10. APPLICATIONS AUX VARIÉTÉS DE DIMENSION TROIS

Ce chapitre a pour vocation de décrire des applications des chapitres précédents à la dimension 3. Il présente un panorama partiel des liens profonds entre les variétés de dimension 3 et leurs groupes fondamentaux.

Dans ce chapitre, une variété topologique sera toujours compacte, de dimension 2 ou 3, et orientable ; on parle de surface pour une variété de dimension 2. Ce sont donc des espaces compacts localement homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Une variété *à bord* M de dimension $n \geq 1$ a des points qui ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, qui forme *l'intérieur* de M, et des points qui ont un voisinage homéomorphe à $\{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n \geq 0\}$, formant le *bord* ∂M. Par *l'intérieur d'une variété* M, on entend donc $M \setminus \partial M$.

Une variété ou une surface est *close* si elle est compacte sans bord.

La référence classique sur la topologie des variétés de dimension 3 est l'ouvrage de Hempel [Hem].

Remarque 10.1. — La proposition 2.20 montre que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété close de dimension 4, ou de toute autre dimension supérieure. Par conséquent, une classification des variétés de grande dimension telle que nous la décrivons en dimension trois est inenvisageable, car tous les groupes apparaissent.

10.1. Un mot de topologie géométrique

La compacité nous assure que l'on pourra nous appuyer sur les résultats fondateurs mais néanmoins profonds suivants, valables aussi pour leurs revêtements.

Nos variétés sont d'une part séparées et d'autre part paracompactes, ce qui, en dimensions 2 et 3, nous fournit l'existence d'une triangulation, unique à isotopie et à raffinement près, par les travaux de Radó en dimension 2 dans les années 20, et par Moise et Bing en dimension 3 dans les années 50. Cela signifie qu'elles sont homéomorphes à des complexes simpliciaux.

De plus, toujours en dimensions 2 et 3, une variété compacte admet une unique structure différentiable à difféomorphisme près (deux variétés compactes différentiables et homéomorphes sont difféomorphes), d'après Munkres, Smale et Whitehead, dans les années 1960. En particulier, nous pouvons ainsi munir ces variétés de structures riemanniennes et nous affranchir de pathologies topologiques comme la sphère d'Alexander. Plus précisément, on supposera que toute immersion d'une surface dans une 3-variété sera « lissable », c'est-à-dire provenant d'une immersion lisse pour des structures différentiables appropriées.

Remarque 10.2. — Ces résultats ne sont pas vrais en dimension supérieure, ce qui apporte une difficulté supplémentaire à la classification des variétés en grande dimension.

10.2. **Variétés irréductibles**

Si M_1 et M_2 sont deux variétés, leur *somme connexe* $M_1 \sharp M_2$ s'obtient en supprimant dans chacune une boule et on recollant ce qui reste le long des sphères qui bordaient ces boules. Le théorème de van Kampen affirme $\pi_1(M_1 \sharp M_2) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$. On dit qu'une variété est *primitive* si elle ne peut pas se décomposer ainsi.

THÉORÈME 10.3 (Kneser, Milnor). — *Une variété compacte de dimension* 3 *se factorise en la somme finie de variétés primitives. Cette décomposition est unique à homéomorphisme près et à insersion près de sphères* S^3.

Cet énoncé est l'analogue du théorème de Grushko. Cependant, il est possible que le groupe fondamental d'une variété primitive ne soit pas librement indécomposable. C'est le cas si on recolle deux variétés à bord le long de disques contenus dans leurs bords. La conjecture de Kneser, établie par Whitehead, affirme que le groupe fondamental d'une variété M est un produit libre si on est dans l'une de ces situations : M contient une sphère plongée qui ne borde pas une boule mais qui sépare M ou M contient un disque plongé dont le bord est contenu dans ∂M et qui ne borde pas une boule avec ∂M.

Mis à part $S^2 \times S^1$, toutes les variétés primitives sont *irréductibles*, c'est-à-dire que toute sphère plongée borde une boule. Par ailleurs, $S^2 \times S^1$ est la seule variété close, primitive, de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$.

