1. OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE DES GROUPES

L'objet principal des la *théorie géométrique des groupes* est d'étudier les propriétés des groupes par des méthodes géométriques, voire topologiques. Un de ces aspects est de considérer un groupe comme un objet géométrique.

Suivant F. Klein, une géométrie est donnée par un ensemble X et un groupe de transformations G de X i.e., un sous-groupe G des bijections de X. On peut par exemple étudier un espace vectoriel E muni du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$, un espace affine euclidien muni du groupe de ses isométries, etc. On étudie alors les « êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe » [Kle]. Dans le premier exemple, il s'agit des sous-espaces vectoriels, des applications linéaires, etc. Dans le second, cela comprend aussi la notion d'orthogonalité, de distances à des sous-espaces affines, etc.

L'objet principal de la géométrie est donc de développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe. De manière générale, deux géométries (X_1, G_1) et (X_2, G_2) sont équivalentes s'il existe une bijection $b : X_1 \to X_2$ qui conjugue les groupes G_1 et G_2 :

$$G_2 = \{b \circ g \circ b^{-1},\ g \in G_1\}\,.$$

D'une certaine manière, le programme d'Erlangen de F. Klein défend la thèse selon laquelle la géométrie se ramène à l'étude des groupes qui préservent les structures ajoutées. Dans ce cours, nous adoptons le point de vue inverse : on étudie un groupe en considérant les différentes actions qu'il admet sur des espaces géométriques, voire topologiques. On tire les propriétés algébriques du groupe en appliquant des méthodes géométriques. Cette méthode remonte aux travaux de M. Dehn, et a été systématiquement appliquée par M. Gromov, avec des résultats spectaculaires.

Rappelons qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X est donnée par un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{Bij}\,(X)\,.$$

En général, X sera muni d'une structure d'espace métrique. Les exemples de groupes considérés seront souvent des groupes fondamentaux d'espaces métriques compacts localement simplement connexes.

Avant de rentrer plus en avant dans le vif du sujet, on rappelle quelques notions élémentaires de géométrie métrique. Nous verrons ensuite comment interpréter un groupe de type fini comme un espace métrique. Nous décrirons ensuite les notions de présentation d'un groupe, de bouts d'un groupe, ainsi que la relation fondamentale de quasi-isométrie. Nous prendrons comme exemples les groupes libres (non abéliens).

Ce chapitre est essentiellement basé sur [BH, SW].

1.1. Notions de géométrie métrique

Dans tout ce paragraphe, (X, d) désigne un espace métrique.

On dit que X est *propre* si, pour tout $x_0 \in X$, la fonction $x \in X \mapsto d(x_0, x)$ est propre, autrement dit les boules fermées de rayon fini sont compactes, ou encore, les fermés bornés sont compacts.

Une courbe (paramétrée) ou un chemin dans X est une application continue $\gamma : I \to X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut, comme dans les espaces euclidiens et lorsque I est compact, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{0 \le j < n} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \le j \le n}$ de I telles que $[t_0, t_n] = I$. Si I n'est pas compact, alors on définit $\ell(\gamma) = \sup_{J \subset I} \ell(\gamma|_J)$, où le supremum est pris sur les intervalles compacts de I. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable.*

Un chemin $\gamma : I \to X$ est *géodésique* si, pour tous $s, t \in I$, on a $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$. On dit que γ, ou $\gamma(I)$, est une *géodésique* si $I = \mathbb{R}$, un *rayon (géodésique)* si $I = \mathbb{R}_+$ et un *segment (géodésique)* si I est un intervalle compact.

Un segment géodésique d'extrémités x et y sera noté $[x, y]$, même s'il n'est pas unique.

DÉFINITION 1.1 (Espace de longueur). — *Un espace métrique (X, d) est un espace de longueur si, pour tous $x, y \in X$,*

$$d(x, y) = \inf \ell(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins $\gamma : [0, 1] \to X$ d'extrémités x et y i.e., tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

On dit que X est *géodésique* si toute paire de points $\{x, y\}$ est jointe par un segment géodésique (qui n'est pas forcément unique). Un espace géodésique est donc un espace de longueur. La réciproque est vraie si X est propre :

EXERCICE 1.2. — *Montrer que si X est un espace de longueur propre, alors X est géodésique.*

EXERCICE 1.3. — *Soit X un espace géodésique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'espace X est propre.*

(2) *L'espace X est localement compact et complet.*

Montrer que cette équivalence n'est plus vraie si on ne suppose plus X géodésique.

