6. HYPERBOLISATION VIA DES ANNEAUX

Dans ce chapitre, on s'intéresse à savoir si un groupe de convergence opère proprement et isométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique Z de sorte que ses actions sur X et ∂Z sont conjuguées.

Le meilleur résultat connu à ce stade est le cas géométriquement fini :

Théorème 6.1 (Yaman, Gerasimov). — *Soit G un groupe de convergence de type fini opérant sur un compact X. Si l'action est géométriquement finie ou si l'action diagonale de G sur $\Theta^2(\Lambda_G)$ est cocompacte, alors G opère sur un espace géodésique propre hyperbolique Z de sorte que ses actions sur $\Lambda_G \subset X$ et ∂Z sont conjuguées.*

A. Yaman a traité le cas géométriquement fini [Yam] et V. Gerasimov le second cas, sans hypothèse de génération finie [Ger]. Ces résultats font suite au travail précurseur de B. Bowditch [Bow] :

Théorème 6.2 (Bowditch). — *Si G est un groupe de convergence discret et uniforme, c'est-à-dire si son action diagonale sur $\Theta^3(X)$ est cocompacte, alors G est hyperbolique et son bord est homéomorphe à X.*

Ce chapitre est consacré à la démonstration de ce théorème. Sa démonstration permet aussi de montrer qu'un groupe de convergence discret est acylindriquement hyperbolique, en suivant B. Sun [Sun], voir la proposition 6.27 et le paragraphe § 5.5.

6.1. Motivations pour l'argument

Prenons un groupe G d'isométries d'un espace hyperbolique géodésique et propre Z et munissons son bord d'une distance visuelle d_v de paramètre $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 6.3 ci-dessous, son action est uniformément quasimöbius. Pour comprendre son intérêt, plaçons-nous sur la sphère de Riemann et considérons un anneau $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire un ouvert homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times]0, 1[$. Le théorème d'uniformisation des anneaux implique qu'il existe une transformation conforme sur un unique anneau parmi

$$\{1 \le |z| \le R\},\ R > 1, \quad \{|z| > 1\} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}^* .$$

Dans le premier cas, on définit le module de A par $\operatorname{mod} A \stackrel{\text{def.}}{=} (1/2\pi) \log R$ et par l'infini sinon. Nous avons deux propriétés complémentaires qui rendent cette notion utile. D'une part, le module est un invariant conforme —quasi-invariant par homéomorphismes quasimöbius— et d'autre part on obtient un contrôle sur la taille des composantes A_- et A_+ de son complémentaire $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$. En effet, il existe des fonctions croissantes telles que

$$\phi(\Delta(A_-, A_+)) \le \operatorname{mod} A \le \psi(\Delta(A_-, A_+)) \quad \text{où} \quad \Delta(E, F) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\operatorname{dist}(E, F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}} .$$

Du coup, si $x, y \in A_-$ et $z, w \in A_+$, alors on obtient un contrôle du birapport $[x : y : z : w]$ en fonction de $\Delta(A_-, A_+)$.

L'idée de B. Bowditch est de définir des notions d'anneau et de module pour construire une notion d'homéomorphisme quasimöbius combinatoire, vérifiée par le groupe G, à partir de birapports. Ceux-ci sont ensuite utilisés pour définir une structure hyperbolique grossière sur $\Theta^3(X)$, invariante par l'action de G, d'où l'on déduira l'hyperbolicité de G.

6.2. **Actions quasimöbius**

On montre que les groupes d'isométries d'espaces hyperboliques nous conduisent à des actions uniformément quasimöbius, puis on donne quelques propriétés de telles applications. En particulier, on fournit une interprétation du birapport plus intuitive que sa définition.

6.2.1. *Extension à l'infini des quasi-isométries d'espaces hyperboliques.* Le point central est le suivant.

Théorème 6.3. — *Une (λ, c)-quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$ entre espaces hyperboliques se prolonge continûment en un homéomorphisme $\phi : \partial X \to \partial Y$ et, si d_X et d_Y sont des métriques visuelles de paramètre $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$, alors il existe $C = C(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) > 0$ et $\alpha = \alpha(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) \geq 1$ telle que ϕ est η-quasimöbius, avec $\eta(t) = C \cdot \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$.*

Si Φ est une isométrie et si $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$, alors on peut choisir $\alpha = 1$.

Soit Z un espace hyperbolique géodésique et propre. À un triplet $\{a, b, c\} \in \Theta(\partial Z)$, on associe un triangle idéal de sommets $\{a, b, c\}$. L'hyperbolicité de Z nous permet de considérer un centre du triangle, c'est-à-dire un point x dont la distance aux trois côtés est minimale (la finesse des triangles indique que cette distance est majorée par 4δ). Cela définit une application $p : \Theta(\partial Z) \to Z$. Notons d_v une distance visuelle de paramètre $\varepsilon > 0$.

Proposition 6.4. — *Si $(\xi, \xi', \zeta, \zeta')$ sont quatre points distincts de ∂Z, on a*

$$\frac{1}{\varepsilon}|\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta]| = d(p(\xi, \zeta, \xi'), p(\zeta, \xi, \zeta')) + O(1)$$

où

$$[\xi, \xi', \zeta', \zeta] = \frac{d_v(\xi, \xi') d_v(\zeta', \zeta)}{d_v(\xi, \zeta') d_v(\xi', \zeta)}\,.$$

Démonstration. On contrôle les distances visuelles à l'aide des produits scalaires de Gromov. En approchant les points à l'infini par des points dans Z et en considérant δ et ε fixés, on obtient

$$\begin{aligned}(1/\varepsilon)\log[\xi, \xi', \zeta', \zeta] &= -[(\xi|\xi')_w + (\zeta|\zeta')_w] + [(\xi|\zeta')_w + (\xi'|\zeta)_w] + O(1) \\ &= (1/2)[|\xi - \xi'| + |\zeta - \zeta'|] - (1/2)[|\xi - \zeta'| + |\xi' - \zeta|] + O(1).\end{aligned}$$

On approche maintenant cette configuration par quatre points dans un arbre. On a essentiellement trois cas à étudier. Dans chacun d'eux, on vérifie

$$(1/2)[|\bar\xi - \bar\xi'| + |\bar\zeta - \bar\zeta'|] - (1/2)[|\bar\xi - \bar\zeta'| + |\bar\xi' - \bar\zeta|] = \pm d(p(\bar\xi, \bar\zeta, \bar\xi'), p(\bar\zeta, \bar\xi, \bar\zeta'))\,.$$

■

EXERCICE 6.5. — *Montrer qu'il existe une constante C telle que*

$$d((\xi,\xi'),(\zeta,\zeta')) - C \leq \max\{0, \log 1/[\xi,\xi',\zeta',\zeta]\} \leq d((\xi,\xi'),(\zeta,\zeta')) + C\,.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.3. Tout d'abord, le lemme de Morse nous définit une extension bijective ϕ de Φ comme suit : si r est un rayon géodésique, alors $\Phi(r)$ est un quasirayon, qui est à distance bornée d'un véritable rayon r'. La classe de r' ne dépend que de la classe de r, et on obtient ainsi $\phi : \partial X \to \partial Y$.