On ramène ainsi l'étude des variétés de dimension trois aux variétés irréductibles que l'on classe en deux grandes catégories selon que leur groupe fondamental est fini ou non. Si $\pi_1(M)$ est infini et M est irréductible, alors $\pi_1(M) \neq \mathbb{Z}$ et des arguments de topologie algébrique impliquent que $\tilde{M}$ est contractile, donc M est un $K(\pi, 1)$. Rappelons que cela implique que le type d'homotopie de M est entièrement déterminé par $\pi_1(M)$: deux telles variétés dont les groupes fondamentaux sont isomorphes ont même type d'homotopie. De plus, $\pi_1(M)$ est de présentation finie et sans torsion (si infini).

La question suivante qui se pose est de savoir si deux variétés qui ont le même type d'homotopie sont forcément homéomorphes. La réponse en général est négative. Les contre-exemples suivants sont les plus simples. Considérons

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \ |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

et, pour (p, q) premiers entre eux, on fait opérer $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$ par $n \cdot (z, w) = (ze^{2in\pi/p}, we^{2i\pi nq/p})$. Cette action est libre et le quotient $\mathbb{S}^3/G$ est *l'espace lenticulaire* $L_{p,q}$ de groupe fondamental G. On a les propriétés suivantes.

(1) Deux espaces lenticulaires $L_{p,q}$ et $L_{p,q'}$ ont même type d'homotopie si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $qq' \equiv \pm n^2 \bmod p$

(2) Deux espaces lenticulaires $L_{p,q}$ et $L_{p,q'}$ sont homéomorphes si et seulement si $q' \equiv \pm q^{\pm 1} \bmod p$.

10.3. **Variétés de Haken**

Soit M une variété compacte, orientable, irréductible, de dimension trois. Une surface S est *proprement plongée* dans M si S est compacte et orientable et si, ou bien $S \cap \partial M = \partial S$, ou bien S est contenue dans ∂M. Une surface proprement plongée S dans M est *incompressible* si aucune composante de S n'est homéomorphe à S^2 et si l'inclusion $i : S \to M$ induit un morphisme injectif $i_* : \pi_1(S) \to \pi_1(M)$ pour chaque composante connexe de S. La surface S est dite *essentielle* si elle est proprement plongée, incompressible, et si aucune composante ne peut être déformée dans ∂M. Enfin, on dit que M est une *variété hakenienne* (ou de Haken) si M est compacte, irréductible et contient une surface essentielle.

Exemples.— Il existe beaucoup de variétés hakeniennes, et on connaît aussi beaucoup d'exemples qui ne le sont pas. Les variétés à bord non vide sont hakeniennes, et plus généralement celles dont le premier groupe d'homologie est infini.

Intérêts historiques des variétés hakeniennes.— L'existence d'une surface essentielle S dans M permet de découper M le long de S et d'obtenir ainsi une nouvelle variété M_S qui est irréductible. Le groupe fondamental de M s'obtient par amalgames et/ou extension HNN des groupes fondamentaux des composantes de M_S au-dessus des groupes fondamentaux des composantes de S. Si M_S n'est pas une union de boules, alors chaque composante est hakenienne et le processus peut être itéré. Le théorème de finitude de Haken entraîne que ce processus se termine en un nombre fini d'étapes et résulte en un nombre fini de boules, munies d'un « plan de montage ». La suite de variétés ainsi obtenues par découpage successif définit une *hiérarchie* de M. On obtient de même une *hiérarchie* pour le groupe fondamental de M qui se termine par une collection finie de groupes triviaux. Cette propriété permet de faire des arguments par récurrence sur la longueur de la hiérarchie. Réciproquement, une variété M que l'on peut obtenir à partir d'un nombre fini de boules en les recollant le long de parties de leurs bords de sorte que celles-ci deviennent essentielles sera hakenienne.