1.2. Groupes de type fini, graphes de Cayley

Un groupe G est *de type fini* s'il est finiment engendré. Autrement dit, il existe un ensemble fini $S \subset G$ tel que, pour tout $g \in G$, il existe $s_1, \ldots, s_k \in S$ tels que

$$g = s_1 s_2 \ldots s_k \,.$$

Dans ce paragraphe, on montre comment associer un espace métrique à un groupe de type fini muni d'une action de ce groupe. On présente d'abord une famille de groupes qui jouent un rôle particulier dans la théorie.

1.2.1. *Groupes libres.* Soit A un ensemble, que l'on appelle *alphabet* et ses éléments *lettres.* On définit formellement A^{-1} en écrivant a^{-1} pour $a \in A$. Un *mot* est un élément de $A^* = \cup_{n\geq 0}(A \cup A^{-1})^n$, où $A^0 = \{\emptyset\}$. En général, on écrit un mot $(a_1, \ldots, a_n)$ sous la forme $a_1 a_2 \ldots a_n$; p. ex. $a_1 a_2^2 a_1^{-1} a_3$ si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \geq 3$.

On munit A^* de la loi de composition interne définie par concaténation : si $m_1, m_2 \in A^*$, alors on construit $m_1 m_2 \in A^*$. On vérifie que cette loi est associative d'élément neutre le mot vide $\emptyset$.

On définit la relation d'équivalence sur les mots engendrée par les relations $m_1 a a^{-1} m_2 \sim m_1 m_2$ et $m_1 a^{-1} a m_2 \sim m_1 m_2$, où $m_1, m_2 \in A^*$ et $a \in A$. Un mot qui ne contient aucun sous-mot de la forme $m_1 a a^{-1} m_2$ ou $m_1 a^{-1} a m_2$ s'appelle un *mot réduit.*

Le *groupe libre* $\mathbb{F}(A)$ d'alphabet A est $A^*/\sim$ muni de la concaténation.

EXERCICE 1.4. — *Le but de cet exercice est de montrer que* $\mathbb{F}(A)$ *et* $\mathbb{F}(B)$ *sont isomorphes si et seulement si* A *et* B *ont même cardinal.*

(1) *Soit* $N(A)$ *le sous-groupe de* $\mathbb{F}(A)$ *engendré par les carrés* g^2 *de* $\mathbb{F}(A)$. *Montrer que* $N(A)$ *est distingué dans* $\mathbb{F}(A)$.

(2) *Montrer que* $\mathbb{F}(A)/N(A)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^A$ *et que ce quotient a une structure naturelle d'espace vectoriel sur* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) *En déduire que* $\mathbb{F}(A)$ *et* $\mathbb{F}(B)$ *sont isomorphes si et seulement si* A *et* B *ont même cardinal.*

Si $n \geq 1$, on désigne par $\mathbb{F}_n$ le groupe libre sur n lettres. Si $n = 1$, alors $\mathbb{F}_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Plus généralement, $\mathbb{F}_n$ est isomorphe au groupe fondamental d'un bouquet de n cercles i.e, la réunion disjointe de n cercles marqués (S^1, a_j), $1 \leq j \leq n$, où on identifie les points a_j.

EXERCICE 1.5. — *Soit* G *un groupe de type fini. Si* S *est un système de générateurs fini, on définit l'application* $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$ *qui à un mot* $s_1 \ldots s_k$ *associe l'élément du groupe* $g = s_1 \ldots s_k \in G$.

(1) *Montrer que* π *est un morphisme de groupes.*

(2) *Montrer que* G *est isomorphe à* $\mathbb{F}(S)/\ker \pi$.

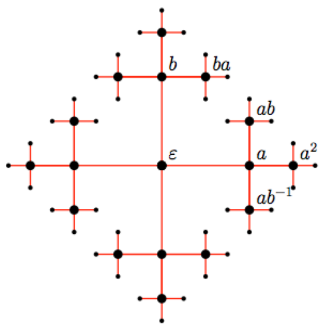
Soit (G, S) un groupe de type fini muni d'un système de générateurs S symétrique ($s \in S$ implique $s^{-1} \in S$). On définit $|g|_S$ comme le nombre minimal de lettres de S nécessaires pour écrire g en les générateurs de S. On définit la *métrique des mots* sur G associée à S en posant $d_S(g, g') = |g^{-1}g'|_S$. On vérifie facilement que $d_S(gx, gy) = d_S(x, y)$ pour tous $g, x, y \in G$.