SCHOLIE 6.6. — *Il existe une constante C telle que, si $\xi,\xi',\zeta \in \partial X$ alors*

$$d_Y(p(\phi(\xi),\phi(\xi'),\phi(\zeta)), \Phi(p(\xi,\xi',\zeta))) \leq C\,.$$

DÉMONSTRATION DE LA SCHOLIE. Le point $p \stackrel{\text{def.}}{=} p(\xi,\xi',\zeta)$ est à distance au plus 4δ des géodésiques (ξ,ξ'), (ξ,ζ) et (ξ',ζ). Par conséquent, $\Phi(p)$ est à distance au plus $4\lambda\delta+c+H$ des géodésiques $(\phi(\xi),\phi(\xi'))$, $(\phi(\xi),\phi(\zeta))$ et $(\phi(\xi'),\phi(\zeta))$, où H est la constante du lemme de poursuite. Du coup, si $q = p(\phi(\xi),\phi(\xi'),\phi(\zeta))$ est le point le plus proche des géodésiques $(\phi(\xi),\phi(\xi'))$, $(\phi(\xi),\phi(\zeta))$ et $(\phi(\xi'),\phi(\zeta))$, il ne peut être trop loin de $\Phi(p(\xi,\xi',\zeta))$. ■

On reprend la démonstration du théorème 6.3. Soient a,b,c,d quatre points distincts de ∂X ; on note $p = p(a,d,b)$, $q = p(a,d,c)$, $p_\phi = p(\phi(a),\phi(d),\phi(b))$ et $q_\phi = p(\phi(a),\phi(d),\phi(c))$.

$$\begin{aligned}
|\log[\phi(a):\phi(b):\phi(c):\phi(d)]| &= d(p_\phi,q_\phi) + O(1)\\
&\leq d(p_\phi,\Phi(p)) + d(\Phi(p),\Phi(q)) + d(\Phi(q),q_\phi) + O(1)\\
&\leq d(\Phi(p),\Phi(q)) + 2C + O(1)\\
&\leq \lambda d(p,q) + 2C + c + O(1)\\
&\leq \lambda|\log[a:b:c:d]| + +O(1)\,.
\end{aligned}$$

En travaillant un peu, on peut enlever les valeurs absolues. ■

Par conséquent, les métriques visuelles de deux espaces hyperboliques géodésiques propres quasi-isométriques sont quasimöbius équivalentes.

En particulier, d'après le lemme de Švarc-Milnor, si G opère géométriquement sur deux espaces métriques hyperboliques géodésiques et propres X et Y, alors il existe une quasi-isométrie qui se prolonge en transformation quasimöbius entre les bords.

Disons qu'un espace hyperbolique Z est *quasi-enveloppé* s'il existe une constante D telle que tout point de Z est à distance au plus D de $p_Z(\Theta^3 Z)$. Cette condition est équivalente à Z d'être quasi-étoilé (il existe $w \in Z$ tel que tout x est à distance au plus D' d'un rayon géodésique issu de w). Elle est vérifiée dès que Z admet une action géométrique.

On a alors

THÉORÈME 6.7 (F. Paulin). — *Soient X,Y des espaces hyperboliques D-enveloppés. Toute transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \to \partial Y$ se prolonge en une quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$.*

Pour des énoncés plus précis, on peut consulter [BS].

ESQUISSE DÉMONSTRATION. On suit l'argument de F. Paulin [Pau] qui utilise la construction de J. Cheeger : tout point x de X est approximativement l'image d'un triplet $\{a,b,c\}$ de $\Theta^3(X)$. On associe à x le point $\Phi(x) = p_Y(\{\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c)\})$. On vérifie que $\Phi(x)$ ne dépend essentiellement pas du triplet choisi, puis que Φ est une quasi-isométrie en utilisant que les birapports sont contrôlés. ∎

6.2.2. *Propriétés d'homéomorphismes quasimöbius.* Une application $f : X \to X'$ est η-quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a,b,c,d \in X$ deux à deux disjoints, on a

$$\frac{|f(a)-f(b)|}{|f(a)-f(c)|}\cdot\frac{|f(c)-f(d)|}{|f(b)-f(d)|} \leq \eta\left(\frac{|a-b|}{|a-c|}\cdot\frac{|c-d|}{|b-d|}\right).$$

LEMME 6.8. — Soit X un espace métrique. Si x_1,x_2,x_3,x_4 sont quatre points distincts de X, on définit

$$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle = \frac{\min\{|x_1-x_2|,|x_3-x_4|\}}{\min\{|x_1-x_3|,|x_2-x_4|\}}.$$

Alors

$$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle \leq \eta_0([x_1,x_2,x_3,x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1,x_2,x_3,x_4] \leq \eta_1(\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle)$$

où

$$\eta_0(t) = t+\sqrt{t^2+t} \quad \text{et} \quad \eta_1(t) = t(2+t).$$

DÉMONSTRATION. On suppose que $|x_1-x_2| \leq |x_3-x_4|$; il vient

$$\begin{cases} |x_1-x_3| \leq |x_1-x_2|+|x_2-x_4|+|x_4-x_3| \leq 2|x_4-x_3|+|x_2-x_4|\,; \\ \\ |x_2-x_4| \leq |x_2-x_1|+|x_1-x_3|+|x_3-x_4| \leq 2|x_4-x_3|+|x_1-x_3|\,. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \max\{|x_1-x_3|,|x_2-x_4|\} &\leq 2|x_4-x_3| + \min\{|x_1-x_3|,|x_2-x_4|\} \\ &\leq \left(2+\frac{\min\{|x_1-x_3|,|x_2-x_4|\}}{|x_3-x_4|}\right)|x_3-x_4| \\ &\leq \left(2+\frac{1}{\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle}\right)|x_3-x_4|\,. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} [x_1,x_2,x_3,x_4] &\geq \left(2+\frac{1}{\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle}\right)^{-1}\frac{|x_1-x_2|}{\min\{|x_1-x_3|,|x_2-x_4|\}} \\ &\geq \langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle\left(2+\frac{1}{\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