Il en résulte que de nombreux résultats sont donc établis —au moins dans un premier temps— pour les variétés hakeniennes. Nous donnons deux tels exemples.

Haken utilise cette hiérarchie pour résoudre le *problème d'homéomorphisme* pour ses variétés : il donne un algorithme qui permet de vérifier si deux variétés hakeniennes sont homéomorphes ou non. Le problème général (en dimension 3) est maintenant connu.

Le prochain énoncé, dont la démonstration utilise aussi la hiérarchie de Haken, apporte une réponse positive à la question posée au paragraphe précédent.

Théorème 10.4 (Waldhausen). — *Soit $f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ une équivalence d'homotopie entre variétés irréductibles qui se restreint aux bords par un homéomorphisme s'ils sont non vides. Si N est hakenienne, alors f est homotope à un homéomorphisme.*

Waldhausen pose la question suivante remise au goût du jour par Thurston, appelée la conjecture Haken virtuelle :

CONJECTURE 10.5 (Waldhausen, 1968). — *Une variété compacte irréductible de groupe fondamental infini possède un revêtement fini hakenien.*

L'objet principal de ce chapitre est de raconter les grandes idées conduisant à la démonstration de cette conjecture, ainsi que d'autres applications de la théorie géométrique des groupes.

10.4. **Variétés fibrées**

Ce sont des variétés M qui admettent une projection $\pi : M \to B$ de sorte que les fibres $\pi^{-1}(x)$ sont toutes homéomorphes à une variété F. On a essentiellement deux situations selon que $\dim B = 1$ et $\dim F = 2$ ou $\dim B = 2$ et $\dim F = 1$.

10.4.1. *Variétés qui fibrent au-dessus du cercle.* Ce sont des variétés qui se présentent sous la forme suivante. On considère une surface S et un homéomorphisme $\varphi : S \to S$. On construit la suspension

$$M = S \times [0,1]/(x,0) \sim (\varphi(x),1)\,.$$

On a une projection canonique $\pi : M \to S^1$ de fibre S. Le groupe fondamental de M s'exprime en fonction de S ainsi : $\pi_1(M) = \pi_1(S) \rtimes \mathbb{Z} = \pi_1(S)*_{\pi_1(S)}$.

Si $S = S^2$, on a huit exemples de variétés. Si $S \neq S^2$, alors M est hakenienne, puisque chaque fibre est une surface essentielle.

10.4.2. *Variétés de Seifert.* Ce sont des variétés dont la base est une surface et les fibres sont des cercles. Mis à part un nombre fini de fibres exceptionnelles, elles admettent un voisinage homéomorphe à $D^2 \times S^1$ fibré par $\{z\} \times S^1$. Pour chaque fibre exceptionnelle, il existe p, q premiers entre eux tels qu'un voisinage est homéomorphe à

$$D^2 \times [0,1]/(z,0) \sim (ze^{2ip\pi/q},1)\,.$$

Les fibres autour de la fibre exceptionnelle centrale font q tours pour se refermer en s'enroulant p fois autour de la fibre centrale. Les fibres représentent des éléments non triviaux de $\pi_1(M)$; ils se relèvent en un feuilletage en droites sur $\widetilde{M}$. On obtient une fibration régulière $\pi : M' \to S' = S \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ en supprimant les fibres exceptionnelles.

Ces variétés sont classées depuis les années 1930, voir [Sco].

10.5. **Géométrisation**

On présente un aspect fondamental du programme de Thurston qui fournit une classification assez explicite des variétés de dimension 3. On motive cette classification par le cas des surfaces.

10.5.1. *Cas des surfaces.* Rappelons la classification des surfaces. Si S est une surface compacte, la *caractéristique d'Euler* de S est la somme alternée du nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces d'une triangulation de S. Cette quantité est indépendante de la triangulation choisie et ne dépend que de la topologie de la surface. On a la classification remarquable suivante connue sous le nom de théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe.