1.2.2. *Graphes de Cayley.* On appelle *graphe* un espace topologique Γ obtenu à partir d'un ensemble $A = \Gamma^{(1)}$ réunion disjointe de copies de l'intervalle $[0,1]$ en identifiant des extrémités. Le graphe Γ est fini si A est une réunion finie de copies de l'intervalle $[0,1]$. On appelle *arête* chaque élément de A. Une arête a deux extrémités éventuellement confondues dans Γ, les éléments de l'ensemble $S = \Gamma^{(0)}$ de points du graphe ainsi obtenus sont appelés les *sommets* de Γ.

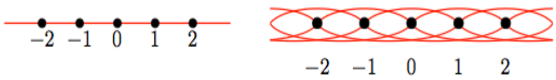
Si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G ($s \in S$ seulement si $s^{-1} \in S$), on peut considérer le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et on joint une paire $(g, g') \in G \times G$ par une arête étiquetée par $s \in S$ si $g^{-1}g' = s$. On oriente l'arête dans le sens (g, gs), de sorte que si on lit un chemin orienté d'arêtes en partant de l'élément neutre e que l'on retranscrit de la gauche vers la droite, alors on obtient une écriture de l'autre extrémité g en les générateurs de S. En particulier, une boucle dans $\mathcal{G}$ issue de e est une écriture de l'élément neutre. Par conséquent, si A est fini et que l'on considère le graphe de Cayley de $\mathbb{F}(A)$ en prenant comme générateurs les a, a^{-1}, $a \in A$, on obtient un graphe sans boucle, donc un arbre, car les éléments de $\mathbb{F}(A)$ sont en bijection avec les mots réduits de A^*.

En munissant $\mathcal{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$, on obtient la métrique des mots associée à S sur les sommets. Elle fait de $\mathcal{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action libre sur $\mathcal{G}$.

Exemple : le groupe libre. — Voici le graphe de Cayley du groupe libre à deux générateurs avec les générateurs standard.



Exemple.— Si $G = \mathbb{Z}$, on peut prendre le système de générateurs $\{1, -1\}$. On obtient ainsi une droite. Mais si on prend $\{2, 3, (-2), (-3)\}$, alors le graphe est différent.



Cay($\mathbb{Z}$, {1})   Cay($\mathbb{Z}$, {2, 3})

On commence par une proposition qui montre que toutes les actions sur les graphes de Cayley localement finis sont semblables.

PROPOSITION 1.6. — *Soit G un groupe de type fini. Si S et S' sont deux systèmes de générateurs finis, alors* $\mathrm{Id} : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$ *est bilipschitzienne : il existe une constante $L \geq 1$ telle que, pour tous $g, g' \in G$,*

$$\frac{1}{L} d_S(g, g') \leq d_{S'}(g, g') \leq L d_S(g, g') \,.$$

DÉMONSTRATION. On considère l'application $\mathrm{Id} : (G, d_S) \to (G, d_{S'})$. Si $g_1, g_2 \in G$ alors on a $d_S(g_1, g_2) = |g_1^{-1} g_2|_S$ et $d_{S'}(g_1, g_2) = |g_1^{-1} g_2|_{S'}$. Si $|g_1^{-1} g_2|_S = m$ alors $|g_1^{-1} g_2|_{S'} \leq \ell \cdot m$ où $\ell = \max\{|s|_{S'}, s \in S\}$, impliquant ainsi $d_{S'}(g_1, g_2) \leq \ell d_S(g_1, g_2)$. Par symétrie, on obtient $d_S(g_1, g_2) \leq \ell' d_{S'}(g_1, g_2)$, avec $\ell' = \max\{|s'|_S, s' \in S'\}$. ∎

EXERCICE 1.7. — *Soit G un groupe de type fini muni d'un système de générateurs fini S. On note $v_S(n) = Card\, B_S(e, n)$.*

(1) *Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq 1$, la boule $B_S(e, n)$ dans la métrique d_S contient au plus k^n éléments.*

(2) *Comparer le comportement de v_S lorsque l'on change de système de générateurs.*

(3) *Montrer que, pour $\mathbb{Z}^k$, $k \geq 1$, on a $cn^k \leq v_S(n) \leq Cn^k$ pour des constantes $c, C > 0$ qui dépendent éventuellement de k.*

(4) *Calculer $v_S(n)$ pour le groupe libre $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$, muni du système standard.*

On définit *l'entropie volumique* de (G, S) par la formule

$$v_S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}\, B_S(e, n) \,.$$

C'est un exercice de montrer que cette limite existe.

