2. GROUPE FONDAMENTAL

On utilise [DD, Hat, Mas, SW] comme références de base.

On associe à un espace topologique un groupe —- *le groupe fondamental* — qui décrit une partie de la topologie de notre espace. Ce groupe est invariant par *équivalence d'homotopie* définie ci-dessous.

Si X, Y sont deux espaces topologiques, on dit que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$.

Deux espaces X et Y *ont même type d'homotopie* s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes à l'identité. On dit que f et/ou g est une *équivalence d'homotopie*. Un espace est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

Exercice 2.1. — *Montrer que* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *et* $\{0\}$ *ont même type d'homotopie.*

2.1. Lacets et groupe fondamental

Un *chemin* de X est une application continue $c : [0,1] \to X$. On dit qu'il relie $c(0)$ à $c(1)$. On note $\bar{c} : [0,1] \to X$ le chemin c parcouru en sens inverse ($\bar{c}(t) = c(1-t)$). Si $c_1, c_2 : [0,1] \to X$ sont deux chemins tels que $c_1(1) = c_2(0)$, alors on définit la *juxtaposition* $c_1 * c_2$ de c_1 et c_2 en posant $c_1 * c_2 = c : [0,1] \to X$, avec $c(t) = c_1(2t)$ pour $t \in [0,1/2]$ et $c(t) = c_2(2t-1)$ pour $t \in [1/2,1]$.

Un *lacet* est un chemin $c : [0,1] \to X$ tel que $c(0) = c(1)$. On dit qu'il est basé au point $x = c(0) = c(1)$. Les lacets basés en un point $x \in X$ fixé est un semi-groupe muni de la juxtaposition. Enfin, si $A \subset X$, une *homotopie relative à* A est une homotopie $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que $F(a,t) = F(a,0)$ pour tous $t \in [0,1]$ et $a \in A$.

Définition 2.2 (Groupe fondamental). — *Soit X un espace connexe par arcs. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ basé au point $x \in X$ est l'ensemble des classes d'homotopies relatives à x des lacets basés en x muni de la juxtaposition.*

L'élément neutre de $\pi_1(X,x)$ est la classe d'homotopie du lacet constant $c(t) \equiv x$. L'inverse d'un élément représenté par un lacet c est représenté par le lacet $\bar{c}$.

Si $y \in X$ est un autre point et c est un lacet joignant x à y, alors, pour tout lacet γ basé en y, $c * \gamma * \bar{c}$ définit un lacet en x. Cette correspondance produit un isomorphisme $A_c : \pi_1(X,y) \to \pi_1(X,x)$. Si c' est un autre chemin, alors $A_{c'} \circ A_c^{-1} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$ est un automorphisme intérieur défini par la conjugaison induite par le lacet $c' * \bar{c}$. Du coup, si X est connexe par arcs, le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est bien défini à isomorphisme près (indépendamment du point base).

Si $f : X \to Y$ est continue et si $\gamma : [0,1] \to X$ est un lacet, alors $f \circ \gamma$ est un lacet en $f(x)$. Cette opération induit un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$.

EXERCICE 2.3. — (1) *Montrer qu'une équivalence d'homotopie entre deux espaces induit un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux.*

(2) *Si $A \subset X$, une rétraction est une application $r : X \to A$ telle que $r(a) = a$ pour tout $a \in A$. L'application est une rétraction par déformation si $\iota \circ r : X \to X$ est homotope à l'identité. Montrer alors que $\pi_1(X, a)$ est isomorphe à $\pi_1(A, a)$ si r est une rétraction par déformation.*

Exemple : le groupe fondamental d'un cercle. — Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité du plan complexe. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Une façon de procéder est la suivante : l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}^1$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}^1$. Du coup, il suffit de montrer que $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si $c : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un lacet basé en 0, alors il existe un unique chemin $\tilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\tilde{c}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{c} = c$, où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection canonique. En effet, pour tout $x \in X$, $p : [x - 1/3, x + 1/3] \to p([x - 1/3, x + 1/3])$ est un homéomorphisme ; du coup, l'ensemble des $t \in [0,1]$ tel qu'il existe $\tilde{c}$ sur $[0,t]$ vérifiant $\tilde{c}(0) = 0$ et $p \circ \tilde{c} = c$ est un ouvert, fermé non vide, donc $[0,1]$. Enfin, l'unicité provient du fait que la différence de deux solutions $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ produit une application continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Pour conclure, on montre que l'application qui, à un lacet c associe $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$ induit un isomorphisme φ entre $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0)$ et $\mathbb{Z}$. D'abord, comme $c(1) = 0$, on a bien $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$. Le même argument de connexité permet de montrer que deux lacets homotopes induisent des chemins homotopes dans $\mathbb{R}$ de mêmes extrémités, donc on obtient bien une application du $\pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, 0)$ vers $\mathbb{Z}$. Pour montrer que c'est un morphisme de groupes, on prend deux lacets c_1 et c_2, et on note $c = c_1 * c_2$. Notons $\tilde{c}$, $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ les chemins dans $\mathbb{R}$ tels que $p \circ \tilde{c} = c$, $p \circ \tilde{c}_1 = c_1$ et $p \circ \tilde{c}_2 = c_2$ construits ci-dessus. Alors on peut vérifier qu'en posant $\tilde{c}_2' = \tilde{c}_2 + \tilde{c}_1(1)$, on obtient $\tilde{c} = \tilde{c}_1 * \tilde{c}_2'$. Du coup, on a bien $\varphi(c_1 * c_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$. Si $\tilde{c}(1) = 0$, alors l'application $(s,t) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto t\tilde{c}(s)$ définit une homotopie relative à 0 de $\tilde{c}$ vers le lacet trivial, donc $F(s,t) = p(t\tilde{c}(s))$ définit une homotopie de c vers le lacet trivial, montrant que φ est injectif. La surjectivité provient du fait que tout chemin $\tilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $\tilde{c}(0) = 0$ et $\tilde{c}(1) \in \mathbb{Z}$ produit un lacet $p \circ \tilde{c}$.

