connexe* si tout point $x \in X$ admet un voisinage $U$ tel que l'injection canonique $U \hookrightarrow X$ induise le morphisme trivial au niveau des groupes fondamentaux.

THÉORÈME 3.16. — *Soit $(Y, y)$ un espace connexe et localement connexe par arcs. Alors $Y$ admet un revêtement universel $\tilde{Y}$ si et seulement si $Y$ est semilocalement simplement connexe. Dans ce cas,*

(1) *le groupe fondamental $\pi_1(Y, y)$ opère proprement discontinûment et librement sur $\tilde{Y}$ ;*

(2) *si $H$ est un sous-groupe de $\pi_1(Y, y)$, alors il existe un revêtement pointé $p : (X, x) \to (Y, y)$, unique à isomorphisme près, tel que $p_*(\pi_1(X, x)) = H$ ;*

(3) *si $p : (X, x) \to (Y, y)$ est un revêtement, alors il existe un sous-groupe $H$ de $\pi_1(Y, y)$ isomorphe à $\pi_1(X, x)$.*

EXERCICE 3.17. — *Soit $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$ une présentation de groupe. Montrer que le groupe fondamental du graphe de Cayley $\mathcal{G}$ de $(G, S)$ est isomorphe à $\ker \pi$.*

**Espaces d'Eilenberg-MacLane.** — Etant donné un groupe $G$, un espace topologique $X$ est un *espace d'Eilenberg-MacLane* de type $K(G,1)$ s'il admet un revêtement contractile. Tout groupe admet toujours un tel espace parmi les CW-complexes : une manière de faire est de partir du 2-complexe construit au chapitre précédent et de rajouter des cellules de dimension de plus en plus grande afin de rendre le revêtement universel contractile. Deux CW-complexes de type $K(G,1)$ ont même type d'homotopie donc sont parfaitement équivalents au niveau de la topologie algébrique.

Une question délicate est de déterminer quels groupes admettent des $K(G,1)$ de dimension finie. Par exemple, on peut montrer qu'un groupe qui admet de la torsion n'admet aucun $K(G,1)$ de dimension finie.

**Applications aux groupes libres.** — On utilise la théorie des revêtements pour en tirer des informations sur les groupes libres.

Corollaire 3.18 (théorème de Schreier). — *Un sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Démonstration. Soit $G = \mathbb{F}(S)$ un groupe libre et $H$ un sous-groupe de $G$. Le groupe $G$ opère librement sur le graphe de Cayley $X$ associé à $S$, donc $H$ aussi. Le quotient $Y = X/H$ est un graphe, de groupe fondamental isomorphe à $H$ donc libre en vertu de la proposition 2.17. ■

Deux groupes $G$ et $H$ sont *commensurables* s'il existe un sous-groupe $A$ d'indice fini dans $G$ et un morphisme injectif $\alpha : A \to H$ tel que $\alpha(A)$ est d'indice fini dans $H$. Deux groupes de type finis commensurables sont quasi-isométriques, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Nous pouvons affiner notre résultat sur les groupes libres.

Corollaire 3.19. — *Tous les groupes libres de rang fini sont commensurables.*

Démonstration. Nous allons montrer que tout groupe libre est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{F}_2$, ce qui impliquera que l'intersection de deux tels sous-groupes sera d'indice fini dans les deux.

Soit $n \geq 3$. On considère

$$X = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C},\ |z-2| = 1\}$$

de groupe fondamental $\mathbb{F}_2$, et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \mapsto z^{n-1}$. Notons $Y = f^{-1}(X)$ qui est la réunion du cercle unité et de $n-1$ lacets attachés à ce cercle. On vérifie facilement que $p = f|_Y : Y \to X$ est un revêtement de degré $n-1$, que le groupe fondamental de $Y$ est isomorphe à $\mathbb{F}_n$. Donc son image par $p_*$ est d'indice fini dans $\mathbb{F}_2$. ■

### 3.3. Présentations de groupes

On établit deux propriétés fondamentales des groupes de présentation finie.

PROPOSITION 3.20. — *Un groupe $G$ est de présentation finie si et seulement s'il opère géométriquement sur un espace métrique géodésique propre simplement connexe.*

Cette démonstration est esquissée dans [Ser], inspirée par des travaux de A. Weil. Elle s'adapte au cas où l'action est proprement discontinue et cocompacte sur un espace connexe localement connexe par arcs, simplement connexe et s'il existe un ouvert connexe par arcs dont l'orbite recouvre l'espace.

DÉMONSTRATION. Si $G$ est de présentation finie, on associe le 2-complexe de Cayley $X$ défini par le corollaire 2.23. Si la présentation utilisée de $G$ est finie, alors $X$ est fini, donc compact. Du coup, $G$ opère proprement discontinûment avec quotient compact sur son revêtement universel. En identifiant chacune de ses 2-cellules avec un polygône régulier euclidien de côtés de longueur 1, on définit une distance de longueur compatible avec sa topologie rendant ainsi l'action de $G$ géométrique.

Réciproquement, supposons que $G$ opère géométriquement sur un espace métrique géodésique propre simplement connexe $X$. On se fixe $D > 0$ assez grand de sorte que $X = \cup_{g\in G} g(B)$, où $B = B(x_0, D)$.

Notons $S = \{g \in G,\ g(B)\cap B \neq \emptyset\}$ ; c'est un système de générateurs de $G$, cf. le lemme de Švarc-Milnor ; on note $\pi_G : \mathbb{F}(S) \to G$ la projection canonique. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples $(s,t) \in S^2$ tels que $B \cap s(B) \cap (s\circ t)(B) \neq \emptyset$. Comme $(s\circ t)(B)\cap B \neq \emptyset$, on a aussi $(s\circ t) \in S$. Posons

$$\mathcal{R} = \{st(s\circ t)^{-1},\ (s,t)\in\mathcal{C}\} \subset \mathbb{F}(S)\,.$$

Comme l'action de $G$ est proprement discontinue et $X$ est propre, $\mathcal{R}$ est un ensemble fini. Notre objectif est de montrer que $G$ est isomorphe à $H =< S|\mathcal{R} >$. On notera $\pi_H : \mathbb{F}(S) \to H$.

On remarque que $\mathcal{R} \subset \ker \pi_G$, donc il existe un épimorphisme $\varepsilon : H \to G$. De plus, $\varepsilon|_{\pi_H(S)}$ est injectif puisque $\pi_G$ est injectif sur $S$.

Observons d'abord que $X$ peut être décrit en prenant la réunion disjointe $\sqcup_{g\in G}\{g\}\times B$ et en identifiant $(g,x)$ à $(g',x')$ s'il existe $s\in S$ tel que $g' = gs$, $x \in B\cap s(B)$, $x' \in B\cap s^{-1}(B)$ et $s(x') = x$. On construit l'espace $Y$ en considérant la réunion disjointe $\tilde{Y} = \sqcup_{h\in H}\{h\}\times B$ et en identifiant $(h,x)$ avec $(h',x')$ s'il existe $s\in S$ tel que $h' = h\pi_H(s)$, $x\in B\cap\pi_G(s)(B)$, $x' \in B\cap \pi_G(s^{-1})(B)$, et $\pi_G(s)(x') = x$. La topologie discrète sur $H$ et la topologie de $B$ induisent une topologie sur $\tilde{Y}$ puis sur $Y$.