THÉORÈME 10.6. — *Soit S une surface compacte orientable. Son intérieur $S' = S \setminus \partial S$ peut être muni d'une structure riemannienne complète, dont le revêtement universel est, à isométrie près,*

(1) *la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{E}^3$ si $\chi(S) > 0$;*
(2) *le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ si $\chi(S) = 0$;*
(3) *le plan hyperbolique de Poincaré $\mathbb{H}^2$ si $\chi(S) < 0$.*

De plus, $\chi(S) > 0$ seulement pour la sphère, $\chi(S) = 0$ pour le tore $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ et le cylindre $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}$. Toutes les autres surfaces sont revêtues par le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Leurs groupes de revêtements s'identifient à des groupes *fuchsiens* —sous-groupes discrets de $\mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Ce sont donc des groupes hyperboliques de bord S^1 pour les surfaces closes, ou des groupes libres non cycliques sinon. Il en résulte que le groupe fondamental suffit aussi à déterminer la géométrie de la surface : soit S une surface compacte de groupe fondamental G et d'intérieur S'.

- Le groupe G est trivial et S est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.
- Le groupe G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$, et S' est munie d'une structure euclidienne complète.
- Le groupe G est hyperbolique, infini non cyclique, et S' est munie d'une structure hyperbolique. De plus, G est non libre si, et seulement si S est close si, et seulement si le bord de G est homéomorphe à S^1.

Le fait remarquable est que la topologie détermine complètement la géométrie portée par S. La dimension 2 a la particularité que toute structure riemannienne induit une structure de variété complexe, c'est-à-dire de surfaces de Riemann. L'ouvrage [dSG] fournit de nombreuses démonstrations alternatives du théorème d'uniformisation.

10.5.2. *Les huit géométries de la dimension* 3. Thurston propose au début des années 1980 une version du théorème d'uniformisation pour les 3-variétés [Thu1, Thu2]. Cela marque un tournant de la théorie. Ce paragraphe s'appuie sur [Thu2, Sco].

Il convient tout d'abord d'identifer les géométries modèles qui remplaceront $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{E}^2$ et $\mathbb{H}^2$. Selon Thurston, une *géométrie modèle* est un couple (G, X) où X est une variété connexe et simplement connexe, G est un groupe de Lie de difféomorphismes de X tel que

(1) G opère transitivement sur X (pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) = y$) et les stabilisateurs de points sont compacts ;

(2) G est maximal pour la propriété ci-dessus ;

(3) il existe un sous-groupe discret Γ de G tel que X/Γ est une variété compacte.

On peut alors munir X d'une structure riemannienne homogène et complète, essentiellement unique, pour laquelle G opère par isométries. *Géométriser ou uniformiser* une variété compacte M correspond à identifier son intérieur avec un quotient X/Γ où X est une géométrie modèle et $\Gamma < G$ est un sous-groupe discret tels que X/Γ est complet.

THÉORÈME 10.7 (Thurston). — *Il existe exactement huit géométries modèles en dimension* 3*, classées par le stabilisateur d'un point :*

(1) *stabilisateur* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *:* $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ *et* $\mathbb{H}^3$ *;*

(2) *stabilisateur* $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ *:* $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, *Nil et* $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ *;*

(3) *stabilisateur trivial : Sol.*

Une variété close ne possède au plus qu'une seule de ces géométries.

La géométrie *Nil* est modelée sur le groupe d'Heisenberg

$$\mathbf{H}(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x,y,z\in\mathbb{R}^3 \right\}$$

que l'on munit d'une structure riemannienne invariante. La variété $\mathbf{H}(\mathbb{R})/\mathbf{H}(\mathbb{Z})$ est un exemple de variété compacte. La géométrie *Sol* est modelée sur $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ où l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

muni d'une métrique riemannienne invariante. On obtient un exemple de variété compacte en considérant la suspension du tore par l'automorphisme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a déjà rencontré $S^2\times S^1$ qui est un quotient de $S^2\times\mathbb{R}$ —non irréductible. De même, si S est une surface de genre 2, alors $S\times S^1$ est un quotient de $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Un exemple de variété compacte modelée sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ est donné par le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique compacte. Les espaces lenticulaires sont des exemples de compacts revêtus par $\mathbb{S}^3$ et le tore $\mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3$ par $\mathbb{E}^3$. Un exemple de variété hyperbolique est la variété de Seifert-Weber, obtenue en recollant les faces opposées d'un dodécaèdre hyperbolique, dont les angles dièdres sont de $2\pi/5$, en faisant $3/10$ème de tour pour les recoller. Notons que cette variété n'est pas hakenienne.