EXERCICE 2.4. — *Soient X, Y deux espaces connexes par arcs. Montrer que le groupe fondamental de $X \times Y$ est isomorphe au produit cartésien des groupes fondamentaux de X et Y.*

2.2. Théorème de van Kampen

Le théorème de van Kampen permet de décrire le groupe fondamental d'un espace topologique X à partir d'une décomposition de X en deux sous-espaces A et B. Il permet donc de faire des calculs explicites de groupes fondamentaux, et il est aussi à la base de la théorie de Bass-Serre — un des objectifs centraux du cours.

Commençons par un exemple. Soient (A, a), (B, b) deux espaces connexes par arcs, localement connexes par arcs. On considère l'intervalle $I = [0, 1]$ dont on attache une extrémité à a et l'autre à b. Notons $X = A \cup I \cup B$ cet espace et x le point milieu de I. L'espace $X \setminus \{x\}$ a deux composantes connexes dont les fermetures X_A et X_B ont même type d'homotopie que A et B respectivement.

Nous voulons calculer $\pi_1(X, x)$. Pour cela, on considère un lacet $\gamma : I \to X$ basé en x. Si γ est contenu dans I, alors il est homotopiquement trivial. Sinon, on associe une subdivision de la manière suivante : on définit (s_j) et (t_j) comme suit. Posons $t_0 = 0$; si $(t_j)_{0\le j<k}$ est défini avec $t_{k-1} < 1$, ou bien $\gamma([t_{k-1}, 1]) \subset I$, et on pose $t_k = 1$, ou bien on pose $s_k = \inf\{t > t_{k-1},\ \gamma(t) \notin I\}$ et $t_k = \inf\{t \ge s_k,\ \gamma(t) = x\}$. On continue ainsi jusqu'à $t_k = 1$. Ce processus s'arrête bien par continuité uniforme de γ.

Notons $I_j = [t_{j-1}, t_j]$; chaque restriction $\gamma_j = \gamma|_{I_j}$ est un lacet basé en x. A homotopie près, on peut supposer que γ_j est un lacet homotopiquement non trivial, contenu dans X_A ou dans X_B. De plus, quitte à juxtaposer des lacets consécutifs, on peut supposer que deux lacets consécutifs appartiennent à des parties X_A et X_B différentes. Par conséquent, chaque classe de $\pi_1(X, x)$ se décompose en une juxtaposition de lacets de $\pi_1(X_A, x)$ et de $\pi_1(X_B, x)$, respectivement isomorphes à $\pi_1(A, a)$ et $\pi_1(B, b)$.

On dit que $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au produit libre de $\pi_1(A, a)$ et $\pi_1(B, b)$, que l'on note $\pi_1(X, x) = \pi_1(A, a) * \pi_1(B, b)$.

Avant d'énoncer et d'établir le théorème de van Kampen, on introduit les outils de théorie des groupes nécessaires.

2.2.1. *Sommes amalgamées.* Nous allons présenter le produit libre d'une famille de groupes par une propriété universelle.

PROPOSITION 2.5. — *Soit $(G_j)_{j\in I}$ une famille de groupes ; il existe un groupe G, noté $*_{j\in I} G_j$, unique à isomorphisme près, muni de morphismes injectifs $\iota_j : G_j \to G$ tel que, si H est un autre groupe et que l'on considère des morphismes $f_j : G_j \to H$, alors il existe un unique morphisme $f : G \to H$ tel que $f \circ \iota_j = f_j$.*

Le groupe G ainsi obtenu est *le produit libre des groupes $(G_j)_{j\in I}$*.

DÉMONSTRATION. L'unicité découle de la propriété universelle : supposons que l'on ait deux groupes G et G' qui vérifient les conclusions. La propriété universelle nous fournit des morphismes $f : G \to G'$ et $f' : G' \to G$ tels que $f \circ \iota_j = \iota'_j$ et $f' \circ \iota'_j = \iota_j$. Ainsi, l'application $f' \circ f : G \to G$ vérifie $f' \circ f \circ \iota_j = f' \circ \iota'_j = \iota_j$, impliquant que $f' \circ f = \mathrm{Id}$ par unicité du morphisme Id donné par la propriété universelle, et par symétrie, $f \circ f' = \mathrm{Id}$.

Il reste à montrer l'existence. Pour cela, on construit à la main G comme pour le groupe libre : on définit $\mathbb{F}(\cup G_j)$ surlequel on met la relation d'équivalence engendré par $m_1 g g' m_2 \sim m_1 (g g') m_2$ s'il existe $j \in I$ tel que $g, g' \in G_j$. On note G le quotient et on vérifie que G est un groupe. On a les injections évidentes $\iota_j : G_j \to G$.

De plus, si $f_j : G_j \to H$ est un morphisme, alors, pour tout $m = g_1 \dots g_k$, avec $g_n \in G_{j_n}$, on définit $f(m) = f_{j_1}(g_1) \dots f_{j_k}(g_k)$. L'unicité vient des conditions nécessaires pour avoir un morphisme de groupes f. ■

EXERCICE 2.6. — *Montrer que* $\mathbb{F}_n = *_{1 \leq j \leq n} \mathbb{Z}$.

On généralise la construction précédente.

THÉORÈME 2.7. — *Soient A, B, C des groupes munis de morphismes $j_A : C \to A$ et $j_B : C \to B$. Notons N la clôture normale dans $A * B$ de $\{j_A(c) j_B(c)^{-1},\ c \in C\}$. Le groupe $G = A * B/N$ est l'unique groupe à isomorphisme près muni de morphismes $h_A : A \to G$ et $h_B : B \to G$ qui vérifient les propriétés suivantes.*

(1) *On a $h_A \circ j_A = h_B \circ j_B$;*

(2) *Si H est un groupe muni de morphismes $f_A : A \to H$ et $f_B : B \to H$ tels que $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$, alors il existe un unique morphisme $f : G \to H$ tel que $f \circ h_A = f_A$ et $f \circ h_B = f_B$,*

On note le groupe G ci-dessus $G = A *_C B$, et on l'appelle *la somme amalgamée de A par B au-dessus de C*. Bien que la notation ne prenne pas en compte les morphismes j_A et j_B, le groupe en dépend fortement.

DÉMONSTRATION. L'unicité se montre comme pour les produits libres. Il faut maintenant vérifier que le groupe défini dans le théorème vérifie ces propriétés.