Comme $S$ engendre $H$ et $G$, $B$ est connexe par arcs et $G(B) = X$, on en déduit que $Y$ est connexe par arcs.

L'action par translation à gauche de $H$ sur lui-même induit une action de $H$ sur $Y$.

On considère enfin la projection $p : Y \to X$ induite par $\tilde{p} : (h,x) \mapsto \varepsilon(h)(x)$. On vérifie que si $(h,x)\sim(h',x')$, alors $\varepsilon(h')(x') = \varepsilon(h\pi_H(s))(x') = (\varepsilon(h)\circ\pi_G(s))(x') = \varepsilon(h)(x)$.

On a les propriétés suivantes sur $p$.

(1) $p$ est surjectif.

(2) $p$ est équivariante : $p(h_0(h,x)) = p(h_0h,x) = \varepsilon(h_0) \circ \varepsilon(h)(x) = \varepsilon(h_0) \circ p(h,x)$.

(3) on a $\tilde{p}^{-1}(B) = \ker \varepsilon \times B$, et comme $\varepsilon$ est injectif sur $\{\pi_H(s), s \in S\}$, on a aussi $p^{-1}(B) = \ker \varepsilon \times B$.

On en déduit que $p$ est continue et un revêtement. Or comme $X$ est simplement connexe, $p$ est un homéomorphisme impliquant ainsi que $\ker \varepsilon$ est trivial. Donc $G$ est isomorphe à $H$. ■

PROPOSITION 3.21. — *La propriété d'être de présentation finie est géométrique : si $G_1$, $G_2$ sont deux groupes de type fini quasi-isométriques, alors $G_1$ est de présentation finie si et seulement si $G_2$ est de présentation finie.*

DÉMONSTRATION. Supposons $G_1 =< S_1|\mathcal{R}_1 >$ de présentation finie. Soit $R$ la longueur du plus grand relateur. On construit $X_1$ en recollant au graphe de Cayley $\mathcal{G}_1$ une 2-cellule pour chaque mot de $\ll \mathcal{R}_1 \gg$ de longueur au plus $R$. On vérifie que $X_1$ est localement compact, simplement connexe, connexe par arcs. On munit $X_1$ d'une distance de longueur en identifiant chaque 2-cellule à un polygône régulier de côté 1. On vérifie que $X_1$ est géodésique et propre et que l'action de $G_1$ est géométrique.

Le groupe $(G_2, S_2)$ est de type fini. On se fixe une constante $S$ qui sera déterminée plus loin, et on considère l'espace $X_2$ obtenue en recollant une 2-cellule à chaque lacet de longueur au plus $S$ du graphe de Cayley associé $\mathcal{G}_2$. Comme ci-dessus, on munit $X_2$ d'une distance de longueur et on vérifie que $X_2$ est géodésique et propre et que l'action de $G_2$ est géométrique.

L'objet de cet argument est de montrer que $X_2$ est simplement connexe si $S$ est assez grand. La conclusion viendra de la proposition 3.20.

Partons de $(\lambda, c)$-quasi-isométries $\varphi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ et $\psi : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ quasi-inverses l'une de l'autre et qui préservent les sommets. On peut supposer qu'elles sont continues (en transformant une arête en un segment reliant l'image de ses extrémités.

Prenons un lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{G}_2$ que l'on peut supposer localement injectif. Le lacet $\psi \circ \gamma$ est un lacet dans $X_1$ simplement connexe, donc il existe une extension continue $F : \overline{\mathbb{D}} \to X_1$.

Nous allons utiliser $F$ pour définir une extension de $\gamma$ au disque comme suit. Nous allons considérer une triangulation $\mathcal{T}$ de $\overline{\mathbb{D}}$ et une application $G : \mathcal{T}^{(0)} \to X_2^{(0)}$ prolongeant $\gamma$ de sorte que la distance entre deux points voisins soient envoyés sur des sommets assez proches. Du coup, chaque bord de triangle de $\mathcal{T}$ sera envoyé sur un lacet de $X_2^{(1)}$ de longueur contrôlée, qui sera homotopiquement trivial si on choisit $S$ assez grand. Cela nous permettra d'étendre $\gamma$ au disque fermé, établissant ainsi la simple connexité de $X_2$.

On définit $g : \overline{\mathbb{D}} \to X_1^{(0)}$ en associant au point $x$ un sommet le plus proche de $F(x)$ au sens où ce sommet appartient à la fermeture de la cellule contenant $F(x)$ ; en particulier, si $F(x)$ est un sommet, alors $g(x) = F(x)$. On remarque que si $x, y$ sont assez proches, alors $F(x)$ et $F(y)$ seront dans des 2-cellules fermées voisines, donc la distance entre $g(x)$ et $g(y)$ sera au plus $R$.

Il existe donc une triangulation $\mathcal{T}$ de $\overline{\mathbb{D}}$ telle que

(1) le 0-squelette contient $\gamma^{-1}(X_1^{(0)})$ ;

(2) deux sommets voisins sont envoyés par $g$ à distance au plus $R$.

On définit maintenant $G : \overline{\mathbb{D}} \to X_2$ en plusieurs étapes. Sur $\mathbb{S}^1$, on pose $G = \gamma$. Si $v \in \mathcal{T}^{(0)}$ est un sommet intérieur, on pose $G(v) = \varphi(g(v))$.

Comme $G$ transforme $\mathcal{T}^{(0)}$ dans $X_2^{(1)}$, on peut prolonger $G$ à $\mathcal{T}^{(1)}$ en transformant chaque arête $(v, v')$ non incluse dans $\mathbb{S}^1$ en un segment $[G(v), G(v')]$ de $X_2^{(1)}$.

Soient $v, v'$ deux sommets voisins ; évaluons $d_2(G(v), G(v'))$.

– Si $v, v' \in \mathbb{S}^1$, alors $d_2(G(v), G(v')) = d_2(\gamma(v), \gamma(v')) \le 1$.

– Si $v \in \mathbb{S}^1$ et $v' \in \mathbb{D}$, alors

$$d_2(G(v), G(v')) \le d_2(\gamma(v), \varphi(g(v))) + d_2(\varphi(g(v)), \varphi(g(v'))) \,.$$

Le point $\gamma(v)$ est sur une arête de $X_1$ dont on considère une extrémité $\gamma(v'')$ ; du coup

$$\begin{array}{rcl} d_2(\gamma(v), \varphi(g(v))) & \le & d_2(\gamma(v), \gamma(v'')) + d_2(\gamma(v''), \varphi(g(v''))) + d_2(\varphi(g(v'')), \varphi(g(v))) \\ & \le & 1 + c + (\lambda R + c) \end{array}$$

en remarquant que $\varphi(g(v'')) = (\varphi \circ \psi)(\gamma(v''))$. Par conséquent,

$$d_2(G(v), G(v')) \le [\lambda R + 2c + 1] + \lambda R + c$$

– Si $v, v' \in \mathbb{D}$, alors

$$d_2(G(v), G(v')) \le R \,.$$

Du coup, l'image du bord d'un triangle de $\mathcal{T}$ est de longueur au plus $3(\lambda R + c + 1)$. Si on choisit $S = 3(\lambda R + c + 1)$ pour construire $X_2$, alors chacun de ses lacets sera contractile dans $X_2$, permettant ainsi de prolonger $G$ à $\overline{\mathbb{D}}$. ∎

### 3.4. **Le lemme du ping-pong**

Le lemme du ping-pong est une collection d'énoncés qui permet de reconnaître une somme amalgamée ou une extension HNN à partir de propriétés dynamiques. Les premières versions sont dues à Felix Klein. Celles qui suivent proviennent de [LS].