Thurston propose alors la conjecture suivante qu'il résout dans le cas des variétés hakeniennes [Thu1].

CONJECTURE 10.8 (géométrisation, 1982). — *Soit M une variété compacte orientable irréductible de dimension* 3*. Son intérieur admet une décomposition canonique le long d'une famille finie de tores essentiels en sous-variétés possédant une structure géométrique homogène complète.*

Combinée avec la preuve de Thurston de cette conjecture pour les variétés hakeniennes, la solution de la conjecture de Waldhausen aurait apportée une solution complète à ce problème d'uniformisation. Il existe de nombreuses rédactions du théorème de Thurston ; parmi elles [Boi, Gro, Mor, Kap, Ota1, Ota2]. En fait, la conjecture de géométrisation a été résolue par Perel'man avant la conjecture de Waldhausen. Sa solution repose sur des méthodes riemanniennes, en particulier l'étude du flot de Ricci, voir p.ex. [BBM$^+$] pour une démonstration. Notons qu'elle résout la conjecture suivante.

CONJECTURE 10.9 (Poincaré-Smith). — *La variété M admet une métrique sphérique si et seulement si son groupe fondamental est fini. En particulier, une variété close compacte simplement connexe de dimension trois est homéomorphe à S^3 (Poincaré).*

10.6. **La conjecture Haken virtuelle**

On décrit les arguments qui permettent d'établir la conjecture de Waldhausen.

10.6.1. *Réduction aux variétés hyperboliques closes.* D'après la géométrisation, si la variété ne contient pas un de ses tores canoniques essentiels qui la décomposent, elle porte une des huit géométries modèles. Les variétés compactes *Sol* sont toutes obtenues par des suspensions du tore par des automorphismes linéaires ayant deux valeurs propres réelles simples. La sphère $\mathbb{S}^3$ ne produit que des groupes finis. Les variétés $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Nil* et $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ sont toutes naturellement feuilletées par des droites et leurs quotients sont des fibrés de Seifert. Les variétés euclidiennes sont bien comprises : il s'avère qu'elles sont toutes fibrées en cercles aussi.

Considérons donc un fibré de Seifert M au-dessus d'une surface S. Si l'intérieur S' de S admet une courbe fermée simple essentielle (non homotopiquement triviale, ni homotope à une composante de bord), alors son relevé dans M est un tore essentiel. Donc cette variété est hakenienne. Lorsque $\pi_1(M)$ est infini et S' ne contient pas de courbe essentielle, alors la base est une sphère avec deux ou trois points marqués. On peut alors revêtir S par une surface plus riche et tirer en arrière la fibration pour définir un revêtement fini de M qui deviendra ainsi hakenienne.

Il ne reste donc que les variétés hyperboliques à analyser. En conclusion, on a

COROLLAIRE 10.10. — *Soit M une variété compacte orientable de dimension* 3 *avec un groupe fondamental infini. On a l'une des possibilités suivantes.*

(1) *La variété M a un bord non vide.*

(2) *La variété M contient un tore essentiel.*

(3) *La variété M est fibrée en cercles au-dessus d'une sphère avec deux ou trois points marqués.*

(4) *La variété M est close et hyperbolique.*

Par conséquent, mis à part les variétés closes hyperboliques, toutes les autres sont virtuellement hakeniennes.