Soient $\iota_A : A \to A * B$ et $\iota_B : B \to A * B$ les injections canoniques et $p : A * B \to G$ la projection canonique. On définit $h_A = p \circ \iota_A$ et $h_B = p \circ \iota_B$. On a $h_A \circ j_A = h_B \circ j_B$ par construction.

Soit H un groupe muni de morphismes $f_A : A \to H$ et $f_B : B \to H$ tels que $f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$. Soit $\tilde{f} : A * B \to H$ le morphisme associé, de sorte que $\tilde{f} \circ \iota_A = f_A$ et $\tilde{f} \circ \iota_B = f_B$. On remarque, que pour tout $c \in C$, on a bien $\tilde{f}(\iota_A(c)\iota_B(c)^{-1})) = e$, donc $N \subset \ker \tilde{f}$ et il existe $f : G \to H$ tel que $f \circ p = \tilde{f}$. On a

$$f \circ h_A = f \circ p \circ \iota_A = \tilde{f} \circ \iota_A = f_A$$

et de même $f \circ h_B = f_B$. Inversement, si $f : G \to H$ vérifie $f \circ h_A = f_A$ et $f \circ h_B = f_B$, alors le noyau du morphisme $f \circ p : A * B \to H$ contient N et on n'a pas de choix. ■

REMARQUE 2.8. — Par construction, on voit que la somme amalgamée $A *_C B$ est engendrée par les images de A et B.

EXERCICE 2.9. — *Soient A, B, C des groupes munis de morphismes $j_A : C \to A$ et $j_B : C \to B$ et G la somme amalgamée correspondante.*

(1) *Montrer que si B est trivial, alors G est isomorphe au quotient de A par la clôture normale de $j_A(C)$ dans A.*

(2) *Montrer que si j_A est un isomorphisme, alors G est isomorphe à B.*

2.2.2. *Énoncé et démonstration du théorème de van Kampen.* Soient X un espace topologique, et $A, B \subset X$ des ouverts tels que $A \cup B = X$, A, B et $C = A \cap B$ sont connexes par arcs. On se fixe $x \in X$ et on note $j_A : \pi_1(C, x) \to \pi_1(A, x)$ et $j_B : \pi_1(C, x) \to \pi_1(B, x)$ les morphismes obtenus par les inclusions canoniques $C \hookrightarrow A$ et $C \hookrightarrow B$. Notons aussi $f_A : \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x)$, $f_B : \pi_1(B, x) \to \pi_1(X, x)$ et $f_C : \pi_1(C, x) \to \pi_1(X, x)$, de sorte que $f_C = f_A \circ j_A = f_B \circ j_B$. Les morphismes f_A et f_B nous conduisent à $f : \pi_1(A) *_{\pi_1(C,x)} \pi_1(B, x) \to \pi_1(X, x)$ par la propriété universelle.

THÉORÈME 2.10 (Seifert, van Kampen). — *Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à la somme amalgamée de $\pi_1(A, x)$ et $\pi_1(B, x)$ au-dessus de $\pi_1(C, x)$. Plus précisément, le morphisme $f : \pi_1(A) *_{\pi_1(C,x)} \pi_1(B, x) \to \pi_1(X, x)$ est un isomorphisme.*

Le théorème s'applique dans la situation suivante : A et B sont fermés, et A, B et C sont des rétractes par déformation de voisinages ouverts respectifs. On obtient ainsi

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(A) *_{\pi_1(C,x)} \pi_1(B, x) .$$

DÉMONSTRATION. (cf. [Hat]) Montrons tout d'abord que f est surjectif. Pour cela, il suffit de considérer un lacet $\gamma : [0, 1] \to X$ basé en x représentant un élément de $\pi_1(X, x)$ et de montrer qu'il s'exprime comme la juxtaposition de chemins de $\pi_1(A, x)$ et de $\pi_1(B, x)$. Comme $A \cup B$ recouvre X et que $[0, 1]$ est compact, on peut trouver une subdivision $(s_j)_{0\le j\le n}$ de $[0, 1]$ telle que $s_0 = 0$, $s_n = 1$ et $\gamma([s_{j-1}, s_j])$ est contenu dans A ou dans B. Notons $\gamma_j = \gamma_{[s_{j-1},s_j]}$. Il vient que $\gamma(s_j) \in A \cap B$ et comme $A \cap B$ est connexe par arcs, on peut trouver des chemins $c_j \subset A \cap B$ reliant x à $\gamma(s_j)$ pour chaque $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Par suite γ est homotope à

$$\gamma_1 * \bar{c_1} * c_1 * \gamma_2 * \bar{c_2} * \dots * c_{n-1} * \gamma_n = (\gamma_1 * \bar{c_1}) * (c_1 * \gamma_2 * \bar{c_2}) * \dots * (c_{n-1} * \gamma_n)$$

ce qui montre la surjectivité de f.

L'injection est plus délicate. On part d'un lacet $\gamma : [0, 1] \to X$ basé en x, obtenu comme la juxtaposition de lacets représentant des éléments de $\pi_1(A, x)$ et $\pi_1(B, x)$ et que l'on suppose homotopiquement trivial dans X, et on veut montrer qu'il est homotope, par une succession d'homotopies de A et de B, à un lacet trivial. Pour cela, nous partons d'une homotopie $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ de $\gamma = F(\cdot, 0)$ au lacet trivial et nous allons transformer cette homotopie. Par compacité de $[0, 1] \times [0, 1]$, on peut trouver deux subdivisions $(s_j)_{0\le j\le n}$ et $(t_k)_{0\le k\le m}$ de $[0, 1]$ de sorte que $F(R_{jk})$ est contenu dans A ou B, où $R_{jk} = [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]$.

On ordonne les rectangles par l'ordre lexicographique donnée par $(j, k) < (j', k')$ si $j < j'$ ou $j = j'$ et $k < k'$; on renumérote donc ces rectangles linéairement $R_1, \dots, R_\ell, \dots, R_{mn}$. Pour chaque ℓ, on considère une courbe $c_\ell : [0, 1] \to [0, 1]\times[0, 1]$ traversant horizontalement $[0, 1] \times [0, 1]$ de sorte qu'elle sépare exactement les ℓ premiers rectangles des suivants. Notons que $F(c_\ell)$ est un lacet basé en x, $F(c_0) = \gamma$ et $F(c_{mn})$ est le lacet trivial. De plus,

$F(c_\ell)$ et $F(c_{\ell+1})$ sont homotopes par une homotopie traversant le rectangle $R_{\ell+1}$, donc contenu dans un seul de A ou de B.