Proposition 3.22. — *Soit $G$ un groupe qui opère sur un ensemble $X$.*

(1) *Supposons que $A$ et $B$ sont deux sous-groupes de $G$, $C = A \cap B$, et qu'il existe deux sous-ensembles non vides et disjoints $X_A$ et $X_B$ de $X$ tels que $g(X_A) \subset X_B$ si $g \in A \setminus C$, $g(X_B) \subset X_A$ si $g \in B \setminus C$. Si $[A : C] > 2$, alors le sous-groupe $H$ de $G$ engendré par $A \cup B$ est isomorphe à $A *_C B$.*

(2) *Supposons que $A$ est un sous-groupe de $G$, $C_+$ et $C_-$ des sous-groupes de $A$ et $t \in G \setminus A$ tel que $tC_+t^{-1} = C_-$. On suppose aussi l'existence de trois ensembles non vides et disjoints deux à deux $X_+$, $X_-$ et $X_0$ tels que $t(X_+ \cup X_0) \subset X_+$, $t^{-1}(X_- \cup X_0) \subset X_-$, $g(X_+) \subset X_0$ dès que $g \in A \setminus C_+$ et $g(X_-) \subset X_0$ dès que $g \in A \setminus C_-$. Alors le groupe engendré par $A$ et $t$ est isomorphe à l'extension HNN de $A$.*

Avant d'en présenter une démonstration, nous allons approfondir notre étude des sommes amalgamées et des extensions HNN.

3.4.1. *Formes normales.*

PROPOSITION 3.23. — *Soient $A, B, C$ des groupes munis de morphismes $j_A : C \to A$ et $j_B : C \to B$ injectifs qui nous permettent d'identifier $C$ comme un sous-groupe de $A$ et de $B$. Soient $T_A \subset A$, $T_B \subset B$ des représentants de $A/C$ et $B/C$ de sorte que $a \in T_A \mapsto aC \in A/C$ et $b \in T_B \mapsto bC \in B/C$ soient des bijections, $C$ étant représenté par $e$ dans $T_A$ et $T_B$. Alors, pour tout $g \in G = A *_C B$, il existe $n \geq 1$, $a_1 \in T_A$, $a_2, \dots, a_n \in T_A \setminus \{e\}$, $b_n \in T_B$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in T_B \setminus \{e\}$ et $c \in C$ tels que*

$$g = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c\,.$$

*De plus, cette écriture est unique.*

L'écriture ci-dessus définit une *forme normale* pour l'écriture des éléments de $G$ à l'instar des mots réduits pour les groupes libres.

DÉMONSTRATION. Comme $G =< A, B >$, on sait que tout élément $g \in G$ s'écrit sous la forme $a'_1 b'_1 \dots a'_n b'_n$, avec $a'_j \in A$ et $b'_j \in B$. Nous allons procéder par récurrence sur la « longueur » $n$ de $g$.

Si $n = 1$, il existe $a_1 \in T_A$ et $c_1 \in C$ tels que $a'_1 = a_1 c_1$ ; de même, il existe $b_1 \in T_B$ et $c \in C$ tels que $c_1 b'_1 = b_1 c$, de sorte que $g = a_1 b_1 c$.

Supposons maintenant le lemme vrai pour les mots de longueurs de $n$, et prenons un mot de longueur $n+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$g = a_1 b_1 \dots a_k b_k (c' a'_{n+1}) b'_{n+1}$$

avec $k \leq n$. Or, le cas $n = 1$ indique que $(ca'_{n+1})b'_{n+1} = a_{k+1} b_{k+1} c$. Il faut maintenant discuter selon la valeur de $b_k$. Si $b_k \neq e$, alors on obtient bien l'écriture recherchée. Si $b_k = e$, on obtient une écriture de longueur $k \leq n$

$$g = a_1 b_1 \dots (a_k a_{k+1})(b_{k+1} c)$$

à laquelle l'hypothèse de récurrence s'applique.

Nous allons définir une action fidèle de $A *_C B$ sur l'ensemble $E$ des mots formels produisant des formes normales, pour en déduire l'unicité de cette écriture.

Commençons par définir une action de $B$. On pose, pour $b \in B$ et $(a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c) \in E$,

$$b \cdot (a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c) = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b' c' \text{ où } b_n c b = b' c',\ b' \in T_B, c' \in C\,.$$

On vérifie que le résultat est bien dans $E$ et qu'on obtient ainsi une action à droite de $B$.

Passons à $A$ : pour $a \in A$ et $(a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c) \in E$,

$$a \cdot (a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c) = \begin{cases} a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n a' c' & \text{si } b_n \neq e \text{ et où } ca = a'c', a' \in T_A \\ a_1 b_1 a_2 b_2 \dots b_{n-1} a' b_n c' & \text{si } b_n = e \text{ et où } a_n c a = a'c', a' \in T_A \end{cases}$$

On vérifie aussi que le résultat est bien dans $E$ et qu'on obtient une action à droite de $A$. Ces deux actions coïncident au-dessus $C$, induisant une action de $A *_C B$. Si $g = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c$, alors, on montre que, appliqué au mot vide, on obtient le mot $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n c$. Du coup, $g$ ne peut avoir qu'une seule écriture. ■

Corollaire 3.24. — *Soient $A$, $B$ et $C$ trois groupes munis de morphismes injectifs $j_A : C \to A$ et $j_B : C \to B$. Alors $A$ et $B$ s'injectent dans $A *_C B$,*

Démonstration. D'après la proposition 3.23, on a unicité de l'écriture. En particulier, on obtient des injections de $A$ et $B$ en prenant $ac$, $a \in T_A$, $c \in C$, (avec $b = e$) et $bc$, $b \in T_B$, $c \in C$ et $a = e$. ■

Nous avons un énoncé similaire pour les extensions HNN.

Proposition 3.25. — *Soient $A, C$ des groupes munis de morphismes $j_+ : C \to A$ et $j_- : C \to A$ injectifs qui nous permettent d'identifier $C$ à deux sous-groupes $C_+$ et $C_-$ de $A$ de deux manières. Soient $T_\pm \subset A$ des représentants de $A/C_\pm$ de sorte que $a \in T_\pm \mapsto aC_\pm \in A/C_\pm$ soient des bijections et $C_\pm$ est représenté par $e$ dans $T_\pm$. Alors, pour tout $g \in G = A*_C =< A, t | j_+(c)t = tj_-(c), c \in C >$, il existe $n \geq 1$, $\varepsilon_j = \pm 1$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, des éléments $a_j \in T_{\varepsilon_j}$, $a_j \neq e$ si $j \neq 1$, des entiers $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a \in A$ tels que*

$$g = a_1 t^{\varepsilon_1 n_1} \dots a_k t^{\varepsilon_k n_k} a\,.$$

*De plus, cette écriture est unique.*

Démonstration. Comme $G =< A, t >$, on sait que tout élément $g \in G$ s'écrit sous la forme $a'_1 t^{n_1} \dots a'_k t^{n_k} a'_{k+1}$, $a'_j \in A$, $a'_j \neq e$ si $j \neq 1, k+1$ et $n_j \in \mathbb{Z}$. Nous allons procéder par récurrence sur la « longueur » $\ell = \sum |n_j|$ de $g$.