Remarque 10.11. — Avant la solution complète de la conjecture de géométrisation, le théorème de Thurston, le travail de Mess et les travaux équivalents de Casson et Jungreis [CJ] et Gabai [Gab] montraient l'alternative suivante pour une variété close M orientable :

(1) ou bien M contient un tore essentiel ;

(2) ou bien M est fibrée en cercles au-dessus d'une sphère avec deux ou trois points marqués ;

(3) ou bien M a un groupe fondamental infini sans sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La géométrisation permet donc de conclure que le dernier cas caractérise les variétés hyperboliques closes.

10.6.2. *Variétés hyperboliques.* Une variété hyperbolique orientable M est le quotient $\mathbb{H}^3/G$ où G est un groupe *kleinéen*, c'est-à-dire un sous-groupe discret de $\mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. La variété est close si l'action de G sur $\mathbb{H}^3$ est géométrique, *cf.* la déf. 1.9. Cela implique que G est hyperbolique et son bord est S^2.

Soit H un sous-groupe de G. Si H est isomorphe au groupe fondamental d'une surface close et S est quasiconvexe dans G, alors son action est quasiconvexe et son ensemble limite est une courbe fermée simple. Cela entraîne que H est de codimension 1. Par ailleurs, on peut recoller un disque D dans $\mathbb{H}^3$ le long de Λ_H invariant par H, de sorte que D/H est la surface S et D/G produit une *immersion* de S dans M. De plus, il existe un ensemble fini $F < G \setminus H$ tel que $g(D) \cap D \neq \emptyset$ si et seulement si $g \in HFH$. La séparabilité de H dans G montrerait donc l'existence d'un revêtement fini dans laquelle S se plongerait de manière essentielle.

Une avancée spectaculaire pour la résolution de la conjecture de Waldhausen est le théorème suivant, rendu accessible en 2009.

Théorème 10.12 (Kahn et Markovic [KM]). — *Soit $M = \mathbb{H}^3/G$ une variété close. Pour tout cercle euclidien S^1 sur $\widehat{\mathbb{C}}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une surface immergée incompressible $S = \mathbb{H}^2/H \looparrowright M$ telle que Λ_H est ε-proche du cercle S^1.*

Les idées de la démonstration font l'objet de [Ber]. Les auteurs construisent des surfaces en recollant des pantalons qu'ils assemblent en étudiant les propriétés ergodiques du flot géodésique opérant sur le fibré des repères.

Ce théorème implique que G contient beaucoup de sous-groupes quasiconvexes de codimension 1, au point que toute paire de points puisse être séparée par l'une d'elles. Le théorème 9.54 implique que l'on peut faire opérer G sur un complexe cubique CAT(0) X de sorte que les stabilisateurs d'hyperplans sont, à indice fini près, les groupes de surface quasiconvexes de codimension 1. Ces groupes ont donc une action convexe-cocompacte sur X.

Rappelons que l'on veut établir leur séparabilité. D'après le théorème 8.30, il suffit de montrer que G admet un sous-groupe spécial d'indice fini, *cf.* le lemme 5.5. Cette dernière étape est franchie par Agol en résolvant la conjecture de Wise.

THÉORÈME 10.13 (Agol, [Ago2]). — *Un groupe hyperbolique opérant géométriquement sur un complexe cubique CAT(0) contient un sous-groupe d'indice fini qui opère spécialement sur ce même complexe cubique.*

10.7. **Conséquences, applications et extensions**

Dans [Thu1], Thurston explique son point de vue sur les variétés de dimension 3 et rassemble 24 problèmes. Le théorème 10.13 d'Agol permet de résoudre quatre des cinq questions qui restaient ouvertes, voir [Ota3] pour un état des lieux du programme de Thurston.

10.7.1. *Conjecture fibrée virtuelle.* Thurston conjecture dans [Thu1] que toute variété hyperbolique admet un revêtement fini qui fibre au-dessus du cercle, lui conférant ainsi une structure très spéciale.