Pour chaque sommet d'un rectangle $u = (s_j, t_k)$, on a $F(u)$ dans C, et sinon dans A ou B. Dans chaque cas, on peut considérer un chemin c_u reliant x à $F(u)$ dans C, A ou B respectivement. Pour chaque ℓ on définit la courbe γ_ℓ en insérant à $F(c_\ell)$ et à chaque sommet u traversé par c_ℓ, la courbe $\bar{c_u} * c_u$, de sorte que (a) γ_ℓ est homotope à $F(c_\ell)$ par des homotopies contenues dans A ou B, et (b) le lacet γ_ℓ se décompose en une juxtaposition de lacets contenus dans A ou B.

Comme pour les courbes $F(c_\ell)$, deux courbes consécutives γ_ℓ et $\gamma_{\ell+1}$ sont homotopes par une homotopie traversant un seul rectangle. Ceci montre que γ est homotope au lacet trivial par succession d'homotopies, chacune étant contenue dans A ou B. ■

Exercice 2.11. — *Montrer que si $n \geq 2$, alors le groupe fondamental de la sphère*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$$

est trivial.

Un espace est *simplement connexe* si son groupe fondamental est trivial. Les sphères $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, sont donc simplement connexes (mais non contractiles).

Exercice 2.12. — *On généralise le théorème de van Kampen à une famille quelconque d'ouverts. Soit (X, x_0) un espace topologique connexe par arcs pointé muni d'un recouvrement $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ par des ouverts connexes par arcs contenant chacun x_0 tel que, pour tous $\alpha, \beta \in A$, si $Y_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset$, alors il existe $\gamma \in A$ tel que $Y_\gamma = Y_\alpha \cap Y_\beta$.*

On note $\varphi_{\alpha\beta} : \pi_1(Y_\alpha, x_0) \to \pi_1(Y_\beta, x_0)$ les morphismes induits par les inclusions $Y_\alpha \hookrightarrow Y_\beta$ et $\psi_\alpha : \pi_1(Y_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induits par $Y_\alpha \hookrightarrow X$.

Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est l'unique groupe, à isomorphisme près, qui vérifie la propriété universelle suivante : si H est un groupe et $\rho_\alpha : \pi_1(Y_\alpha, x_0) \to H$ sont des morphismes tels que $\rho_\alpha = \rho_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta}$ si $Y_\alpha \subset Y_\beta$, alors il existe un unique morphisme $\rho : \pi_1(X, x_0) \to H$ tel que $\rho_\alpha = \rho \circ \psi_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

2.2.3. *Extension HNN.* Voici une variante de la somme amalgamée de groupes définies par Graham Higman, Bernhard Hermann Neumann et Hanna Neumann que nous présentons d'abord sous forme topologique.

On suppose donnés un espace topologique X connexe et localement connexe par arcs, et deux sous-espaces (connexes et localement connexes par arcs) Y_1, Y_2 munis d'un homéomorphisme $f : Y_1 \to Y_2$. Considérons

$$\widehat{X} = X \sqcup (Y \times [0,1]) \Big/ \begin{array}{l} Y \times \{0\} \simeq Y_1 \\ Y \times \{1\} \simeq_f Y_2 \end{array}$$

où Y désigne une copie de Y_1. Fixons-nous $x \in Y_1$ et considérons un chemin c de X reliant x à $f(x)$. Il induit un morphisme $\alpha = A_c \circ \iota_{2*} \circ f_* : \pi_1(Y_1, x) \to \pi_1(Y_2, f(x)) \to \pi_1(X, f(x)) \to \pi_1(X, x)$, où la première flèche est induite par f, la seconde par l'injection canonique $\iota_2 : Y_2 \hookrightarrow X$ et la troisième par c.

PROPOSITION 2.13. — *Sous les conditions ci-dessus, notons N la clôture normale dans $\pi_1(X,x)* < t >$ du sous-groupe engendré par $\{tgt^{-1}\alpha(g^{-1}),\ g \in \pi_1(Y_1,x)\}$. Alors $\pi_1(\widehat{X}, x)$ est isomorphe au groupe $\pi_1(X,x)* < t > /N$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons appliquer le théorème de van Kampen plusieurs fois.

Notons $c_x = \{x\} \times [0,1]$ le chemin de $Y \times [0,1]$ allant de $x \in Y_1$ à $f(x)$. Considérons le sous-espace $Z = X \cup (c \cup c_x)$ de $\widehat{X}$. Il vient

$$\pi_1(Z,x) \simeq \pi_1(X,x) * \mathbb{Z}\,.$$

Notons t un générateur de $\mathbb{Z}$ (représenté par $\gamma_t = c * \bar{c_x}$), et écrivons maintenant $\widehat{X} = Z \cup (Y \times [0,1])$, avec

$$Z \cap (Y \times [0,1]) = (Y \times \{0\}) \cup (\{x\} \times [0,1]) \cup (Y \times \{1\})\,.$$

On a $\pi_1(Z \cap (Y \times [0,1]), x) \simeq \pi_1(Y,x) * \pi_1(Y,x)$; l'injection de $Z \cap (Y \times [0,1])$ dans $Y \times [0,1]$ induit la projection $\pi_1(Y,x) * \pi_1(Y,x) \to \pi_1(Y,x)$ et l'injection de $Z \cap (Y \times [0,1])$ dans Z induit un morphisme $h : \pi_1(Y,x) * \pi_1(Y,x) \to \pi_1(Z,x)$ donné par $h(g) = g$ sur le premier facteur et $h(g) = t^{-1}\alpha(g)t$ sur le second. En effet, un élément g du second facteur est représenté par un lacet de la forme $c_x * \gamma_0 * \bar{c_x}$, avec $\gamma_0 \in \pi_1(Y,x)$. Or, ce chemin est homotope à

$$(c_x * \bar{c}) * (c * f(\gamma_0) * \bar{c}) * (c * \bar{c_x}) = \bar{\gamma}_t * (c * f(\gamma_0) * \bar{c}) * \gamma_t$$