On dit que G est *à croissance polynomiale* si $Card\, B_S(e, n) \leq Cn^k$, pour un degré k indépendant de n, *à croissance exponentielle* si $v_S > 0$, et *à croissance intermédiaire* si $v_S = 0$, mais non polynomiale. Un fameux théorème de M. Gromov afffirme qu'un groupe G est à croissance polynomiale si et seulement si G contient un sous-groupe d'indice fini nilpotent [Gro]. L'existence de groupes à croissance intermédiaire est due à R. Grigorchuk [Gri].

1.2.3. *Groupes de présentation finie.* Soit G un groupe. Si $A \subset G$, alors $< A >$ désigne le sous-groupe de G engendré par A, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent A. Par $\ll A \gg$, on entend la *clôture normale* de A, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-groupes normaux qui contiennent A. On peut décrire $\ll A \gg$ comme le sous-groupe de G engendré par

$$\{gag^{-1},\ a \in A, g \in G\}.$$

Si S est un ensemble et $\mathcal{R} \subset \mathbb{F}(S)$, alors on écrit $< S|\mathcal{R} >= \mathbb{F}(S)/ \ll \mathcal{R} \gg$. Une *présentation* d'un groupe G est la donnée d'un groupe libre $\mathbb{F}(S)$, d'un morphisme surjectif $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$ et d'un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbb{F}(S)$ tel que $\ker \pi = \ll \mathcal{R} \gg$ ou, autrement dit, G est isomorphe à $< S|\mathcal{R} >$. On dit qu'un groupe G est *de présentation finie* si on peut choisir S et $\mathcal{R}$ finis : il existe $n \geq 1$ et $\mathcal{R} \subset \mathbb{F}_n$ fini tels que G soit isomorphe à $< x_1, \ldots, x_n|\mathcal{R} >$. On appelle les éléments de $\mathcal{R}$ des *relateurs*.

Questions de M. Dehn. — M. Dehn pose les trois questions suivantes [Deh].

— *Problème du mot.* Soient $G =< S|\mathcal{R} >$, une présentation finie du groupe et $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$. Etant donné un mot $m \in \mathbb{F}(S)$, déterminer si $\pi(m) = e$.

— *Problème de conjugaison.* Soient $G =< S|\mathcal{R} >$, une présentation du groupe et $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$. Etant donnés deux mots $m_1, m_2 \in \mathbb{F}(S)$, déterminer s'il existe $g \in G$ tel que $g\pi(m_1) = \pi(m_2)g$.

— *Problème d'isomorphisme.* Soient $< S|\mathcal{R} >$ et $< S'|\mathcal{R}' >$, deux présentations de groupes ; déterminer s'ils sont isomorphes.

EXERCICE 1.8. — *Montrer que $\mathbb{Z}^n$ est isomorphe à $< a_1, \ldots, a_n|[a_i, a_j],\ 1 \leq i, j \leq n >$. Montrer que $< x, y|x^n, y^2, yxyx >$ est isomorphe au groupe diédral.*

1.3. Actions géométriques, quasi-isométries

Soit (X, d) un espace métrique propre. On suppose maintenant que G opère par homéomorphismes sur X, autrement dit, on a un morphisme $\rho : G \to \text{Homéo}(X)$.

DÉFINITION 1.9 (Action géométrique). — *Un groupe G* opère géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie : pour tous $x, y \in X$ et tout $g \in G$,*

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y)\,;$$

(2) *l'action est proprement discontinue : pour tous compacts K et L de X,*

$$\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini ;

(3) *l'action est cocompacte : il existe un compact K tel que $X = \cup_{g \in G} g(K)$.*

Le lemme suivant généralise la proposition 1.6. Il illustre notamment le fait que l'existence d'une « bonne » action permet d'obtenir une propriété algébrique du groupe — ici le fait d'être de type fini.

Lemme 1.10 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors G est de type fini. De plus, si S est un système de générateurs fini et $x \in X$, alors l'application $f : g \in G \mapsto g(x)$ vérifie les propriétés suivantes. Il existe deux constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ telles que

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g, g') - c \leq d_X(g(x), g'(x)) \leq \lambda d_S(g, g') + c.$$

et $X \subset \cup_{g \in G} B_X(g(x), c)$.