En inversant la fonction de $\langle x_j \rangle$, on obtient

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \le \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4])\,.$$

On note que

$$\eta_0(t) \le 3\max\{t, \sqrt{t}\}\,.$$

En permutant les points, on a

$$[x_1, x_3, x_2, x_4] \ge \langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle \left(2 + \frac{1}{\langle x_1, x_3, x_2, x_4 \rangle}\right)^{-1}$$

et en passant à l'inverse, on trouve

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \le \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)\,.$$

■

Ce lemme signifie que l'on peut remplacer le birapport par cette nouvelle notion quantitativement, *a priori* plus intuitive.

Si E, F sont deux compacts disjoints de X, on définit leur *distance relative* par

$$\Delta(E, F) = \frac{\mathrm{dist}(E, F)}{\min\{\mathrm{diam}\, E, \mathrm{diam}\, F\}}\,.$$

Corollaire 6.9. — *Pour toute fonction de distorsion η, il existe un homéomorphisme croissant $\widehat{\eta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous compacts E, F disjoints, tout homéomorphisme η-quasimöbius $h : X \to X$, on a*

$$\Delta(h(E), h(F)) \le \widehat{\eta}(\Delta(E, F))\,.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E \times F$ tels que $|x - y| = \mathrm{dist}(E, F)$. On considère $z \in E$ et $w \in F$ tels que $|x - z| \ge \mathrm{diam}\, E/2$, et $|y - w| \ge \mathrm{diam}\, F/2$. On a

$$\frac{\mathrm{dist}(hE, hF)}{\min\{\mathrm{diam}\, hE, \mathrm{diam}\, hF\}} \le \langle hx, hy, hz, hw \rangle \le \widehat{\eta}(\langle x, y, z, w \rangle) \le \widehat{\eta}(2\Delta(E, F))$$

où $\widehat{\eta}$ ne dépend que de η et des contrôles donnés par le lemme 6.8. ■

6.3. **Modules à la Bowditch**

On construit maintenant les notions analogues dans un compact métrique en suivant B. Bowditch [Bow].

Notation et définitions.— Soit X un espace compact. Un anneau de X est par définition une paire ordonnée de compacts non vides disjoints $A = (A^-, A^+)$ tels que $X \setminus (A^- \cup A^+) \neq \emptyset$.

Si K est compact, on écrit $K < A$ si K est contenu dans l'intérieur de A^- et $K > A$ si K est contenu dans l'intérieur de A^+. Si A et B sont des anneaux, on écrit $A < B$ si $\overline{X \setminus A^+} < B$, c'est-à-dire si $intA^+ \cup intB^- = X$.

On suppose que G est un groupe de convergence discret opérant sur X. Si $\mathcal{A}$ est une collection G-invariante d'anneaux, on désignera par $\mathcal{A}_T$ une transversale de $\mathcal{A}/G$,

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts de sorte que. dans le graphe d'incidence des fermetures de ses atomes, aucune boule de rayon 5 ne recouvre le graphe. On note $\mathcal{A}_T$ la collection d'anneaux obtenue en formant tous les couples $(\overline{U},\overline{V})$, $U,V\in\mathcal{U}$ de fermetures disjointes. On note $\mathcal{A}=G\mathcal{A}_T$, qui est donc une système d'anneaux invariant et symétrique.

FAIT 6.10. — *Soient G un groupe de convergence discret opérant sur X compact métrique muni d'un système d'anneaux G-invariant $\mathcal{A}$ de transversale finie. Soient (K_n,L_n) une suite de compacts disjoints telle que, pour chaque n, on peut trouver $A_n\in\mathcal{A}$ tel que $K_n<A_n<L_n$. Si $\{A_n\}$ est infini, alors*

$$\lim \min\{\mathrm{diam}\ K_n, \mathrm{diam}\ L_n\}=0\,.$$

DÉMONSTRATION. On procède par l'absurde, quitte à extraire des sous-suites, on se ramène au cas suivant. On suppose qu'il existe $r>0$ tel que ni $\mathrm{diam}\ K_n, \mathrm{diam}\ L_n\geq r$ pour tout n. Comme $\mathcal{A}_T$ est finie et la collection d'anneaux est infinie, on peut trouver $A\in\mathcal{A}_T$ et $g_n\in G$ tel que $A_n=g_n(A)$. Quitte à extraire une sous-suite, la suite (g_n) est un écroulement de base (a,b). Si $a\notin A^-$, alors $g_n|_{A^-}$ tend vers b, donc $K_n\subset g_n(A^-)\subset B(b,r/2)$ pour tout n assez grand. Du coup, $a\in A^-$, mais alors, $g_n|_{A^+}$ tend vers b uniformément donc $g_n(L_n)\subset B(b,r/2)$, ce qui contredit notre hypothèse. ■

DÉFINITION 6.11 (modules au sens de Bowditch). — *Si K et L sont disjoints, on note $\mathrm{mod}(K,L;\mathcal{A})$ la borne supérieure des entiers $n\geq 1$ tels qu'il existe des anneaux $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ de $\mathcal{A}$ tels que $K<A_1<\ldots<A_n<L$.*

LEMME 6.12. — Soient E,F deux compacts disjoints. Si $\mathcal{A}_T$ est finie et $\mathrm{mod}(E,F,\mathcal{A})$ est infini, alors E ou F est un singleton, et ce point est un point conique.