Du coup, le noyau de $\pi_1(Y,x) * \pi_1(Z,x) \to \pi_1(\widehat{X}, x)$ est engendré par $t^{-1}\alpha(g)tg^{-1}$. ■

DÉFINITION 2.14 (Extension HNN). — *Soient G un groupe et $\alpha : H \to K$ un isomorphisme entre deux sous-groupes de G. Notons N la clôture normale dans $G* < t >$ du sous-groupe engendré par $\{tgt^{-1}\alpha(g^{-1}),\ g \in G\}$. L'extension HNN de G par α, notée $G*_\alpha$ ou $G*_H$ est le groupe $G* < t > /N$.*

Si G est de présentation $< S|\mathcal{R} >$ alors

$$G*_H =< S, t|\mathcal{R}, tht^{-1} = \alpha(h),\ h \in H > \ .$$

Donnons tout de suite un petit exemple : prenons le segment $[0,1]$ et identifions ses extrémités. On obtient un cercle dont le groupe fondamental s'identifie à

$$\{1\}*_{\{1\}} =< t|tt^{-1} > \simeq \mathbb{Z}.$$

EXERCICE 2.15. — *Soient A, C deux groupes munis de deux morphismes injectifs $\alpha_1, \alpha_2 : C \to A$. Montrer que l'extension HNN $A*_C$ est l'unique groupe G à isomorphisme près muni d'un morphisme $j : A \to G$ qui vérifie la propriété universelle suivante.*

(1) *Il existe $t \in G$ tel que $t\alpha_1(c) = \alpha_2(c)t$ pour tout $c \in C$.*

(2) *Pour tout groupe H et tout morphisme $f : A \to H$ tels qu'il existe $h \in H$ vérifiant $hf(\alpha_1(c)) = f(\alpha_2(c))h$ pour tout $c \in C$, il existe un unique morphisme $F : G \to H$ tel que $F \circ j = f$.*

2.3. Exemples de groupes fondamentaux

La *somme connexe* $A \vee B$ de deux espaces topologiques pointés (A, a) et (B, b) est le quotient de la réunion disjointe de A par B par la relation d'équivalence engendrée par l'identification de a et b. Si a et b admettent des voisinages contractiles, alors $\pi_1(A \vee B, a)$ est isomorphe au produit libre $\pi_1(A, a) * \pi_1(B, b)$.

Lorsque l'on considère la somme connexe $M \vee N$ de deux variétés de même dimension $n \geq 2$, on supprime deux boules ouvertes $M \setminus B_M$ et $N \setminus B_N$ de dimension n et on recolle les deux sous-variétés le long des bords ∂B_M et ∂B_N par un homéomorphisme $\varphi : \partial B_M \to \partial B_N$:

$$M \vee N = (M \setminus B_M) \sqcup (N \setminus B_N)/(x \in \partial B_M \sim \varphi(x) \in \partial B_N)\,.$$

Le résultat ne dépend pas des boules utilisées.

Exemples en dimension 1. — Nous avons vu que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$. Du coup, si X_n désigne le bouquet de n cercles (n cercles attachés au même point x), alors $\pi_1(X, x) \simeq \mathbb{F}_n$.

EXERCICE 2.16. — *Montrer que, plus généralement, le groupe fondamental d'un graphe fini et connexe à s sommets et a arêtes est isomorphe à $\mathbb{F}_n$, où $n = a - s + 1$.*

PROPOSITION 2.17. — *Le groupe fondamental d'un graphe connexe (de cardinalité quelconque) est un groupe libre.*

DÉMONSTRATION. Soit Γ un graphe connexe, et fixons-nous un sommet $x \in \Gamma$. On montre tout d'abord que Γ contient un arbre simplicial T qui contient tous les sommets de Γ. Pour cela, on note que l'ensemble des sous-arbres de Γ contenant x est un système inductif : la réunion d'une famille croissante d'arbres contenant x est toujours un arbre. Par conséquent, il existe un arbre maximal T contenant x. Tous les sommets de Γ sont dans cet arbre, car si un sommet n'était pas atteint, on pourrait considérer un chemin le reliant à T : on pourrait ainsi agrandir T.

On désigne par A l'ensemble des arêtes de Γ qui ne sont pas dans T, et, pour chaque $a = (v, v') \in A$ on considère un lacet γ_a basé en x formé de l'arc $c_v = [x, v] \subset T$, de a et de l'arc $\bar{c_{v'}} = [v', x]$. L'objet de la suite est de montrer que ces lacets engendrent le groupe fondamental de G et qu'il est libre.

Soit donc un lacet γ localement injectif basé en x. S'il ne passe par aucune arête de A, alors il est contenu dans T, donc homotopiquement trivial. Sinon, notons $a_1, \ldots, a_n$ les arêtes de A tranversées par γ dans cet ordre. Le chemin reliant $\gamma(0)$ au premier sommet v_1

de a_1 est homotope à c_{v_1}. Du coup, on peut insérer dans γ le chemin $\bar{c_{v_1'}} c_{v_1'}$ et considérer la partie suivante de γ, partant de $c_{v_1'}$. De proche en proche, on montre que γ est homotope à $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\dots\gamma_{a_n}$. Donc $\pi_1(\Gamma, x)$ est bien engendré par $\{\gamma_a,\ a \in A\}$.

Pour montrer que le groupe est isomorphe à $\mathbb{F}(A)$, on peut écraser Γ en identifiant les points de T. On obtient ainsi un bouquet de cercles, où chaque cercle est canoniquement en bijection avec une arête de A. Le théorème de van Kampen montre alors que le groupe est bien libre. ∎

Exemples de surfaces. — On commence par le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Soit $x \in \mathbb{T}^2$, comme $\mathbb{T}^2$ est un produit, on a

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, x) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}^2.$$

Si on note a un paramétrage du cercle $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ et b pour $\{1\} \times \mathbb{S}^1$, alors on a $\pi_1(\mathbb{T}^2, x) \simeq < a, b | [a, b] >$, où $[a.b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Découpons maintenant $\mathbb{T}^2$ le long des deux cercles a et b. On obtient ainsi un carré, et on retrouve le tore en identifiant les côtés opposés. On voit ainsi que si on enlève à $\mathbb{T}^2$ un petit disque D avec le point base au bord, alors $\mathbb{T}^2 \setminus D$ se rétracte par déformation sur le bouquet des deux cercles a et b, impliquant ainsi $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus D, x) \simeq \mathbb{F}_2 =< a, b >$ et le bord du trou est paramétré par $[a, b]$.