Ce lemme montre qu'un groupe qui opère géométriquement sur un espace géodésique X « ressemble », à grande échelle, à X. Cette observation est une clef de la théorie et motive la définition suivante introduite sous cette forme par G. Margulis [Mar].

Définition 1.11 (Quasi-isométrie). — *Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un* plongement (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c. \tag{1}$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi (1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$ et, pour tout $y \in Y$, $d_Y(f(g(y)), y) \leq c$.*

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini. Un des principaux objectifs de la théorie géométrique des groupes est d'établir des propriétés des groupes qui sont invariantes par quasi-isométries. On dit alors qu'elles sont *géométriques*.

Par exemple, un de nos objectifs sera d'établir le résultat suivant :

Théorème 1.12. — *Un groupe de type fini quasi-isométrique à un groupe libre contient un sous-groupe libre d'indice fini.*

Nous verrons aussi ultérieurement qu'être de présentation finie est une propriété invariante par quasi-isométries, ainsi que des moyens de déterminer si un groupe est de présentation finie dans la même veine que le lemme 1.10 qui montre qu'un groupe est de type fini.

Démonstration. (lemme 1.10) Soit $K \subset X$ un compact tel que $G(K) = X$, et prenons $w \in X$ et $D > 0$ pour que $K \subset B(w, D/3)$. On note

$$S = \{g \in G, \; g(B(w, D)) \cap B(w, D) \neq \emptyset\}.$$

Puisque X est propre et l'action est proprement discontinue, S est fini (et non vide, puisque $e \in S$). Nous allons montrer que S engendre G.

Soit $g \in G$, et considérons un segment $\gamma : [0,1] \to X$ avec $\gamma([0,1]) = [w, g(w)]$. On se donne une subdivision $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[0,1]$ telle que $t_0 = 0$, $t_n = 1$ et $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = D/3$, pour $j < n-1$. Pour chaque $0 < j < n$, il existe $g_j \in G$ tel que $d(\gamma(t_j), g_j(w)) \leq D/3$; on pose $g_0 = \mathrm{Id}$ et $g_n = g$. Du coup,

$$d(g_j(w), g_{j+1}(w)) \leq d(\gamma(t_j), g_j(w)) + d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) + d(\gamma(t_{j+1}), g_{j+1}(w)) < D\,.$$

Par conséquent $d((g_j^{-1} \circ g_{j+1})(w), w) < D$ et $(g_j^{-1} \circ g_{j+1}) \in S$. En particulier,

$$g = g_0 \circ (g_0^{-1} \circ g_1) \dots (g_{n-1}^{-1} \circ g_n)$$

donc G est engendré par S. De plus, $|g|_S \leq n$ et

$$\begin{aligned} d(w, g(w)) &= \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\ &\geq \sum_{j=0}^{n-2} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\ &\geq \frac{D}{3}(n-1) \\ &\geq \frac{D}{3}|g|_S - \frac{D}{3}. \end{aligned}$$

Si on note $M = \max\{d(g(w), w),\ g \in S\}$, alors, pour tout $g \in G$, on a

$$d(g(w), w) \leq |g|_S \cdot M$$

donc

$$g \mapsto g(w)$$

est une quasi-isométrie de $(G, |\cdot|_S)$ sur $G(w)$. Par définition de D, on a $X \subset G(B(w, D))$, donc on a bien une quasi-isométrie sur X. ∎

Exercice 1.13. — *On suppose que G opère sur un espace connexe X, et qu'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $G(U) = X$. Montrer que*

$$S = \{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

engendre G.

On donne quelques exercices sur les quasi-isométries qui devraient permettre de se familiariser avec la notion.

Exercice 1.14. — *Montrer que la relation « être quasi-isométrique » définit une relation d'équivalence sur les espaces métriques.*

Exercice 1.15. — *Montrer que $f : X \to Y$ est une quasi-isométrie si et seulement si f est un plongement quasi-isométrique et si $f(X)$ est coborné, c.à.d. s'il existe une constante $c > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq c$.*

EXERCICE 1.16. — *Montrer que* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{R}$ *sont quasi-isométriques.*

EXERCICE 1.17. — *Montrer que pour que deux espaces métriques* X *et* Y *soient quasi-isométriques, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles* $X' \subset X$ *et* $Y' \subset Y$ *cobornés et une quasi-isométrie entre* X' *et* Y'.