DÉMONSTRATION. Si $\mathrm{mod}(E,F;\mathcal{A})=\infty$, alors, comme $\mathcal{A}_T$ est fini, on peut trouver $A\in\mathcal{A}_T$ tel que $\mathrm{mod}(E,F;GA)=0$. Par définition, pour chaque entier n, il existe n anneaux tels que

$$E<A_1^n<A_2^n<\ldots<A_n^n<F\,.$$

On remarque les hypothèses du fait 6.10 sont vérifiées impliquant que E ou F est un singleton. Pour montrer que ce singleton est un point conique, on considère $g_j^n\in G$ tel que $A_j^n=g_j^n(A)$. L'ensemble $H=\{g_j^n\}_{j,n}$ ne peut être qu'infini, donc H contient un écroulement $(h_n)_n$, de base (a,b) : convergence vers b sur $X\setminus\{a\}$. Or, a ne peut être dans A^- et dans A^+ à la fois, donc on peut supposer qu'il n'est pas dans A^-. Par suite, $(h_n|_{A^-})$ tend uniformément vers b et $h_n(A^-)$ contient E par construction. On en déduit que E est un seul point : b.

On considère maintenant l'écroulement inverse $(h_n^{-1})_n$. Pour tout $x \neq b$, $(h_n(x)^{-1})_n$ tend vers a et $a \notin A^-$. Par conséquent. pour tout n assez grand, $h_n^{-1}(x)$ est dans un voisinage de a disjoint de A^-. Or $b \in h_n(A^-)$, donc $h_n^{-1}(b) \in A^-$, donc ne peut tendre vers a. ■

Réciproquement, on a aussi.

LEMME 6.13. — Si l'action de G est cocompacte sur $\Theta^2(X)$, il existe $\mathcal{A}_T$ fini suffisamment fin avec la propriété suivante. Pour tout compact K strict de X et tout $x \in X \setminus K$ conique, on a $\mathrm{mod}(\{x\}, K) \geq 1$, et ce module est en fait infini.

DÉMONSTRATION. Soit L un domaine fondamental compact de l'action de G sur $\Theta^2(X)$. On choisit $\mathcal{A}_T$ de sorte que, pour toute paire de points $(a, b) \in L$, il existe $A \in \mathcal{A}_0$ tel que $a \in A^-$ et $b \in A^+$. Soit $(g_n)_n$ un écroulement de base (x, y) tel que $(g_n(z))_n$ tend vers y pour tout $z \neq x$ mais $(g_n(x))$ tend vers un point $w \neq y$. Puisque K ne contient pas x, $(g_n|_K)_n$ tend vers y uniformément. Par définition de L, on peut trouver $g_0 \in G$ tel que $g_0(w, y) = (a, b) \in L$. Par construction de $\mathcal{A}_T$, il existe un anneau $A \in \mathcal{A}_T$ tel que $a < A < b$. Du coup, pour n assez grand, $g_0 g_n(x) < A < g_0 g_n(K)$. Du coup, on a aussi $x < (g_0 g_n)^{-1}(A) < K$, et $\mathrm{mod}(\{x\}, K) \geq 1$. Par récurrence, on construit une suite d'anneaux "emboîtés" (A_n) en considérant les paires (x, A_n^+). ■

LEMME 6.14. — Soit G un groupe de convergence opérant sur X. Il existe $m > 0$ tel que, si $\mathrm{mod}(\{x, y\}, \{w, z\}, \mathcal{A}) \geq 1$ alors $\mathrm{mod}(\{x, z\}, \{w, y\}, \mathcal{A}) \leq m$, où $x, y, z, w \in X$ sont arbitraires et distincts.

DÉMONSTRATION. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe $(x_n, y_n, z_n.w_n)$ tel que $\mathrm{mod}(\{x_n, y_n\}, \{w_n, z_n\}, \mathcal{A}) \geq 1$ et $\mathrm{mod}(\{x_n, z_n\}, \{w_n, y_n\}, \mathcal{A}) \geq n$. Comme $\mathcal{A}_T$ est fini, on peut supposer qu'il existe $A \in \mathcal{A}_T$ tel que $\{x_n, y_n\} < A < \{w_n, z_n\}$. De plus, on peut aussi supposer qu'on a convergence de (x_n, y_n, z_n, w_n) vers (x, y, z, w).

En posant $K_n = \{x_n, z_n\}$ et $L_n = \{y_n, w_n\}$, on se ramène aux notations et hypothèses du fait 6.10 qui implique que l'on doit avoir $x = z$ ou $y = w$. Or aucune de ces solutions n'est possible puisque x et z, ainsi que y et w, sont séparés par A. ■

6.4. Hyperbolisation des triplets de points

Soit X un espace compact métrisable. Soit $\mathcal{A}$ une collection symétrique d'anneaux. On s'intéresse aux propriétés suivantes.

(A1) Pour tous compacts disjoints K, L non dégénérés, on a $\mathrm{mod}(K, L) < \infty$.

(A2) Il existe $k \geq 0$ tel que, pour tous $x, y, z, w \in \Theta^4(X)$, si $\mathrm{mod}(\{x, y\}, \{z, w\}) > k$, alors $\mathrm{mod}(\{x, z\}, \{y, w\}), \mathrm{mod}(\{x, w\}, \{z, y\}) \leq k$.

(A3) Pour tous x, y, z distincts, on a $\mathrm{mod}(\{x, y\}, \{z\}) = \infty$.

L'objet de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

Théorème 6.15 (hyperbolisation des triplets). — *Soit X un compact et $\mathcal{A}$ une collection d'anneaux. On note $(xy|wz) = \mathrm{mod}(\{x,y\},\{z,w\})$ et*

$$\rho(\theta,\theta') = \max\{(x_i x_j | x'_k x'_\ell),\ i,j,k,\ell \in \{1,2,3\},\ i \neq j,\ k \neq \ell\}$$

où $(x,y,z,w) \in \Theta^4(X)$, $\theta = (x_j)$ et $\theta' = (x'_k)$ sont dans $\Theta^3(X)$.

(1) Si (A1) et (A2) sont vérifiées, alors $(\Theta^3(X),\rho)$ est un espace quasi-hyperbolique et presque géodésique, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C_m, C_g, \delta \geq 0$ telles que
- *pour tous θ_1, θ_2 et θ_3 de $\Theta^3(X)$, on a*

$$\rho(\theta_1,\theta_3) \leq \rho(\theta_1,\theta_2) + \rho(\theta_2,\theta_3) + C_m\,;$$

- *pour tous $\theta,\theta' \in \Theta^3(X)$, on peut trouver $\theta_0,\dots\theta_n$ tels que $\theta_0 = \theta$, $\theta_n = \theta'$ et $|\rho(\theta_i,\theta_j) - |i-j|| \leq C_g$,*
- *ρ vérifie la propriété d'hyperbolicité des produits scalaires de Gromov avec la constante $\delta > 0$.*

(2) Si (A3) est aussi vérifiée alors il existe un homéomorphisme canonique de X sur $\partial(\Theta^3(X),\rho)$.