Prenons maintenant deux surfaces orientées à bord S_1 et S_2 basées en $x_j \in \partial S_j$, et paramétrons chaque bord contenant le point base par un lacet $\gamma_j : [0, 1] \to \partial S_j$ basé en x_j de sorte que S_j soit à « droite » du bord. Posons maintenant $S = S_1 \sqcup S_2/\gamma_1(1-t) \sim \gamma_2(t)$, $t \in [0, 1/2]$, et notons $x = x_1 = x_2$. La surface S est donc orientée à bord, basée en $x \in \partial S$; le bord de S contenant x est paramétré par le lacet γ homotope à $\gamma_1 * \gamma_2$, où $\gamma|_{[0,1/2]} = \gamma_1|_{[0,1/2]}$ et $\gamma|_{[1/2,1]} = \gamma_2|_{[1/2,1]}$. De plus, le théorème de van Kampen montre que $\pi_1(S, x)$ est isomorphe à $\pi_1(S_1, x_1) * \pi_1(S_2, x_2)$.

Ainsi, si on considère g copies de $S_1' = \mathbb{T}^2 \setminus D$, alors, notons S_g' la surface obtenue en itérant $(g-1)$ fois la construction précédente. Cette surface a son groupe fondamental libre, donné par $< a_1, b_1, \dots, a_g, b_g >$, où $\{a_j, b_j\}$ engendre le groupe fondamental de la $j$ème copie de S_1', et le bord de S_g' est paramétré par un lacet homotope au produit des commutateurs $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$. Du coup, si on recolle à S_g' un disque D le long du bord, on obtient une surface sans bord S_g de groupe fondamental de présentation

$$< a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] > \ .$$

Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$ est obtenu en identifiant les points antipodaux de la sphère $\mathbb{S}^2$, c'est-à-dire x avec $(-x)$. On peut aussi considérer le disque unité fermé et identifier les points du bord opposés. Autrement, dit on recolle au cercle unité S un disque D par l'application $e^{it} \mapsto e^{2it}$. L' injection $(D \cap S) \to S$ est donnée par $z \mapsto z^2$, induisant $n \mapsto 2n$ sur les groupes fondamentaux. Du coup, le sous-groupe N de $\pi_1(D, x) * \pi_1(S, x) \simeq \mathbb{Z}$ donné par le théoème de van Kampen est isomorphe à $2\mathbb{Z}$. Donc $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On a le théorème de classification suivant :

THÉORÈME 2.18. — *Soit S une surface compacte connexe sans bord.*

(1) *Si S est orientable, alors S est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ ou à la somme connexe de n tores.*
(2) *Si S n'est pas orientable, alors S est homéomorphe à la somme connexe de n plans projectifs.*

On peut trouver une démonstration dans [Mas].

EXERCICE 2.19. — *Montrer que le groupe fondamental de la somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs N_g admet la présentation*

$$< a_1, \ldots, a_g | a_1^2 a_2^2 \ldots a_g^2 > .$$

Exemples en dimension 3. — Si S est une surface (compacte), alors $S \times [0,1]$ est (compacte) de dimension 3 de même groupe fondamental. C'est un fibré en intervalle. Prenons maintenant un homéomorphisme $\varphi : S \to S$, alors $M = S \times [0,1]/(x,0) \sim (\varphi(x),1)$ définit une variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est l'extension HNN de $\pi_1(S)$ par lui-même induite par φ. Notons aussi que l'application $(x,t) \in S \times [0,1] \to t \in [0,1]$ induit une fibration de M au-dessus du cercle, dont les fibres sont homéomorphes à S.

Un tore solide est la variété compacte homéomorphe à $D^2 \times S^1$. En recollant n tores solides le long de disques contenus sur leur bord, on obtient une variété de dimension 3 appelée *un corps en/à anses*. Le théorème de van Kampen montre que cette variété a un groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{F}_n$. Par ailleurs, on peut montrer qu'elle se rétracte par déformation sur un graphe Γ_n ayant le type d'homotopie d'un bouquet de n cercles.

On peut combiner les exemples précédents comme suit. Soit S une surface compacte à bord, et $M_S = S \times [0,1]$ le fibré en intervalles associé. Chaque composante de bord de S définit un anneau de M_S. Prenons maintenant une autre variété compacte de dimension 3 à bord M, et supposons que l'injection $\partial M \hookrightarrow M$ induit une injection au niveau des groupes fondamentaux (on dit que M est *à bord incompressible*). Prenons maintenant une collection finie de courbes fermées simples deux à deux disjointes, non homotopiquement triviales et non homotopes deux à deux sur ∂M. On peut épaissir chaque courbe en un anneau de ∂M. Sur un tore solide, on peut aussi considérer des anneaux sur son bord deux à deux disjoints et homotopes à l'âme du tore. Ces variétés munies de ces anneaux peuvent maintenant être recollées le long des anneaux pour donner une nouvelle variété compacte dont on pourra calculer le groupe fondamental à l'aide du théorème de van Kampen.

Exemples en dimension 4. — La situation est bien différente dans ce cas-ci, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.20. — *Un groupe de présentation finie est isomorphe au groupe fondamental d'une variété compacte orientable sans bord de dimension* 4.

Démonstration. Notons $G =< S|\mathcal{R} >$ un groupe muni d'une présentation finie, avec $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_k\} \subset \mathbb{F}(S)$. On suppose que les relations sont cycliquement réduites.

Nous allons procéder par récurrence sur le nombre de relations pour construire la variété recherchée.

Si $k = 0$, alors on considère la somme connexe M de n copies de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$, que l'on construit en enlevant des boules à chaque copie puis en les recollant en identifiant les sphères qui les bordaient. Une première application du théorème de van Kampen montre que le groupe fondamental de M est isomorphe au produit libre $\mathbb{F}(S)$. De plus M est une variété compacte de dimension 4 sans bord.

Supposons maintenant $k \geq 1$ et que toute présentation finie d'un groupe avec au plus $k-1$ relations est isomorphe au groupe fondamental d'une variété compacte sans bord de dimension 4. Notons G_0 le groupe de présentation $< S|r_1, \dots, r_{k-1} >$ et M_0 la variété associée par l'hypothèse de récurrence.