EXERCICE 1.18. — *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques. Une correspondance quasi-isométrique est donnée par deux constantes* $\lambda \geq 1$ *et* $c > 0$ *et une relation binaire* $\mathcal{R} \subset X \times Y$ *telles que*

(1) *Pour tout* $x \in X$*, il existe* $y \in Y$ *tel que* $x\mathcal{R}y$ *; pour tout* $y \in Y$*, il existe* $x \in X$ *tel que* $x\mathcal{R}y$ *;*

(2) *Si* $x\mathcal{R}y$ *et* $x'\mathcal{R}y'$*, alors*

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x,x') - c \leq d_Y(y,y') \leq \lambda d_X(x,x') + c.$$

Montrer que X *et* Y *sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe une correspondance quasi-isométrique entre* X *et* Y.

EXERCICE 1.19. — *Le but de cet exercice est de montrer que, quelle que soit* $\varepsilon > 0$*, un espace de longueur* X *est* $(1+\varepsilon, 2)$*-quasi-isométrique à un graphe* G *dont chaque arête est isométrique au segment* $[0,1]$*. Soit* $\delta > 0$.

(1) *Montrer qu'il existe une famille maximale de boules* $\mathcal{B}_\delta$ *de rayon* δ *deux à deux disjointes dans* X*. Montrer que si* $x \in X$*, il existe* $B = B(c,\delta) \in \mathcal{B}_\delta$ *telle que* $d(x,c) < 2\delta$.

(2) *On définit le graphe* $\Gamma = (S, A)$*, où* $S = \mathcal{B}_\delta$ *et* $(B, B') \in A$*,* $B = B(c,\delta)$*,* $B' = B(c',\delta)$*, si* $d(c,c') \leq 1$*. Montrer que l'application* $B = B(c,\delta) \in \Gamma \mapsto c \in X$ *définit une* $(1+\varepsilon, 2)$*-quasi-isométrie, où* $\varepsilon = O(\delta)$.

EXERCICE 1.20. — *Soient* G *un groupe de type fini et* H *un sous-groupe d'indice fini. Montrer que* H *est quasi-isométrique à* G *et que* H *est aussi de type fini. On pourra faire opérer* H *sur un graphe de Cayley localement fini de* G.

EXERCICE 1.21. — *Montrer que si* N *est un sous-groupe fini et distingué de* G*, alors* G *et* G/N *sont quasi-isométriques.*

EXERCICE 1.22. — *Soit* T_n *l'arbre régulier infini, où chaque sommet est l'extrémité de* n *arêtes,* $n \geq 3$*. On munit* T_n *de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique à* $[0,1]$.

(1) *On colorie les arêtes de* T_3 *de trois couleurs* a*,* b *et* c *de sorte que chaque sommet est l'extrémité d'une arête de chaque couleur, et on considère la relation d'équivalence* $x \sim x'$ *si* $\{x, x'\}$ *est inclus dans la fermeture d'une arête de couleur* a.

   (a) *Montrer que* $T_3/\sim$ *est isomorphe à* T_4.

(b) *En déduire que T_3 et T_4 sont quasi-isométriques.*

(2) *Montrer que T_m et T_n sont quasi-isométriques si $m, n \geq 3$.*

(3) *En déduire que $\mathbb{F}_m$ et $\mathbb{F}_n$ sont quasi-isométriques si $m, n \geq 2$.*

1.4. **Bouts d'un groupe**

Soit X un espace topologique localement compact connexe et localement connexe, muni d'une *exhaustion par des compacts*, c'est-à-dire d'une famille croissante de compacts $(K_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, telle que $X = \cup_{i \in I} int(K_i)$. Si X est un espace métrique propre, alors on peut considérer $\overline{B(x,r)}$, $r > 0$ comme exhaustion.

Pour chaque compact $K \subset X$, on note $\pi'_0(K)$ l'ensemble des composantes connexes non relativement compactes de $X \setminus K$. Un *bout* B de X est la donnée, pour chaque compact K d'un élément $W_K \in \pi'_0(K)$ tel que, pour tous $U, V \in B$, il existe $W \in B$ vérifiant $W \subset U \cap V$.

Commençons par un lemme, justifiant l'existence de bouts pour des espaces non compacts.

LEMME 1.23. — Si $K \subset L$ sont deux compacts non vides, tout $U \in \pi'_0(K)$ contient un nombre fini et non nul d'éléments de $\pi'_0(L)$.