Ce théorème se déduit du corollaire 6.21 et de la proposition 6.22. Leurs démonstrations découleront de plusieurs résultats intermédiaires, en particulier de la propriété d'approximation par les arbres suivante.

Proposition 6.16 (approximation par les arbres). — *On suppose (A1) et (A2) vérifiées. Pour tout $F \subset X$ fini, il existe un arbre métrique T et une application $\varphi : F \to \partial T$ tels que, pour tous x,y,z,w, on a*

$$|d([\varphi x,\varphi y],[\varphi z,\varphi w]) - (xy|zw)| \leq C$$

où C ne dépend que de k et du cardinal de F .

Commençons par quelques faits élémentaires.

Fait 6.17. — *On suppose (A1) et (A2) vérifiées. Pour tous compacts disjoints K, L et tout $x \notin K \cup L$, on a*

$$\mathrm{mod}(K,L) - 1 \leq \mathrm{mod}(K, L\cup\{x\}) + \mathrm{mod}(K\cup\{x\}, L) \leq \mathrm{mod}(K,L) + 2k + 2\,.$$

Démonstration. En prenant des anneaux donnant $\mathrm{mod}(K,L)$, on montre facilement

$$\mathrm{mod}(K,L) \leq \mathrm{mod}(K,L\cup\{x\}) + \mathrm{mod}(K\cup\{x\},L) + 1$$

lorsque le point x sépare l'un d'eux.

Pour la réciproque, on écrit $\mathrm{mod}(K,L) = n$, $\mathrm{mod}(K,L\cup\{x\}) = p$ et $\mathrm{mod}(K\cup\{x\},L) = q$. On remarque que $p,q \leq n$, donc, si $\min\{p,q\} \leq k+1$, alors $p+q \leq n+k+1$. On suppose donc $p,q > k+1$. On pose $r = p-(k+1)\,(\geq 1)$ de sorte que $p-r > k$ et $s = 2+k > 1+k$.

On considère des anneaux $A_1,\dots,A_p$ et $B_1,\dots,B_q$ tels que

$$K < A_1 < \dots < A_p < L \cup \{x\} \text{ et } K \cup \{x\} < B_1 < \dots < B_q < L\,.$$

Si A_r et B_s ne sont pas emboîtés alors $X \setminus (intA_r^+ \cup intB_s^-) \neq \emptyset$, donc on peut prendre un point y dans cet ensemble. Comme $y \notin intA_r^+$, on a

$$y < A_{r+1} < \dots < A_p \text{ donc } \mathrm{mod}(K\cup\{y\}, L\cup\{x\}) \geq p - r > k\,.$$

De même, on a $y \in B_{s-1}^+$, donc

$$B_1 < \dots < B_{s-1} < y \text{ donc } \mathrm{mod}(K\cup\{x\}, L\cup\{y\}) \geq s-1 > k\,.$$

En choisissant $z \in K$ et $w \in L$, on trouve $\mathrm{mod}(\{z,x\},\{w,y\}), \mathrm{mod}(\{z,y\},\{w,x\}) > k$, ce qui contredit (A2). Par conséquent, on a

$$K < A_1 < \dots < A_r < B_s < B_{s+1} < \dots < B_q < L\,.$$

On obtient $n \geq r + (q-s+1) \geq p-(k+1)+q+1-(k+2) \geq (p+q)-2k-2\,.$ ■

Lemme 6.18. — On suppose (A1) et (A2) vérifiées. Si F a cinq éléments, alors il existe un arbre métrique T et une application $\varphi : F \to T$ tels que, pour tous x,y,z,w, on a

$$|d([\varphi x, \varphi y],[\varphi z, \varphi w]) - (xy|zw)| \leq C_5$$

où C_5 ne dépend que de k.

Il sera commode d'écrire $(xy|uzw) = (uzw|xy) = \mathrm{mod}(\{x,y\},\{u,z,w\})$.

Démonstration. On écrit $F = \{x_1,x_2,y_1,y_2,u\}$ et on suppose que $(x_1x_2|y_1y_2)$ est maximal parmi tous les birapports de F. On note $p = (x_1x_2|uy_1y_2)$ et $q = (x_1x_2u|y_1y_2)$. D'après le fait 6.17, on a donc

$$(x_1x_2|y_1y_2) - 1 \leq p+q \leq (x_1x_2|y_1y_2) + 2k + 2\,.$$

On distingue plusieurs cas.

Si $p,q \leq k$, alors tous les birapports sont bornés par $2k+1$ et on peut considérer un arbre sous forme d'étoile à cinq branches, avec chaque point de F comme feuille.

Si $p > k$, alors on construit un arbre T de sorte que $d([x_1x_2],[y_1y_2]) = p+q$. On place u de sorte que le centre des tripodes $\{x_j, y_\ell, u\}$ soit à distance p du centre des tripodes $\{x_1,x_2,y_\ell\}$ pour $j,\ell \in \{1,2\}$. On a 15 relations à vérifier, qui se réduisent à 9 avec les symétries. Sous notre condition, on a bien $(x_jy_\ell|x_{3-j}y_{3-\ell}) \leq k$ par (A2), correspondant à des distances nulles entre les géodésiques correspondantes. De plus, on a $k < (x_1x_2|uy_1y_2) \leq (x_1x_2|uy_\ell)$ donc (A2) implique $(x_ju|x_{3-j}y_\ell) \leq k$ pour $j,\ell \in \{1,2\}$ et

$$\begin{aligned} q \leq (x_ju|y_1y_2) &\leq (x_1ux_2|y_1y_2) + (x_ju|x_{3-j}y_1y_2) + 1 \\ &\leq q + (x_ju|x_{3-j}y_\ell) + 1 \\ &\leq q + k + 1\,. \end{aligned}$$

Si on a aussi $q > k$, on obtient par symétrie $p \leq (y_\ell u|x_1x_2) \leq p+k+1$ et $(x_jy_\ell|uy_{3-\ell}) \leq k$.