La relation r_k représente un lacet γ dans M_0 que l'on peut supposer simple, puisque M_0 est de dimension $4 \geq 3$. Si γ est homotopiquement trivial, alors M_0 est la variété recherchée. Sinon, on considère un petit voisinage tubulaire compacte $V \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^3$ de γ (car M_0 est orientable) et on note $M_1 = M_0 \setminus V$, compacte avec une composante de bord $\partial V \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

On remarque que l'inclusion canonique $\partial V \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow V$ induit un isomorphisme entre groupes fondamentaux. Or $\pi_1(M_0)$ est isomorphe à $\pi_1(M_1) *_{\pi_1(\partial V)} \pi_1(V)$. Cela implique que $\pi_1(M_0)$ est isomorphe à $\pi_1(M_1)$.

Maintenant, considérons $N = D^2 \times \mathbb{S}^2$, une autre variété de dimension 4, simplement connexe et de bord horméomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \simeq \partial M_1$. Du coup, on peut recoller M_1 à N le long de leur bord afin d'obtenir une nouvelle variété compacte M sans bord et de dimension 4. Une nouvelle application du théorème de van Kampen montre que $\pi_1(M)$ est isomorphe à la somme amalgamée de $\pi_1(M_1)$ et de $\pi_1(N)$ au-dessus de $\pi_1(M \cap N)$. Or comme $\pi_1(N)$ est trivial, cela correspond à quotienter $\pi_1(M_1)$ par le sous-groupe normal engendré par $\pi_1(M_1 \cap N) =< r_k >$. Ceci montre que $\pi_1(M)$ admet la présentation $< s_1, \dots, s_n | r_1, \dots, r_k >$. ∎

2.4. **CW-complexes**

Le bon contexte topologique pour étudier les groupes est celui des CW-complexes que nous présentons maintenant.

Une structure de *CW-complexe*[1] sur un espace X est la donnée d'une suite croissante $(X^{(n)})$ de sous-espaces, dont chaque élément $X^{(n)}$ est appelé le n-squelette de X, telle que

– le 0-squelette est un espace discret non vide ;
– pour tout $n > 0$, le n-squelette est homéomorphe à l'espace obtenu en attachant une famille de n-boules fermées au $(n-1)$-squelette, le long de leurs bords (qui sont des $(n-1)$-sphères), par le choix d'une application de recollement ; plus pécisément, on se donne une collection de boules fermées B_α, $\alpha \in A$, de dimension n munies d'applications continues $\varphi_\alpha : \partial B_\alpha \to X^{(n-1)}$ et on pose
$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \sqcup (\sqcup B_\alpha)/\sim$$
où la relation d'équivalence est engendrée par $x \in \partial B_\alpha$ est identifié à $\varphi_\alpha(x) \in X^{(n-1)}$.
– les squelettes forment un recouvrement fondamental de X, c'est-à-dire qu'ils recouvrent X et qu'une partie est fermée dans X si et seulement si, pour tout n, son intersection avec le n-squelette $X^{(n)}$ est fermée dans $X^{(n)}$ (d'où le nom de « topologie faible »).

On démontre qu'alors :

(1) chaque *cellule ouverte*, c'est-à-dire chaque image de l'intérieur d'une boule fermée par l'un des recollements est canoniquement homéomorphe à la boule ouverte correspondante ;
(2) les cellules ouvertes et les sommets forment une partition de X ;
(3) X est séparé ;
(4) tout compact de X (en particulier toute cellule fermée) ne coupe qu'un nombre fini de cellules ouvertes (d'où le nom de « à fermeture finie ») ;
(5) une fonction $f : X \to Y$ sur un espace topologique est continue si la restriction de f à toutes les cellules fermées de X est continue.

Le n-squelette $X^{(n)}$ est la réunion des n-cellules fermées de dimensions inférieures ou égales à n. Si X est réduit à $X^{(n)}$, il est dit de dimension n (il est dit de dimension infinie s'il n'est réduit à aucun de ses squelettes). X est dit fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules.

Une réunion fermée de cellules de X est appelée un *sous-complexe* de X (c'est encore un CW-complexe). Le n-squelette de X est donc le sous-complexe maximum de dimension inférieure ou égale à n.

Exemples. —

– La structure standard de CW-complexe (de dimension 1) sur la droite réelle a pour 0-squelette l'ensemble des entiers et pour 1-cellules les intervalles $[n, n+1]$ pour n entier. De même, la structure standard sur $\mathbb{R}^n$, de dimension n, est le réseau qui a des

1. Le nom CW provient du qualificatif de l'espace topologique, en anglais *closure-finite weak topology*, pour à fermeture finie et topologie faible.

cellules cubiques produits des 0- et 1-cellules de $\mathbb{R}$. Un graphe est un CW-complexe de dimension 1.
- La CW-structure la plus simple de la n-sphère $\mathbb{S}^n$ a deux cellules : une 0-cellule et une n-cellule, ce qui suffit à décrire le CW-complexe. On peut en construire bien d'autres, en prenant comme $(n-1)$-squelette $\mathbb{S}^{n-1}$ (muni de l'une de ses CW-structures, au choix), servant d'équateur, sur lequel on recolle deux hémisphères : deux n-cellules, le long de l'application identité de $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Si X est un espace topologique séparé, sa décomposition en points fournit une structure de CW-complexe.

Propriétés. —
(1) Tout CW-complexe est localement contractile.
(2) Un CW-complexe est localement compact si et seulement s'il est localement fini, c'est-à-dire si son recouvrement par les cellules fermées est localement fini, ou encore si toute cellule fermée ne rencontre qu'un nombre fini de cellules fermées, ou si tout point est intérieur à un sous-complexe fini.
(3) Un CW-complexe est connexe si et seulement si son 1-squelette l'est. Dans ce cas, il est métrisable si et seulement s'il est localement fini.
(4) Tout quotient séparé d'un CW-complexe par une relation d'équivalence *cellulaire* est un CW-complexe (par exemple : toute identification d'une réunion de sous-complexes à un point, comme dans le cône ou la suspension).
(5) Si X est un CW-complexe et $A \subset X$ est un sous-complexe de X contractile, alors X/A a le même type d'homotopie que X.