DÉMONSTRATION. Soit $U \in \pi'_0(K)$. Prenons une composante V non vide de $X \setminus L$ dans U. Comme X est localement connexe, V est ouvert, mais aussi fermé dans $X \setminus L$, donc $\partial V \cap L \neq \emptyset$ car X est connexe. Prenons un voisinage ouvert relativement compact W de L. Alors $U \cap \partial W$ est compact car $\partial W \cap L = \emptyset$. Les composantes connexes de $X \setminus L$ recouvrent ∂W et sont deux à deux disjointes. Par conséquent, seul un nombre fini intersecte ∂W. Si toutes ces composantes étaient relativement compactes, alors U serait aussi relativement compacte comme réunion finie d'ensembles relativement compacts. ∎

PROPOSITION 1.24. — *Soit X un espace topologique localement compact connexe et localement connexe, muni d'une exhaustion par des compacts.*

(1) *Un bout est déterminé par une collection décroissante $(W_i) \in \prod_{i \in I} \pi'_0(K_i)$.*

(2) *Le nombre de bouts est $e(X) = \sup\{\mathrm{Card}\, \pi'_0(K)\} = \lim \mathrm{Card}\, \pi'_0(K_i)$.*

DÉMONSTRATION. (proposition)

(1) Si $K_i \subset K_j$ alors chaque élément $W \in \pi'_0(K_j)$ est contenu dans un élément $W' \in \pi'_0(K_i)$. Du coup, les éléments d'un bout provenant des K_i, $i \in I$, forment une suite décroissante.

    Réciproquement, soit $(W_i) \subset \prod \pi'_0(K_i)$ une suite décroissante. Si K est un compact, il existe $i \in I$ tel que $K \subset K_i$. Du coup, W_i est contenu dans une composante connexe W_K de $X \setminus K$. L'ensemble B de ces composantes forment un bout. En effet, si on se donne W, W' dasn B associés à des compacts K et K', on peut trouver $i \in I$ tel que $(K \cup K') \subset K_i$, impliquant ainsi $W_i \subset (W \cap W')$.

Du coup, une suite décroissante $(W_i) \subset \prod \pi_0'(K_i)$ est contenue dans au moins un bout. Supposons qu'une telle suite soit dans deux bouts B et B'. Pour tout compact L, il existe $V, V' \in \pi_0'(L)$ avec $V \in B$ et $V' \in B'$. Or, pour i assez grand, on a $L \subset K_i$, donc $W_i \subset V \cap V'$, ce qui implique $V = V'$ et *a fortiori*, $B = B'$.

(2) La famille $\mathrm{Card}\, \pi_0'(K_i)$ est croissante et $e(X) \geq \lim \mathrm{Card}\, \pi_0'(K_i)$. Comme chaque bout est représenté par une suite décroissante $(W_i) \in \prod_{i \in I} \pi_0'(K_i)$, on obtient l'égalité : $e(X) = \lim \mathrm{Card}\, \pi_0'(K_i)$. L'énoncé s'en déduit puisque chaque compact est inclus dans un compact de l'exhaustion.

■

REMARQUE 1.25. — L'espace des bouts d'un espace peut être défini à l'aide de limites projectives, permettant ainsi de le munir d'une topologie qui en fait un espace totalement discontinu.

EXERCICE 1.26. — *Soit X un espace métrique propre et soit $x \in X$. Montrer qu'une suite décroissante d'ouverts connexes non bornés $(V_n)_{n \geq 0}$ telle que $(d(x, V_n))_{n \geq 0}$ est non bornée définit un bout de X.*

PROPOSITION 1.27. — *Le nombre de bouts d'un espace est invariant par quasi-isométries : si X, Y sont deux espaces géodésiques, propres, qui sont quasi-isométriques, alors X et Y ont le même nombre de bouts.*

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi : X \to Y$ une (λ, c)-quasi-isométrie. Si (U_n) définit un bout de X, alors le $2c$-voisinage V_n de $\varphi(U_n)$ est connexe et non bornée car Y est géodésique : la suite (V_n) définit donc un bout de Y. Soit ψ un quasi-inverse de φ. Le $2c$-voisinage W_n de $\psi(V_n)$ définit aussi un bout de X et il contient donc U_n puisque $\psi \circ \varphi$ est à distance c de l'identité. Par conséquent, $(W_n)_n$ définit le même bout que (U_n), et on en déduit que Y a au moins autant de bouts que X. Par symétrie, on obtient l'égalité. ■