Si $\ell = 1$, alors $g = a'_1 t^\varepsilon a'$, avec $\varepsilon = \pm 1$. On choisit $a_1 \in T_\varepsilon$ de sorte que $a'_1 = a_1 j_\varepsilon(c)$ et $g = a_1 j_\varepsilon(c) t^\varepsilon a' = a_1 t^\varepsilon (j_{-\varepsilon}(c) a')$.

Supposons maintenant le lemme vrai pour les mots de longueurs de $\ell = \sum_{1 \leq j \leq k} |n_j|$, et prenons un mot de longueur $\ell + 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$g = a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a a'_{k+1} t^\varepsilon a'$$

avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. On écrit $aa'_{k+1}$ sous la forme $a_{k+1}j_\varepsilon(c)$, où $a_{k+1} \in T_\varepsilon$, de sorte que

$$g = a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a_{k+1} t^\varepsilon j_{-\varepsilon}(c) a' .$$

Nous allons définir une action fidèle de $A *_C$ sur l'ensemble $E$ des mots formels produisant des formes normales, pour en déduire l'unicité de cette écriture.

Commençons par définir une action de $A$. On pose, pour $a \in A$ et $(a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a') \in E$,

$$a \cdot (a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a') = a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} (aa') .$$

On vérifie que le résultat est bien dans $E$ et qu'on obtient ainsi une action à droite de $A$.

Passons à $t^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ : pour $(a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a) \in E$, on écrit $a = a_{k+1} j_\varepsilon(c)$, $a_{k+1} \in T_\varepsilon$ ; et on définit

$$t^\varepsilon \cdot (a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a) \quad = \quad \begin{cases} a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a_{k+1} t^\varepsilon j_{-\varepsilon}(c) & \text{si } a_{k+1} \neq e \\ a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k + \varepsilon} j_{-\varepsilon}(c) & \text{si } a_{k+1} = e \text{ et } n_k \neq (-\varepsilon) \\ a_1 t^{n_1} \dots a_{k-1} t^{n_{k-1}} (a_k j_{-\varepsilon}(c)) & \text{si } a_{k+1} = e \text{ et } n_k = (-\varepsilon) \end{cases}$$

On vérifie aussi que l'on a bien une action à droite de $< t >$ sur $E$ et que ces deux actions définissent bien une action de $A *_C$ sur $E$.

Si $g = a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a$, alors, on montre que, appliqué au mot vide, on obtient le mot $a_1 t^{n_1} \dots a_k t^{n_k} a$. Du coup, $g$ ne peut avoir qu'une seule écriture. ∎

Corollaire 3.26. — *Soient $A$ et $C$ deux groupes munis de morphismes injectifs $j_1 : C \to A$ et $j_2 : C \to A$. Alors $A$ s'injecte dans $A *_C$,*

Démonstration. D'après la proposition 3.25, on a unicité de l'écriture. En particulier, on obtient l'injection de $A$ en prenant $a$, $a \in A$. ∎

Exercice 3.27. — *Montrer que si $\alpha : A \to A$ est un isomorphisme de groupes, alors $A *_A$ est isomorphe à un produit semidirect $A \rtimes \mathbb{Z}$.*

3.4.2. *Ping-pong.* On établit le lemme de ping-pong.

Démonstration. On commence par la situation amalgamée. On utilise l'hypothèse $[A : C] > 2$ comme suit : si $a \in A \setminus C$, alors $a(X_B) \subsetneq X_A$. En effet, on choisit $a' \notin (C \cup aC)$ de sorte que $a^{-1}a'(X_B) \cap X_B = \emptyset$ et $a'(X_B)$ et $a(X_B)$ sont deux sous-ensembles disjoints et non vides de $X_A$.

Comme on a les injections $A, B \hookrightarrow H$ qui coïncident au-dessus de $C$, on obtient un morphisme $\varphi : A *_C B \to H$ par la propriété universelle qui est surjectif puisque $H =< A \cup B >$. Il reste à montrer l'injectivité.

On confond dans la suite les éléments de $H$ avec ceux de la somme amalgamée. On montre que si $g \neq e$ alors $\varphi(g) \neq e$. C'est bien sûr le cas des éléments de $(A \cup B) \setminus \{e\}$.

Un élément de $A *_C B \setminus (A \cup B)$ s'écrit $a_1 \ldots b_n$, avec $a_j \in A \setminus C$ si $j \geq 2$, $b_j \in B \setminus C$ si $j \leq n-1$, d'après la proposition 3.23.

Le principe du lemme du ping-pong est de remarquer que pour $a \in A \setminus C$ et $b \in B \setminus C$, on a $ab(X_A) \subset a(X_B) \subsetneq X_A$, impliquant ainsi $ab \neq e$.

Supposons $a_1 \in A \setminus C$. Si $b_n \notin C$, alors, d'après le principe évoqué ci-dessus, $g(X_A) \subsetneq X_A$, donc $g \neq e$. Si $b_n \in C$, alors $a_{n-1}c \in A \setminus C$ et on trouve $g(X_B) \subset X_A$, donc $g \neq e$. Si $a_1 \in C$, alors, pour $a \in A \setminus C$, on se ramène au cas précédent en considérant $aga^{-1}$ : on a donc $aga^{-1} \neq e$, et $g \neq e$. Ceci montre que $\varphi$ est injectif.

Passons maintenant au cas de l'extension HNN. La propriété universelle nous fournit aussi $\varphi : A*_C \to H$, surjectif où $H =< A \cup \{t\} >$. Ici, on a directement $t(X_+) \subsetneq X_+$, $t(X_0) \subsetneq X_+$ et $t^{-1}(X_-) \subsetneq X_-$, $t^{-1}(X_0) \subsetneq X_-$. Cela nous montre déjà que $< t >$ est infini cyclique.

Remarquons que si $C_\pm = A$, alors $A$ est distingué dans $H$, et tout élément de $A*_A$ s'écrit de manière unique sous la forme $g = t^n a$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Comme $t \notin A$, on a bien injectivité de $A*_C$ dans $H$.

Supposons maintenant que $C_\pm \neq A$ de sorte que $A \setminus (C_+ \cap C_-) \neq \emptyset$. Le lemme du ping-pong s'appuie sur la remarque suivante. Si $n > 0$ et $a \in A \setminus C_+$, alors $at^n(X_0 \cup X_+) \subsetneq X_0$ et si $n < 0$, et $a \in A \setminus C_-$, alors $at^n(X_0 \cup X_-) \subsetneq X_0$.

Prenons la forme normale de $g \in A*_C$ : $g = a_1 t^{n_1} \ldots a_k t^{n_k} a$.