On montre comment lire la présentation du groupe fondamental d'un 2-complexe. On note que le 1-squelette d'un complexe est un graphe, donc son groupe fondamental est libre.

PROPOSITION 2.21. — *Soit X un 2-complexe, et S un système de générateurs de $\pi_1(X^{(1)}, x)$ basé en un sommet $x \in X$. Soit A l'ensemble des 2-cellules ; pour chaque $D = D_\alpha \in A$, on considère un point de $x_\alpha \in \partial A_\alpha$, et un lacet $\gamma_\alpha = c_\alpha \lambda_\alpha \bar{c_\alpha}$ basé en x, où $c_\alpha \subset X^{(1)}$ est un chemin joignant x à x_α et $\lambda_\alpha \subset \partial D$ est un lacet basé en x_α. Alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $< S|\gamma_\alpha, \alpha \in A >$.*

DÉMONSTRATION. On étoffe $X^{(1)}$ en collant un rectangle $R_\alpha = [0,1] \times [0,1]$ le long d'un côté $[0,1] \times \{0\}$ sur chaque chemin c_α et un cylindre $C_\alpha = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ le long de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ sur chaque lacet λ_α de sorte que x soit identifié à $(0,0) \in \cap_\alpha R_\alpha$, x_α est identifié à $(1,0) \in R_\alpha \cap C_\alpha$ et que le nouvel espace obtenu Y se rétracte par déformation sur $X^{(1)}$. On recolle sur le bord $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ du cylindre C_α un disque D_α de sorte que l'espace obtenu Z se rétracte par déformation sur X. Pour chaque 2-cellule D_α, on choisit un point intérieur z_α.

Notons $A = Z \setminus \cup\{z_\alpha\}$ qui a le même type d'homotopie que $X^{(1)}$, et $B = Z \setminus X$ qui est simplement connexe (même contractile). Le théorème de van Kampen affirme que $\pi_1(Z, x)$, donc $\pi_1(X, x)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(A)$ par la clôture normale de l'injection $\pi_1(A \cap B, x) \hookrightarrow \pi_1(A, x)$.

Il reste à montrer que $\pi_1(A \cap B, x)$ est bien engendré par les $\{\gamma_\alpha,\ \alpha \in A\}$. Pour cela, on peut appliquer la version "quelconque" du théorème de van Kampen avec comme morceaux $\{R_\alpha \cup C_\alpha,\ \alpha \in A\}$. ■

EXERCICE 2.22. — *Soit (X, x) un CW-complexe pointé.*

(1) *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\pi_1(X^{(n+1)}, x)$ et $\pi_1(X^{(n)}, x)$ sont isomorphes.*

(2) *En déduire que $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $\pi_1(X^{(2)}, x)$.*

COROLLAIRE 2.23. — *Un groupe est isomorphe au groupe fondamental d'un 2-complexe avec une seule 0-cellule.*

DÉMONSTRATION. Soit $G =< S|\mathcal{R} >$ une présentation du groupe (S et $\mathcal{R}$ sont infinis si G n'est pas de présentation finie). Nous allons construire un 2-complexe X de groupe fondamental G. Le 1-squelette $X^{(1)}$ est donné par un bouquet de $|S|$ cercles, dont le groupe fondamental est le groupe libre $\mathbb{F}_S$. A chaque relation $r \in \mathcal{R}$, on colle un disque le long du lacet décrit par les lettres du mot r, définissant ainsi $X^{(2)}$. D'après la proposition précédente, on a $\pi_1(X, x) \simeq< S|\mathcal{R} >$. ■

Nous venons donc de voir que l'on pouvait interpréter un groupe comme le groupe fondamental d'un 2-complexe. Montrons maintenant comment donner une interprétation topologique aux sommes amalgamées et extensions HNN de groupes abstraits.

LEMME 2.24. — Soient X un CW-complexe avec un seul sommet et Y un espace connexe par arcs. Tout morphisme $\varphi : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ est induit par une application continue $\alpha : X^{(2)} \to Y$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.21, le 2-squelette de X nous fournit une présentation $< S|\mathcal{R} >$ de $\pi_1(X, x)$. A chaque lacet γ_s représentant $s \in S$, on construit une application continue $\alpha : (\gamma_s, x) \to (Y, y)$ telle que $\alpha(\gamma_s)$ représente $\varphi(s)$. Soit $r \in \mathcal{R}$; il lui correspond un lacet $\gamma_{s_1} \ldots \gamma_{s_k}$ et $\varphi(s_1 \ldots s_k) = \varphi(e) = e$, donc $\alpha(\gamma_{s_1} \ldots \gamma_{s_k})$ est homotope à y. Cela nous permet d'étendre α à chaque 2-cellule de X continûment.

Par construction, on a $\alpha_* = \varphi$. ■

Considérons maintenant A, B, C des groupes munis de morphismes $j_A : C \to A$ et $j_B : C \to B$. D'après le corollaire 2.23, il existe des 2-complexes X_A, X_B et X_C de groupe fondamental A, B et C respectivement. Le lemme 2.24 nous représentent j_A et j_B par des applications continues $f_A : X_C \to X_A$ et $f_B : X_C \to X_B$. Formons maintenant $X = X_A \sqcup X_C \times [0,1] \sqcup X_B/ \sim$ où on identifie $X_C \times \{0\}$ avec $f_A(X_C)$ et $X_C \times \{1\}$ avec $f_B(X_B)$. Le CW-complexe X est recouvert par les quotients de $X_A \cup X_C \times [0, 1[$ et $X_B \cup X_C \times]0, 1]$.

Remarquons que X_A est un rétracte par déformation de $X_A \cup X_C \times [0,1[/\sim$; de même, X_B est un rétracte par déformation de $X_B \cup X_C \times]0,1]/\sim$ et $X_C \times \{1/2\}$ est un rétracte par déformation de $X_C \times]0,1[$. Du coup, $\pi_1(X,x)$ est isomorphe à la somme amalgamée de A et B au-dessus de C.

RÉFÉRENCES

[DD] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes.* Cassini, Paris, 2005. Seconde édition.

[Hat] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Mas] William Massey. *Algebraic Topology : An Introduction.* Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1987.

[SW] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.