Le dernier cas à étudier correspond à $q \leq k$. On a donc $p \leq (x_1x_2|y_1y_2) \leq p+k+1$. On a montré ci-dessus $q \leq (x_ju|y_1y_2) \leq q+k+1 \leq 2k+1$. Du coup, par maximalité de $(x_1x_2|y_1y_2)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} (x_1x_2|y_1y_2) \geq (x_1x_2|uy_\ell) & \geq & (x_1x_2y_{3-\ell}|uy_\ell) + (x_1x_2|uy_1y_2) - (2k+2) \\ & \geq & (x_1x_2y_{3-\ell}|uy_\ell) + (x_1x_2|y_1y_2) - (2k+2) \end{array}$$

de sorte que $(x_1x_2y_{3-\ell}|uy_\ell) \leq 2k+2$. On en déduit

$$(x_jy_{3-\ell}|uy_\ell) \leq (x_1x_2y_{3-\ell}|uy_\ell)+(x_jy_{3-\ell}|uy_\ell x_{3-j})+1 \leq 2k+2+(x_jy_{3-\ell}|y_\ell x_{3-j})+1 \leq 3k+3\,.$$

Toutes les configurations sont donc contrôlées. ■

REMARQUE 6.19. — Si $\varphi : F \to T$ vérifie les conclusions de ce lemme alors les birapports des points de F se lisent sur les distances des points de branchement. Si on connaît deux telles distances, alors la troisième est déterminée, donc les birapports correspondant aussi, à une constante additive connue près.

On démontre un dernier lemme avant la proposition 6.16. Il est pratique d'introduire les notations suivantes. On écrit $(xy : zw)$ et $(xy : u : zw)$ pour dire que, dans l'arbre associé, la plus grande distance entre deux points de branchement correspond au birapport $(xy|zw)$.

LEMME 6.20. — On suppose (A1) et (A2) vérifiées. Si F est fini et si $(x_1x_2|y_1y_2)$ est maximal sur F, alors, pour tous $a, b \neq x_1, x_2$, on a $(x_1x_2 : ab)$.

DÉMONSTRATION. Si $(x_1x_2|y_1y_2) \leq k$, alors tous les birapports sont bornés par k. On suppose maintenant $(x_1x_2|y_1y_2) > k$. Prenons un cinquième point a. D'après le lemme 6.18, on a $(x_1x_2 : a : y_1y_2)$, donc $(x_ja|x_{3-j}y_\ell) \leq C_5$. Si b est un sixième point, alors on a aussi $(x_jb|x_{3-j}y_\ell) \leq C_5$ et donc

$$(x_ja|x_{3-j}b) - 1 \leq (x_jy_\ell a|bx_{3-j}) + (x_ja|y_\ell bx_{3-j}) \leq (x_jy_\ell|x_{3-j}b) + (x_ja|y_\ell x_{3-j}) \leq 2C_5\,.$$

Cela signifie que les segments dans l'arbre correspondant, $[ab]$ et $[x_1x_2]$ sont ou bien disjoints ou bien s'intersectent comme les autres. ■

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 6.16. On procède par récurrence sur le cardinal de F. Si F a 4 ou 5 points, cela découle de (A2) et du lemme 6.18. Supposons le lemme vrai jusqu'au cardinal $n \geq 5$. On se donne un ensemble F de $n+1$ points et on considère quatre points $a, b, c, d \in F$ tels $(ab|cd)$ soit maximal dans $\Theta^4(F)$. On construit l'arbre T_a pour $F \setminus \{a\}$ et l'application $\varphi : F \setminus \{a\} \to T_a$ tels que $|d([\bar{x}, \bar{y}], [\bar{z}, \bar{w}]) - (xy|zw)| \leq C_n$, où on écrit $\bar{u} = \varphi(u)$. Soit w le premier point de branchement de T_a issu de b. On a

$$\begin{array}{rcl} d(w, [\bar{c}\bar{d}]) & = & \max\{d([\bar{b}\bar{x}], [\bar{c}\bar{d}]),\ x \in F \setminus \{a, b, c, d\}\} \\ & \leq & \max\{(bx|cd),\ x \in F \setminus \{a, b, c, d\}\} + C_n \leq (ab|cd) + C_n\,. \end{array}$$

En plaçant $v \in [\bar{b}w]$ tel que $d(v,w) = \max\{0, (ab|cd) - d(w, [\bar{c}\bar{d}])\}$, on agrandit l'arbre en posant $T = T_a \cup [\bar{a}, w]$. On vérifie que $|(ab|cd) - d([\bar{a}\bar{b}], [\bar{c}\bar{d}])| \leq C_n$.

On sait déjà que les estimées recherchées sont vérifiées pour tous les quadruplets qui ne font pas intervenir a, ainsi que ceux formés dans $\{a,b,c,d\}$. Prenons maintenant trois points $(x_1,x_2,x_3) \in F \setminus \{a,b,c,d\}$. Les lemmes 6.18 et 6.20 nous disent que leur configuration a la forme $(ab : x_1 : x_2x_3)$, à permutation près des indices. Par conséquent, on a $(ax_i|bx_j) \leq C_5$ où $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$, $i \neq j$. On en déduit aussi $|(ax_i|x_jx_\ell) - (bx_i|x_jx_\ell)| \leq 2C_5$, où $\{i,j,\ell\} = \{1,2,3\}$, impliquant $|(ax_i|x_jx_\ell) - d([\bar{a}\bar{x}_i], [\bar{x}_j\bar{x}_\ell])| \leq 2C_5 + C_n$.

Il ne reste plus que les birapports de la forme $(ab|x_ix_j)$ à contrôler. D'après la remarque 6.19, les birapports de la forme $(ab|xc)$ et $(ab|xd)$, $x \in F \setminus \{a,b,c,d\}$, sont bien contrôlés par les distances dans T, en considérant $\{a,b,c,d,x\}$. Ce sera aussi le cas de $(ab|x_ix_j)$ en considérant $\{a,b,c,x_i,x_j\}$. ■

On montre le point (1) du théorème 6.15.