Si $a \notin C_+ \cap C_-$, alors, en choisissant convenablement le signe $\varepsilon = \pm 1$, on obtient $a(X_\varepsilon) \subset X_0$, puis finalement $(a_1 t^{n_1})^{-1} g(X_\varepsilon) \subsetneq X_0$. Ecrivons $n_1 = \eta |n_1|$, $\eta = \pm 1$ ; il vient $a_1^{-1} g(X_\varepsilon) \subsetneq X_\eta$ ; si $a_1 = e$, alors $g \neq e$ car l'inclusion est stricte ; si $a_1 \neq e$ alors $g(X_\varepsilon) \subset X_0$ et $g \neq e$.

Supposons $a \in C_+ \cap C_-$. Si $a_1 \neq e$, alors $aga^{-1}(X_0) \subsetneq X_0$, donc $g \neq e$, si $a_1 = e$, on choisit $a' \in A \setminus C_\eta$, et on montre que $a' g (a')^{-1} \neq e$.

EXERCICE 3.28. — *On suppose que $G$ est un groupe admettant deux sous-groupes $A$ et $B$ dont la réunion engendre $G$. On suppose aussi que $G$ opère sur un ensemble $X$ qui contient deux sous-ensembles $X_A$ et $X_B$ disjoints et non vides de sorte que*

(1) *pour tout $a \in A \setminus \{e\}$, on a $a(X_B) \subset X_A$ et*

(2) *pour tout $b \in B \setminus \{e\}$, on a $b(X_A) \subset X_B$.*

*Montrer que $G$ est ou bien isomorphe au produit libre $A * B$ ou bien $A$ et $B$ sont composés chacun de deux éléments et $G$ est isomorphe à un groupe diédral.*

*Montrer qu'un groupe diédral admet une action comme ci-dessus.*

EXERCICE 3.29. — *Enoncer et montrer un lemme du ping-pong assurant qu'un groupe est un produit libre de $n$ facteurs, $n \geq 3$.*

3.4.3. *Applications.* On donne quelques exercices basés sur le lemme du ping-pong pour montrer l'existence de sous-groupes libres.

EXERCICE 3.30. — *Soient* $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *deux matrices dont les valeurs propres sont de module différent de* 1 *et les droites propres de* $A$ *sont distinctes de celles de* $B$.

(1) *On définit, pour* $\varepsilon > 0$ *fixé et dans une base de vecteurs propres de* $A$,

$$\begin{aligned} X_A^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |y| < \varepsilon |x|\}; \\ X_A^- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |x| < \varepsilon |y|\}; \\ X_A &= X_A^+ \cup X_A^-. \end{aligned}$$

*Montrer que pour* $|n|$ *assez grand, on a* $A^n(\mathbb{R}^2 \setminus X_A) \subset X_A$.

(2) *Montrer qu'il existe* $n, m > 0$ *tel que* $A^n$ *et* $B^m$ *engendrent un groupe libre de rang* 2.

EXERCICE 3.31. — *Pour* $k \geq 2$, *on considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

*Montrer que* $A$ *et* $B$ *engendrent un sous-groupe libre de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. *On pourra considérer les ensembles*

$$\begin{aligned} X^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |y| < |x|\}; \\ X^- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < |x| < |y|\}. \end{aligned}$$

EXERCICE 3.32. — *On rappelle qu'une matrice de* $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *opère par transformations homographiques sur la sphère de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}}$ *comme suit*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

*On considère* $g \geq 2$ *couples de disques fermés deux à deux disjoints* $D_1, D'_1, \ldots, D_g, D'_g$. *Pour chaque* $j$, *on considère* $A_j \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *tel que* $A_j(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_j) = D'_j$. *Montrer que* $< A_1, \ldots, A_g >$ *est isomorphe à* $\mathbb{F}_g$. *Un tel groupe définit un groupe de Schottky.*

**Alternative de Tits.** — Un groupe $G$ satisfait l'alternative de Tits lorsque tout sous-groupe de type fini de $G$ contient un groupe libre non abélien ou un sous-groupe résoluble d'indice fini. Cette alternative a été établie par Tits pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(n;k)$ où $k$ est n'importe quel corps [Tit]. La démonstration de ce type d'alternative passe en général par un lemme du ping-pong qui établit l'existence d'un sous-groupe libre de rang 2 lorsque le groupe n'est pas virtuellement résoluble.

**Paradoxe de Banach-Tarski.** — Ce paradoxe montre que l'on peut découper la boule unité de $\mathbb{R}^3$ en plusieurs parties pour ensuite reformer deux boules distinctes isométriques à la boule initiale.

Le point de départ est une décomposition dite *paradoxale* du groupe libre $\mathbb{F}_2 =< a, b >$. Si $x$ est une lettre, on note $S(x)$ la partie de $\mathbb{F}_2$ représentée par des mots réduits commençant par $x$. On a donc

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \sqcup S(a) \sqcup S(a^{-1}) \sqcup S(b) \sqcup S(b^{-1}) = S(a) \sqcup aS(a^{-1}) = S(b) \sqcup bS(b^{-1})\,.$$

On constate donc que l'on peut couper $\mathbb{F}_2$ en cinq morceaux, en utiliser deux pour refaire le groupe, quitte à les translater.

L'exercice ci-dessous montre que l'on peut trouver deux rotations de la sphère qui engendre un groupe libre $G$ à deux générateurs. Ce groupe opère sur $\mathbb{S}^2$ par rotations. L'ensemble des points fixes de ces rotations forme un ensemble dénombrable $D$ invariant par $G$.

Par l'axiome du choix, on peut considérer un ensemble $Z \subset \mathbb{S}^2$ de représentants de $(\mathbb{S}^2 \setminus D)/G$. Comme l'action de $G$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est libre, on a la partition de la sphère suivante :

$$\mathbb{S}^2 \setminus D = Z_1 \sqcup Z_2 \sqcup Z_3 \sqcup Z_4$$

où $Z_1 = S(a)Z \sqcup Z \sqcup B$, $Z_2 = S(a^{-1})Z \setminus B$, $Z_3 = S(b)Z$ et $Z_4 = S(b^{-1})Z$, avec $B = \cup_{k>0} a^{-k}Z$. On vérifie que $aZ_2 = Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4$ et $bZ_4 = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_4$.

Du coup, on a décomposé $\mathbb{S}^2 \setminus D$ en quatre morceaux, on a recollé les morceaux deux à deux ($Z_1$ avec $aZ_2$ et $Z_3$ avec $bZ_4$) afin de former deux copies de $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Il reste à montrer comment traiter $D$, puis à étendre cette construction à la boule.

Montrons comment décomposer $\mathbb{S}^2$ pour former $\mathbb{S}^2 \setminus D$ : on considère un diamètre de $\mathbb{S}^2$ qui n'intersecte pas $D$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\rho_\theta$ la rotation d'angle $\theta$ d'axe ce diamètre. L'ensemble des angles $\theta$ tels que $\rho_\theta(D) \cap D \neq \emptyset$ est dénombrable car $D$ l'est. Par suite, on peut se fixer un angle $\alpha$ tel que $\rho_\alpha^k(D) \cap D = \emptyset$ pour tout $k \neq 1$. Notons $E = \cup_{k \geq 0} \rho^k(D)$, et décomposons $\mathbb{S}^2 = (\mathbb{S}^2 \setminus E) \sqcup E$. En remarquant que $\rho(E) = E \setminus D$, on peut recomposer $\mathbb{S}^2 \setminus D = (\mathbb{S}^2 \setminus E) \sqcup \rho(E)$. Ceci montre que l'on peut découper la sphère en un nombre fini de morceaux, appliquer quelques isométries sur chaque morceau et fabriquer deux sphères.