Un travail d'Agol précédent donnait un critère algébrique sur le groupe fondamental d'une variété hyperbolique pour qu'elle fibre virtuellement au-dessus du cercle [Ago1]. Pour introduire cette condition, notons $D(G)$ le groupe dérivé de G, engendré par ses commutateurs. Son radical $D_{\text{rad}}(G)$ est l'ensemble des $g \in G$ dont une puissance est dans $D(G)$. Agol dit que G est *RFRS* —-Residually Finite Rational Solvable— s'il existe une suite de sous-groupes

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$$

tels que $\cap G_j = \{1\}$, G_{j+1} est d'indice fini dans G_j et contient $D_{\text{rad}}(G_j)$ pour chaque $j \geq 0$.

THÉORÈME 10.14 (Agol). — *Soit M une variété de dimension* 3. *Si $\pi_1(M)$ est RFRS alors M possède un revêtement fini qui fibre au-dessus du cercle.*

Or Agol montre aussi que tout groupe virtuellement spécial est virtuellement RFRS.

COROLLAIRE 10.15. — *Une variété hyperbolique close possède un revêtement fini qui fibre au-dessus du cercle.*

10.7.2. *Premier nombre de Betti virtuel infini.* Les groupes spéciaux jouissent de nombreuses propriétés du fait d'être un sous-groupe convexe-cocompact d'un groupe d'Artin à angles droits. Par exemple, un groupe d'Artin à angles droits est linéaire et, s'il n'est pas libre abélien, alors il admet une surjection sur $\mathbb{F}_2$. Cela a la conséquence suivante.

Corollaire 10.16. — *Pour tout $n \geq 1$, une variété close hyperbolique possède un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est supérieur à n.*

10.7.3. *Séparabilité des sous-groupes des groupes kleinéens.* On a vu qu'un sous-groupe quasiconvexe d'un groupe hyperbolique spécial est séparable. Or, le théorème de sagesse affirme que toute variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est l'intérieur d'une variété compacte. Cela permet d'analyser les sous-groupes de type fini correspondant aux bouts et de montrer que ceux-ci sont, à un revêtement près, les groupes fondamentaux de fibres d'une fibration au-dessus du cercle. Autrement dit, un sous-groupe de type fini est ou bien quasiconvexe ou bien le groupe fondamental d'une fibre virtuelle, voir [Cay]. On obtient ainsi

Corollaire 10.17. — *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique est LERF s'il est de type fini.*

10.7.4. *Hiérarchies et groupes hyperboliques spéciaux.* Pour la démonstration du théorème 10.13, Agol utilise des travaux très profonds de Wise qui donnent une caractérisation des groupes hyperboliques spéciaux en terme de hiérarchie [Wis1, Wis2].

Wise introduit la classe $\mathcal{QVH}$. C'est la plus petite classe de groupes qui contient $\{1\}$ et qui est stable par les opérations suivantes :

(1) Si $G = A *_C B$ avec $A, B \in \mathcal{QVH}$ et C quasiconvexe dans G, alors $G \in \mathcal{QVH}$;

(2) Si $G = A*_C$ avec $A \in \mathcal{QVH}$ et C quasiconvexe dans G, alors $G \in \mathcal{QVH}$;

(3) Si G contient $A \in \mathcal{QVH}$ et A d'indice fini dans G, alors $G \in \mathcal{QVH}$.

Un groupe dans $\mathcal{QVH}$ est dit d'avoir une *hiérarchie quasiconvexe virtuelle.* Cela correspond à des groupes de type « Haken », comme les groupes spéciaux, *cf.* la proposition 8.27).

Théorème 10.18 (Wise). — *Un groupe hyperbolique est virtuellement spécial si, et seulement s'il appartient à la classe $\mathcal{QVH}$.*

10.7.5. *Conjecture de Cannon.* Nous avons vu précédemment que le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique close est hyperbolique de bord S^2. Motivé par l'hyperbolisation des 3-variétés, Cannon propose la conjecture suivante [Cao].