COROLLAIRE 6.21. — *Soit X un compact et $\mathcal{A}$ une collection symétrique d'anneaux qui vérifie (A1) et (A2). On note*

$$(xy|wz) = \mathrm{mod}(\{x,y\},\{z,w\}) \text{ et } \rho(\theta,\theta') = \max\{(x_ix_j|x'_kx'_\ell),\ i,j,k,\ell \in \{1,2,3\},\ i\neq j,\ k\neq \ell\}$$

où $(x,y,z,w) \in \Theta^4(X)$, $\theta = (x_j)$ et $\theta' = (x'_k)$. L'espace $(\Theta^3(X),\rho)$ est quasi-hyperbolique et presque géodésique, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C_m, C_g, \delta \geq 0$ telles que

- *pour tous θ_1, θ_2 et θ_3 de $\Theta^3(X)$, on a*
$$\rho(\theta_1,\theta_3) \leq \rho(\theta_1,\theta_2) + \rho(\theta_2,\theta_3) + C_m\,;$$
- *pour tous $\theta, \theta' \in \Theta^3(X)$, on peut trouver $\theta_0, \ldots \theta_n$ tels que $\theta_0 = \theta$, $\theta_n = \theta'$ et $|\rho(\theta_i,\theta_j) - |i-j|| \leq C_g$,*
- *ρ vérifie la propriété d'hyperbolicité des produits scalaires de Gromov avec la constante $\delta > 0$.*

DÉMONSTRATION. Prenons $\theta_j = (x_j,y_j,z_j) \in \Theta^3(X)$, $j \in \{1,2,3\}$. Par la proposition 6.16, on construit un arbre dans lequel on peut lire les birapports. Dans cet arbre, l'inégalité triangulaire est vérifiée, et, comme l'approximation est une $(1,C)$-quasi-isométrie, on en déduit que ρ est une quasi-métrique.

Si $\theta = (x,y,z)$, $\theta' = (x',y',z')$ et $\rho(\theta,\theta') = (xy|x'y') = n$, on considère des anneaux $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ tels que
$$\{x,y\} < A_1 < \ldots < A_n < \{x',y'\}\,.$$
Pour chaque $j \in \{1,\ldots,n\}$, on choisit $z_j \in (X \setminus (A_j^- \cup A_j^+))$ et on pose $\theta_j = (x, z_j, x')$. On vérifie que $\rho(\theta,\theta_j) = (xy|x'z_j)$ ou $(xy|y'z_j)$, puis, à l'aide du lemme 6.18 que $|\rho(\theta_0,\theta_j) - j| \leq C_5$. Par approximation par les arbres, on en déduit que $(\Theta^3(X),\rho)$ est C_g-géodésique pour une constante provenant de la proposition 6.16 pour un ensemble à 6 points.

La quasi-hyperbolicité au sens de Gromov découle à nouveau de la proposition 6.16 considérée avec douze points. ■

PROPOSITION 6.22. — *On suppose (A1), (A2) et (A3) vérifiées. Il existe un homéomorphisme* $h : X \to \partial(\Theta^3(X), \rho)$.

Avant d'établir cette proposition, on montre que les conditions (A1) et (A3) permettent de lire la topologie de X par les birapports. On se fixe trois points distincts a, b, c. Tout $x \in X$ est différent de deux de ces points, p.ex., a et b. Pour tout $m > 0$, $V_m(x) = \{y \in X,\ (xy|ab) > m\}$ est un voisinage de x et $\cap_m V_m = \{x\}$. En effet, si V_m n'était pas un voisinage de x, on trouverait (x_n) tendant vers x de sorte que $(xx_n|ab)$ soit borné, ce qui contredirait (A3). De même, (A1) implique $(xy|ab) = \infty$ seulement si $x = y$.

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 6.22. On se fixe trois points distincts $a, b, c \in X$. Prenons $x \in X$. On peut supposer $x \neq a, b$ et on choisit y de sorte que $(xy|ab) > k$. Notons $\theta = (x, a, b)$ et $\theta' = (y, x, b)$. Alors $\rho(\theta, \theta') = (xy|ab)$.

D'après (A3), on trouve (x_n) qui tend vers x de sorte que $(xx_n|ab)$ tende vers l'infini. Notons $\theta_n = (x, x_n, a)$. Par approximation par les arbres, on a, avec $n \geq m$,

$$\rho(\theta, \theta_n) + \rho(\theta, \theta_m) - \rho(\theta_n, \theta_m) = (xx_n|ab) + (xx_m|ab) - (xx_n|ax_m) \geq 2(xx_m|ab) - C(k)$$

donc cette suite définit un point $h(x) = \xi \in \partial\Theta^3(X)$.

De même, on considère (y_n) qui tend vers y de sorte que les $\theta'_n = (y, y_n, a)$ définissent un point $\zeta \in \partial\Theta^3(X)$. Par approximation par les arbres, on trouve

$$\rho(\theta, \theta_n) + \rho(\theta, \theta'_n) - \rho(\theta_n, \theta'_n) = (xx_n|ab) + (yy_n|ab) - (xx_n|yy_n) \geq 2(xy|ab) - C(k)$$

ce qui établit la continuité de h et le fait que sa définition ne dépend pas de la suite (x_n) considérée.

Soit $\xi \in \partial\Theta^3(X)$, et prenons (x_n, y_n, z_n) dans $\Theta^3(X)$ qui tend vers ξ. Quitte à extraire une sous-suite, on aura convergence vers (x, y, z). Si ces trois points sont distincts, alors on n'a pas convergence vers un point à l'infini d'après (A1). Donc on peut supposer $x = y$. Il vient que (x_n, x, a) tend vers ξ aussi, établissant la surjectivité. Comme X est compact, cela termine la démonstration. ■

6.5. Des espaces quasimétriques aux espaces métriques

Le théorème 6.15 nous conduit à nous intéresser aux notions suivantes, et à les relier à celles qui nous sont plus familières.

— Un espace quasimétrique est un espace X muni d'une fonction $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pour tous x, y et s'il existe une constante $C_m \geq 0$ telle que, pour tous x_1, x_2 et x_3 dans X, on a

$$\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + C_m\,;$$

— Si $C_g \geq 0$, on appelle une C_g-géodésique une application $g : [0, \ell] \to X$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\rho(g(0), g(\ell)) = \ell$ et

$$|\rho(g(s), g(t)) - |s - t|| \leq C_g$$

pour tous $s, t \in [0, \ell]$. La presque géodésique relie x et y si g prend ces valeurs aux bornes. On dit que (X, ρ) est presque géodésique si toute paire de points est liée par une C_g-géodésique, pour une constante C_g uniforme.