Pour passer à la boule $\mathbb{B}^3$, on peut commencer par remarquer qu'en la voyant comme la réunion de ses rayons issus de l'origine, on obtient ainsi une décomposition paradoxale de la boule épointée. Pour passer à la boule, on procède de manière similaire.

EXERCICE 3.33. — (1) *Montrer que les matrices* $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ *correspondent à des rotations de* $\mathbb{R}^3$ *dont on précisera l'angle et l'axe.*

(2) *Montrer que $A$ et $B$ engendrent un groupe libre. On pourra considérer*

$$X_1 = \left\{ \frac{1}{5^k} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3;\ k \geq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, c \not\equiv 0 \bmod 5, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2c \\ c \end{pmatrix} \bmod 5 \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \frac{1}{5^k} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3;\ k \geq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, a \not\equiv 0 \bmod 5, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ \pm 2a \\ 0 \end{pmatrix} \bmod 5 \right\}.$$

### 3.5. **Actions sur les arbres**

On suit [CM]. On appelle un *arbre réel* un espace métrique géodésique $T$ tel que toute paire de points est jointe par un unique arc, c'est-à-dire par un unique chemin $\gamma : [0,1] \to T$ injectif. Un arbre est en particulier contractile. Les arbres simpliciaux (les CW-complexes de dimension 1 sans boucle) sont des exemples dès qu'on les munit d'une distance de longueur rendant chaque arête isométrique à un segment de $\mathbb{R}$.

Un sous-ensemble $A \subset T$ est *convexe* si $[a,b] \subset A$ dès que $a, b \in A$. Autrement dit $A$ est un sous-arbre de $T$.

FAITS 3.34 (géométriques). — *Un arbre $T$ jouit des propriétés suivantes.*

(1) *Une intersection non vide de sous-arbres est un sous-arbre.*

(2) *Si $a, b, c \in T$ alors $[a,b] \cap [a,c] \cap [b,c]$ est un singleton, appelé le point médian $m = m(a,b,c)$ de $\{a,b,c\}$.*

(3) *Soient $x_0, \ldots, x_n \in T$ tel que $[x_{j-1}, x_j] \cap [x_j, x_{j+1}] = \{x_j\}$ pour tout $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors $\cup_{0 \leq j < n} [x_j, x_{j+1}] = [x_0, x_n]$.*

(4) *Si $T_1$ et $T_2$ sont deux sous-arbres fermés et disjoints, alors il existe un unique segment géodésique $[a,b]$ tel que $T_1 \cap [a,b] = \{a\}$ et $T_2 \cap [a,b] = \{b\}$. On appelle cet arc le pont entre $T_1$ et $T_2$.*

(5) *Si $n$ sous-arbres s'intersectent deux à deux, alors leur intersection est un sous-arbre non vide.*

DÉMONSTRATION. Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-arbres. Si $x, y \in \cap_{\alpha \in A} T_\alpha$, alors, pour chaque $\alpha \in A$, on a $\{x, y\} \subset T_\alpha$ donc $[x,y] \subset T_\alpha$, ce qui établit $[x,y] \subset \cap_{\alpha \in A} T_\alpha$.

Soient $a, b, c$ trois points de $T$. D'après ci-dessus, on a $[a,b] \cap [a,c] = [a,m]$ puisque $a \in [a,b] \cap [a,c]$. Il vient $[m,c] \cap [m,b] = \{m\}$ donc $[b,m] \cup [m,c] = [b,c]$ et $[a,b] \cap [a,c] \cap [b,c] = [a,m] \cap [b,c] = \{m\}$.

La juxtaposition de segments qui n'ont qu'un point en commun est bien un arc car, dans un arbre, un chemin localement injectif est un arc : en effet, supposons $\gamma : I \to T$ un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Notons $t \in [0,1]$ un paramètre tel que $d_T(\gamma(0), \gamma(t))$

est maximal. Du coup, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et si $m_\pm$ désigne le point médian de $\{\gamma(0), \gamma(t), \gamma(t \pm \varepsilon)\}$, alors $[\gamma(t), m_+] \cap [\gamma(t), m_-]$ est d'intérieur non vide et on peut conclure que $\gamma$ n'est pas localement injectif au voisinage de $t$.

Soient $T_1$ et $T_2$ deux sous-arbres disjoints et prenons $x_1 \in T_1$ et $x_2 \in T_2$. Il vient $[x_1, x_2] \cap T_1 = [x_1, a]$ et $[x_1, x_2] \cap T_2 = [b, x_2]$. Du coup $[a, b]$ est un pont entre $T_1$ et $T_2$. Si $[a', b']$ est un autre pont, alors $[b, b'] \subset T_2$ et donc $[a, b] \cup [b, b'] \cup [b', a']$ est un arc qui joint deux points de $T_1$, donc est contenu dans $T_1$ — une contradiction.

Pour montrer que l'intersection d'arbres qui s'intersectent deux à deux est non vide, il suffit de traiter le cas de trois arbres : si $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ est vide, on considère le pont $\gamma$ reliant $T_1 \cap T_3$ et $T_2 \cap T_3$. Ceci correpond aussi à un pont entre $T_1$ et $T_2$, ce qui contredit que leur intersection est non vide. ■

PROPOSITION 3.35 (classification des isométries). — *Soit $T$ un arbre réel. Une isométrie $g : T \to T$ est semisimple. De plus, pour tout $x \in T$, on a $d(x, g(x)) = \ell(g) + 2d(x, \mathit{Min}\, g)$. Plus précisément, on a les deux cas suivants.*

(1) *$g$ est elliptique : $\ell(g) = 0$ et l'ensemble de ses points fixes est un sous-arbre de $T$ non vide ; toute orbite est bornée. De plus, pour tout $x \in T$, $[x, g(x)] \cap \mathrm{Fix}(g)$ est un singleton.*

(2) *$g$ est hyperbolique : $\ell(g) > 0$ et $\mathit{Min}\, g$ est une géodésique isométrique à $\mathbb{R}$, appelé l'axe $A_g$ de $g$ ; l'action de $g$ est conjuguée à celle de la translation $x \mapsto x + \ell(g)$ sur $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps que $g$ ait un point fixe. Alors $\ell(g) = 0$ et $\mathrm{Min}\, g = \mathrm{Fix}(g)$. Si $a, b$ sont deux points fixes, alors $g$ fixe tout le segment point par point. En effet, d'abord, $g([a, b]) = [g(a), g(b)] = [a, b]$ et si $c \in [a, b]$ alors $g(c) \in [a, b]$ et $d(a, g(c)) = d(g(a), g(c)) = d(a, c)$ donc $g(c) = c$. Du coup, $\mathrm{Fix}(g)$ est un sous-arbre.