Conjecture 10.19 (Cannon). — *Un groupe hyperbolique de bord S^2 contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe au groupe fondamental d'une variété hyperbolique close.*

Cette conjecture est encore largement ouverte. Cependant, si on suppose de plus que G opère géométriquement sur un complexe cubique, alors Markovic montre que ce groupe est effectivement virtuellement kleinéen [Mar]. Une manière de procéder est d'utiliser la hiérarchie donnée par le fait que G est virtuellement spécial pour construire une variété irréductible compacte dont le groupe fondamental est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de G. Le théorème d'uniformisation de Thurston (cas hakenien) permet alors de conclure.

REMARQUE 10.20. — L'existence d'une seule surface essentielle entraîne l'existence d'une hiérarchie du groupe fondamental. En revanche, dans le cadre abstrait des groupes, un seul scindement n"implique pas en général une hiérarchie. Donc, pour la conjecture de Cannon, il ne suffit pas de trouver un seul sous-groupe quasiconvexe de codimension 1.

RÉFÉRENCES

[Ago1] Ian Agol. Criteria for virtual fibering. *J. Topol.* **1**(2008), 269–284.

[Ago2] Ian Agol. The virtual Haken conjecture. *Documenta Math.* **18**(2013), 1045–1087. With an appendix by Ian Agol, Daniel Groves, Jason Manning.

[Ber] Nicolas Bergeron. La conjecture des sous-groupes de surfaces (d'après Jeremy Kahn et Vladimir Marković). *Astérisque* (2013), Exp. No. 1055, x, 429–458. Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058.

[BBM+] Laurent Bessières, Gérard Besson, Sylvain Maillot, Michel Boileau, and Joan Porti. *Geometrisation of 3-manifolds*, volume 13 of *EMS Tracts in Mathematics.* European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.

[Boi] Michel Boileau. Uniformisation en dimension trois. *Astérisque* (2000), Exp. No. 855, 4, 137–174. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99.

[Cay] Richard D. Canary. Marden's tameness conjecture : history and applications. In *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, volume 6 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 137–162. Int. Press, Somerville, MA, 2008.

[Cao] James W. Cannon. The theory of negatively curved spaces and groups. In *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ., pages 315–369. Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[CJ] Andrew Casson and Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.* **118**(1994), 441–456.

[dSG] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann.* ENS Éditions, Lyon, 2010. Retour sur un théorème centenaire. [A look back at a 100-year-old theorem], The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévennec, and Jean-Claude Sikorav.

[Gab] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Ann. of Math. (2)* **136**(1992), 447–510.

[Gro] Michael Gromov. Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen). In *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, volume 842 of *Lecture Notes in Math.*, pages 40–53. Springer, Berlin-New York, 1981.

[Hem] John Hempel. *Three-Manifolds.* Princeton University Annals of Math Studies 86, 1976.

[KM] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *Ann. of Math. (2)* **175**(2012), 1127–1190.

[Kap] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[Mar] Vladimir Markovic. Criterion for Cannon's conjecture. *Geometric and Functional Analysis* **23**(2013), 1035–1061.

[Mor] John Morgan. On Thurston's uniformization theorem for three dimensional manifolds. In *The Smith Conjecture*, pages 37–125. Academic Press, 1984.

[Ota1] Jean-Pierre Otal. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque* (1996), x+159.

[Ota2] Jean-Pierre Otal. Thurston's hyperbolization of Haken manifolds. In *Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996)*, pages 77–194. Int. Press, Boston, MA, 1998.

[Ota3] Jean-Pierre Otal. William P. Thurston : "Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry" [Zentralblatt für Mathematic review of MR 0648524]. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **116**(2014), 3–20.

[Sco] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.* **15**(1983), 401–487.

[Thu1] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 357–381.

[Thu2] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy, accessible sur `http://www.msri.org/publications/books/gt3m/`.

[Wis1] Daniel T. Wise. Research announcement : the structure of groups with a quasiconvex hierarchy. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **16**(2009), 44–55.

[Wis2] Daniel T. Wise. The structure of groups with a quasiconvex hierarchy. preprint, Oct. 2012.