Par conséquent, le nombre de bouts d'un graphe de Cayley localement fini d'un groupe est une propriété du groupe. En particulier on a

THÉORÈME 1.28. — *Soit G un groupe de type fini. Alors G a 0, 1, 2, ou une infinité de bouts. En particulier, un groupe a*

- 0 *bout si et seulement s'il est fini.*
- 2 *bouts si et seulement s'il contient un sous-groupe cyclique d'indice fini.*

Un des objectifs sera d'analyser les groupes qui ont une infinité de bouts et de voir comment on peut se ramener à des groupes à un bout. Notons que $\mathbb{Z}$ a bien deux bouts et que le groupe libre $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$, en a une infinité puisque l'un de ses graphes de Cayley est un arbre.

Démonstration. Soit X un graphe de Cayley associé à S. On suppose que l'on a un nombre fini $n \geq 2$ de bouts. Du coup, il existe un compact K connexe tel que $X \setminus K = \cup_{1 \leq j \leq n} B_j$, avec chaque B_j connexe et non borné. Comme $K \cap G$ est fini et G est infini, il existe $g \in G$ tel que $g(K) \cap K = \emptyset$. Du coup, on peut supposer que $g(K) \subset B_1$. Par ailleurs, $X \setminus (K \cup g(K))$ a au moins n composantes non bornées, comprenant entre autres $B_2, \ldots B_n$ et aussi au moins une dans B_1 d'après la proposition 1.24. Or le nombre de bouts est n, donc $B_1 \setminus g(K)$ n'a qu'un seul bout. De plus, $K \cup (\cup_{2 \leq i \leq n} B_i)$ est connexe dans le complémentaire de $g(K)$, donc il ne définit qu'un seul bout. Ceci montre que X a exactement deux bouts.

Montrons dans ce cas que G contient un groupe cyclique d'indice fini. On remarque que G opère sur les bouts de X, donc le sous-groupe de G qui les stabilisent est d'indice 2 dans G. Comme G est infini, on peut trouver $g \in G$ tel que $g(K) \subset B_1$ et $g(B_1) \subset B_1$. On a donc $g^n(B_1) \subsetneq B_1$ pour tout $n \geq 1$. Ceci montre que g engendre un groupe cyclique infini. Il reste à montrer que ce sous-groupe est d'indice fini dans G.

Il suffit de montrer que l'action de ce sous-groupe est cocompact sur X. Notons $L = g(B_2) \cap (B_1 \cup K)$. Cet ensemble contient K, et au total, un nombre fini d'éléments de G car B_1 et $g(B_2)$ définissent des bouts différents. Montrons donc que $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(L)$.

Pour cela, nous allons montrer que $\cap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(B_1) = \emptyset$. Supposons au contraire que cette intersection contient $b \in G$. Sans perte de généralité, on peut supposer que K contient l'élément neutre de G. Comme $e \in K$, on a $g^n \in B_1$ pour tout $n > 0$, donc $g^{-n} \notin B_1$ car sinon on aurait $e \in B_1$. Cependant, on a aussi $g^{-n} b \in B_1$, ce qui signifie que g^{-n} est un point hors de B_1 à distance au plus $|b|_S$ de B_1. Comme K sépare B_1 de B_2, on en déduit que g^{-n} est à distance au plus $|b|_S$ de K. Cette boule étant de rayon fini, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de g^{-n}, ce qui contredit l'existence de b.

De même, on a $\cap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(B_2) = \emptyset$. Du coup, si $x \in X$, alors il existe n tel que $g^n(x) \in L$. En effet, si $x \in B_2$, on regarde le premier $n > 0$ tel que $g^n(x) \notin B_2$: il est dans L. Si $x \in B_1$, on regarde le dernier indice $n < 0$ tel que $g^n(x) \in B_1$. ■

RÉFÉRENCES

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Deh] Max Dehn. *Papers on group theory and topology*. Springer-Verlag, New York, 1987. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell, With an appendix by Otto Schreier.

[Gri] Rostislav Grigorchuk. On the Milnor problem of group growth. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **271**(1983), 30–33.

[Gro] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **53**(1981), 53–73.

[Kle] Felix Klein. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **8**(1891), 87–102 et 173–199.

[Mar] Gregory A. Margulis. The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group. *Soviet Math. Dokl.* **11**(1970), 722–723.

[SW] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.