Prenons $x \in T \setminus \mathrm{Fix}(g)$ et considérons un pont $[x, a]$ entre $\{x\}$ et $\mathrm{Fix}(g)$. Comme $a$ est fixe, on a $[a, x] \cap [a, g(x)] = \{a\}$ ; s'il y avait un autre point $b$, alors on aurait $b, g(b) \in [a, g(x)]$ et $d(a, g(b)) = d(a, b)$ donc $b = g(b)$, contredisant la propriété définissante du pont. Du coup $a \in [x, g(x)]$ et $\ell(g) + 2d(x, \mathrm{Min}\, g) = d(x, a) + d(g(x), a) = d(x, g(x))$.

On suppose maintenant $g$ sans point fixe. Prenons $x, g^{-1}(x), g(x)$ ; ces trois points sont distincts car $g$ n'a pas de point de fixe : si $g(x) = g^{-1}(x)$, alors $g$ préserve le segment $[x, g(x)]$, donc fixe son milieu puisqu'il opère par isométrie.

Considérons maintenant leur point médian $m$. Il ne peut coïncider avec $g(x)$ ou $g^{-1}(x)$ car, avec $d(x, g^{-1}(x)) = d(x, g(x))$, cela impliquerait $g(x) = g^{-1}(x)$. Supposons maintenant $m = x$. Du coup $(g^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de points telle que $[g^{n-1}(x), g^n(x)] \cap [g^n(x), g^{n+1}(x)] = \{g^n(x)\}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, impliquant que $A_g = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[g^{n-1}(x), g^n(x)]$ est isométrique à $\mathbb{R}$, et l'action de $g$ opère par translation de longueur $\tau_g = d(x, g(x))$.

Si $m \neq x$, alors $g(m) \in [x, g(x)] \setminus \{m\}$. Si $g(m) \in [x, m]$, alors $g([g^{-1}(x), m]) \subset [x, m]$, donc $g^{-1}(m) \in [m, x]$ ; mais comme $d(m, g^{-1}(m)) = d(m, g(m))$, cela impliquerait l'existence d'un point fixe. Donc $g(m) \in [m, g(x)]$. De même, $g^{-1}(m) \in [g^{-1}(x), m]$ par symétrie. Il vient $m \in [g^{-1}(m), g(m)]$, ce qui, comme ci-dessus, implique que $A_g = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[g^{n-1}(m), g^n(m)]$ est isométrique à $\mathbb{R}$, et que l'action de $g$ opère par translation de longueur $\tau_g = d(m, g(m))$.

Prenons maintenant un point $y \in T$ et un pont $[y, z]$ avec $A_g$. On a $[y, z] \cap [z, g(z)] = \{z\}$ et $[z, g(z)] \cap [g(z), g(y)] = g(z)$, ce qui implique

$$d(y, g(y)) = d(y, z) + d(z, g(z)) + d(g(z), g(y)) = 2d(y, A_g) + 2\tau_g \,.$$

Ceci montre que $\tau_g = \ell(g)$, $\operatorname{Min} g = A_g$ et $d(y, g(y)) = \ell(g) + 2d(z, \operatorname{Min} g)$. ■

EXERCICE 3.36. — *Montrer que si $g$ est une isométrie d'un arbre réel et s'il existe $x \in T$ et $n \geq 1$ tels que $g^n(x) = x$ alors $g$ est elliptique.*

On dit que l'action d'un groupe sur un arbre $T$ est *minimale* si $T$ ne contient pas de sous-arbre propre invariant.

PROPOSITION 3.37. — *Toute action par isométries d'un groupe sur un arbre réel admet un sous-arbre invariant minimal s'il existe au moins un élément hyperbolique. Il s'agit de la réunion de leurs axes. Sinon, si $G$ est de type fini, alors $G$ admet un point fixe (global).*

LEMME 3.38. — Si $g, h$ sont deux isométries avec ensembles minimaux $C_g$ et $C_h$ disjoints, alors

$$\ell(gh) = \ell(gh^{-1}) = \ell(g) + \ell(h) + \operatorname{dist}(C_g, C_h) \,.$$

En particulier, $gh$ et $gh^{-1}$ sont hyperboliques.

DÉMONSTRATION. (lemme 3.38) Soit $\alpha = [a, b]$ le pont entre $C_h$ (contenant $a$) et $C_g$ (contenant $b$). On montre que $\gamma = [h^{-1}(a), a] \cup [a, b] \cup [b, g(b)] \cup [g(b), g(a)]$ est un arc et $gh(\gamma) \cap \gamma = \{g(a)\}$. Du coup, $gh$ est hyperbolique et $\ell(gh) = \ell(\gamma) = \ell(g) + 2\operatorname{dist}(C_h, C_g) + \ell(h)$. ■

EXERCICE 3.39. — *Soient $g, h$ deux isométries.*

(1) *Supposons $g, h$ hyperboliques. Montrer que $A_g \cap A_h \neq \emptyset$ si et seulement si*

$$\max\{\ell(gh), \ell(gh^{-1})\} = \ell(g) + \ell(h) \,.$$

*De plus $\ell(gh) > \ell(gh^{-1})$ si et seulement si $A_g \cap A_h$ contient un arc non dégénéré, et les orientations induites par $g$ et $h$ coïncident.*

(2) *On ne suppose plus $g, h$ hyperboliques. Montrer que si $Min\, g \cap Min\, h \neq \emptyset$, alors* $\max\{\ell(gh), \ell(gh^{-1})\} \leq \ell(g) + \ell(h)$.

(3) *On suppose maintenant que* $Min\, g \cap Min\, h$ *contient un arc* $\gamma$ *de longueur* $L \geq \ell(g) + \ell(h)$*. Si* $g$ *et* $h$ *sont hyperboliques, on suppose aussi que leurs orientations coïncident. Alors le commutateur* $[g, h]$ *fixe un sous-arc de* $\gamma$ *de longueur* $L - (\ell(g) + \ell(h))$*.*

On déduit maintenant la proposition :

Démonstration. (prop. 3.37) Soit $A$ un sous-arbre invariant. La démonstration de la proposition 3.35 montre que si $g$ est hyperbolique, et $x \in A$, alors $[x, g(x)]$ contient un domaine fondamental de l'action de $g$ sur $A_g$, donc tout l'axe $A_g$. Par conséquent, $A$ doit contenir tous les axes des éléments hyperboliques, et leur réunion forme un ensemble invariant.

Il reste à montrer que l'ensemble des axes est connexe par arcs. Prenons donc $g, h$ hyperboliques avec des axes disjoints. D'après la démonstration du lemme 3.38, l'axe de $gh$ coupe $A_g$ et $A_h$, montrant la connexité.

Supposons que $G$ est de type fini, engendré par $S$ fini, et sans élément hyperbolique. Deux éléments ont des points fixes en commun car sinon leur produit serait hyperbolique en vertu du lemme 3.38. Par suite, $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) \neq \emptyset$ pour tous $g, h \in S$, et donc l'intersection $\cap_{s \in S} \mathrm{Fix}\, s \neq \emptyset$ par les faits géométriques. Ainsi, $S$ a un point fixe, et donc $G$ aussi. ■

Remarque 3.40. — Il existe des actions de groupes qui n'admettent ni élément hyperbolique, ni arbres minimaux, voir [CM].

Proposition 3.41. — *On suppose qu'un groupe* $G$ *opère par isométries sur un arbre simplicial* $T$ *sans inversion d'arête. On considère une arête* $e = [v, v']$ *et on note* $G_v = \mathrm{stab}\, v$*,* $G_{v'} = \mathrm{stab}\, v'$ *et* $G_e = \mathrm{stab}\, e$*.*

(1) *Le groupe* $< G_v \cup G_{v'} >$ *est isomorphe à la somme amalgamée* $G_v *_{G_e} G_{v'}$*.*

(2) *S'il existe* $g$ *tel que* $g(v') = v$*, alors* $< G_v \cup \{g\} >$ *est isomorphe à l'extension HNN* $G_v *_{G_e}$*.*

Une inversion d'arête est donnée par une arête $e = [v, v']$ et un élément $g \in G$ tels que $g(v) = v'$ et $g(v') = v$. Une action sans inversion d'arête est une action qui n'a pas d'inversion d'arête. Dans le cas contraire, il est possible de subdiviser chaque arête en deux en rajoutant un sommet au milieu ; le résultat sera une action sans inversion d'arête.

Démonstration. On applique le lemme du ping-pong.

Supposons d'abord qu'il existe $g \in G$ et un sommet $v = g(v')$. On vérifie que $g$ n'est pas dans $G_v$, que $g(e) = [v, g(v)]$ et que $gG_eg^{-1} = G_{g(e)}$.

Notons $m$ le milieu de l'arête $g(e)$ et $m'$ le milieu de $e$. Notons $X_+$ la composante de $T \setminus \{m, m'\}$ qui contient $g(v)$, $X_0$, la composante qui contient $v$ et $X_-$ celle qui contient $v' = g^{-1}(v)$.

On vérifie que $g^{\pm 1}(X_0 \cup X_\pm) \subset X_\pm$ ; si $h \in G_v \setminus G_{g(e)}$, alors $d(v, h(g(v))) = 1$ et $h(g(v)) \neq g(v)$ car $h \notin G_{g(e)}$ ; de plus $h(g(e)) \neq e$ car sinon $hg$ inverserait l'arête $e$, donc $h(X_+) \subset X_0$. On montre de même que si $h \in G_v \setminus G_e$, alors $h(X_-) \subset X_0$.

Donc le lemme du ping-pong montre que le groupe engendré par $G_v$ et $g$ est isomorphe à l'extension HNN de $G_v$ par $g$.

On se place dans la situation amalgamée. Notons $B$ la composante de $T \setminus \{m\}$ contenant $v$ et $A$ celle qui contient $v'$, où $m$ désigne le milieu de $e$. On vérifie que si $g \in G_v \setminus G_e$, alors $g(A) \subset B$ et si si $g \in G_{v'} \setminus G_e$, alors $g(B) \subset A$. Pour appliquer le lemme du ping-pong, on devrait vérifier que $G_e$ est d'indice au moins 3 dans au moins un des sous-groupes de sommets. Or ici, on peut vérifier que si $g \in G_v \setminus G_e$, alors $g(A) \subsetneq B$, ce qui était la condition pour faire marcher le ping-pong. En effet, comme $v \in B$ et $g(v) = v$, on aura $g(A) \subset B \setminus \{v\}$. ■

L'énoncé suivant donne une classification des actions minimales. Pour cela, on étend la définition des bouts aux arbres réels qui ne sont pas localement compacts ainsi. Un *rayon* est un plongement isométrique de $\mathbb{R}_+$. Deux rayons sont *équivalents* si leur intersection contient un rayon. Un *bout*, dans ce contexte, est une classe d'équivalence de rayons. Deux bouts sont définis par deux rayons disjoints qui peuvent être joints par un pont pour en faire une géodésique.

Proposition 3.42. — *Supposons que $G$ opère sur un arbre réel $T$ et qu'il contient au moins un élément hyperbolique. L'action vérifie l'une des conditions suivantes.*

(1) *Le groupe $G$ fixe un bout de $T$.*

(2) *Le groupe $G$ fixe une droite et contient une inversion.*

(3) *Pour tout élément hyperbolique $g$, il existe $h$ hyperbolique d'axe disjoint et le sous-groupe engendré par $g$ et $h$ est libre.*

Démonstration. Notons $F$ l'ensemble des bouts fixés par chaque élément hyperbolique de $G$. Comme un élément hyperbolique ne fixe que deux bouts, définis par son axe, $F$ a au plus deux éléments. De plus, $F$ est invariant par $G$ car un élément elliptique préserve l'hyperbolicité d'un élément par conjugaison.

Si $F$ a 2 bouts, alors il existe une géodésique joignant les bouts qui est invariante par $G$. Ou bien $G$ fixe chaque bout, établissant ainsi le premier cas, ou bien il existe un élément qui permute les deux bouts, établissant donc l'autre cas.

Si $F$ n'a qu'un seul bout, alors on est dans le premier cas.

Enfin, si $F = \emptyset$, on veut montrer qu'il existe, pour chaque élément hyperbolique, un autre hyperbolique d'axe disjoint. Supposons que ce ne soit pas le cas. Soient $g$, $h$ avec $A_g \cap A_h \neq \emptyset$. Si l'intersection est bornée, alors, pour $n$ assez grand, $h^n(A_g) \cap A_g = \emptyset$. Or $h^n(A_g) = A_{h^n g h^{-n}}$, donc les axes de $g$ et $h^n g h^{-n}$ seraient disjoints, ce qui est contraire à notre hypothèse de travail. Donc $A_g \cap A_h$ est non borné, et contient en particulier un bout — fixé par $g$ et $h$.

Supposons maintenant que $k \in G$ est aussi hyperbolique et qu'il fixe l'autre bout de $A_g$. Quitte à conjuguer $h$ par des itérés de $g$, on peut supposer que $A_g \cap A_h \cap A_k$ est vide. Du coup, on doit avoir $A_h \cap A_k$ vide aussi. Il vient du lemme 3.38 que $A_{hk}$ ou $A_{hk^{-1}}$ intersecte $A_g$ le long du pont entre $A_k$ et $A_h$, contredisant qu'il devrait contenir un bout de $A_g$. Cela impliquerait que $F$ est non vide, la contradiction recherchée.

Du coup, $g$ admet un autre hyperbolique $h$ d'axe disjoint. Notons $\gamma$ le pont entre leurs axes. On note $X$ et $Y$ les composantes de $T \backslash \mathrm{int}\, \gamma$ qui contiennent $A_g$ et $A_h$ respectivement. On a $g(Y) \subsetneq X$ car $g(\gamma) \subset X$ et aussi $h(X) \subsetneq Y$. Le lemme du ping-pong permet donc de montrer que $< g, h >$ est libre. ■

## RÉFÉRENCES


[Ber] Nicolas Bergeron. Groupe fondamental et revtement. Notes de cours, accessible sur `https://www.imj-prg.fr/~nicolas.bergeron/Enseignement_files/GpFund%26Revt.pdf`.

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CM] Marc Culler and John W. Morgan. Group actions on **R**-trees. *Proc. London Math. Soc. (3)* **55**(1987), 571–604.

[DD] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes.* Cassini, Paris, 2005. Seconde édition.

[Hat] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[LS] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[Mas] William Massey. *Algebraic Topology : An Introduction.* Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1987.

[Ser] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* $\mathrm{SL}_2$. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[Thu] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy, accessible sur `http://www.msri.org/publications/books/gt3m/`.

[Tit] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra* **20**(1972), 250–270.