— Un espace quasimétrique (X, ρ) est δ-quasi-hyperbolique si ρ vérifie la propriété d'hyperbolicité des produits scalaires de Gromov avec la constante $\delta > 0$.

L'objet de ce paragraphe est l'énoncé suivant.

THÉORÈME 6.23. — *Un espace métrique géodésique quasi-isométrique à un espace quasimétrique presque géodésique et quasi-hyperbolique est hyperbolique.*

Le premier objectif est de montrer la finesse des triangles presque géodésiques.

PROPOSITION 6.24. — *Soit (X, ρ) un espace quasimétrique presque géodésique et quasi-hyperbolique. Il existe une constante $C_f = C_f(\delta, C_m, C_g) \geq 0$ telle que, si x, y et z sont joints par des segments C_g-presque géodésiques $[xy]$, $[yz]$ et $[zy]$, alors $[xy]$ est contenu dans le C_f-voisinage de $[yz] \cup [zx]$.*

On établit quelques faits.

FAIT 6.25. — *Soit (X, ρ) un espace C_m-quasimétrique et C_g-géodésique. Soit $g : [0, \ell] \to X$ une C_g-géodésique reliant x à y.*

(1) Pour tout $u \in g$, on a $\rho(x, u) + \rho(u, y) \leq \rho(x, y) + 3C_g$ et $\rho(x, u) - C_g \leq (u|y)_x \leq \rho(x, u) + C_m$.

(2) Si $g' : [0, \ell] \to X$ est une autre C_g-géodésique issue du même point x, alors, pour tout $u \in g$, il existe $v \in g'$ tel que $|\rho(x, u) - \rho(x, v)| \leq 2C_g$.

(3) Si Δ est un triangle presque géodésique de sommets x, y, z, alors, si $u \in [xy]$, alors ou bien $\rho(x, u) \leq (y|z)_x + C_g$ ou bien $\rho(y, u) \leq (y|z)_x + C_g$.

DÉMONSTRATION. On écrit $u = g(a)$, $a \in [0, \ell]$. On a

$$\rho(x, u) + \rho(u, y) \leq a + (\ell - a) + 2C_g \leq \rho(x, y) + 2C_g \,.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
(u|y)_x &\leq \frac{1}{2}(\rho(x, u) + \rho(x, y) - \rho(u, y)) \\
&\leq \frac{1}{2}(\rho(x, u) + \rho(x, u) + C_m) \\
&\leq \rho(x, u) + C_m \,.
\end{aligned}$$

et, à l'aide du premier point,

$$\begin{aligned}
(u|y)_x &\geq \frac{1}{2}(\rho(x, u) + \rho(x, y) - \rho(u, y)) \\
&\geq \frac{1}{2}(\rho(x, u) + \rho(x, u) - 2C_g) \\
&\geq \rho(x, u) - C_g \,.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant une seconde C_g-géodésique g' issue de x et notons $v = g'(a)$. On a

$$\rho(x,u) \le a + C_g \le \rho(x,v) + 2C_g$$

donc on obtient par symétrie $|\rho(x,u) - \rho(x,v)| \le 2C_g$.

Pour le dernier point, supposons $\rho(x,u) \ge (y|z)_x + C_g$. Du coup

$$\begin{array}{rcl} \rho(y,u) & \le & \rho(x,y) - \rho(x,u) + 2C_g \\ & \le & \rho(x,y) - (y|z)_x - C_g + 2C_g \\ & \le & \frac{1}{2}(\rho(y,z) + \rho(x,y) - \rho(x,z)) + C_g \\ & \le & (x|z)_y + C_g \end{array}$$

■

Passons maintenant à la suite.

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 6.24. On considère un point u du triangle. Par symétrie et par le fait 6.25, on peut supposer que $u \in [xy]$ et $\rho(x,u) \le (y|z)_x + C_g$. On considère $v \in [xz]$ tel que $|\rho(x,u) - \rho(x,v)| \le 2C_g$, toujours grâce au fait 6.25. Par hyperbolicité, on obtient

$$(u|v)_x \ge \min\{(u|y)_x, (y|z)_x, (z|v)_x\} - 2\delta\,. \tag{6.1}$$

On a, toujours avec notre fait préféré,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u|y)_x \le (1/2)(2\rho(x,u) + 2C_m) \le \rho(x,u) + C_m \le (y|z)_x + C_m + C_g\,, \\ (y|z)_x \ge \rho(x,u) - C_g\,, \\ (v|z)_x \ge \rho(x,v) - C_g \ge \rho(x,u) - 3C_g\,. \end{array} \right.$$

Donc

$$(u|v)_x \ge \rho(x,u) - 3C_g - 2C_m - 2\delta$$

mais

$$(u|v)_x \le \rho(x,u) + C_g - \frac{1}{2}\rho(u,v)$$

donc $\rho(u,v) \le 8C_g + 4C_m + 4\delta$ prouvant ainsi qu'un côté de Δ est inclus dans un voisinage donné des deux autres. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.23. Soit $\phi : Z \to X$ une (λ, c)-quasi-isométrie entre un espace métrique géodésique quasi-isométrique Z et un espace quasimétrique presque géodésique et quasi-hyperbolique (X,ρ). Si $x = \phi(x')$ et $y = \phi(y')$, on note $L(x,y)$ le $\lambda(1 + C_g) + c)$-voisinage de $\phi[x', y']$, de sorte que $L(x,y)$ est connexe. Si $z, w \in Z$ ne sont pas dans l'image, on choisit x, y à distance au plus c de ces points et on définit $L(z,w)$ comme le c-voisinage de $L(x,y)$. D'après la proposition 6.24, les triangles presque géodésiques de X sont C_f-fins donc on déduit l'existence d'une constante $h = h(C_f, \lambda, c)$ telle que, pour tous x, y, z, $L(x,y)$ est contenu dans le h-voisinage de $L(x,z) \cup L(z,y)$ et le théorème 5.28 montre que Z est hyperbolique. ■

EXERCICE 6.26. — *Soit (X,ρ), un espace C_m-quasimétrique, C_g-géodésique et δ-quasihyperbolique. On construit un graphe Γ dont les sommets sont les points X et on met une arête entre deux points si leur ρ-distance est au plus C_g+1. On munit Γ de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$.*

(1) Montrer que Γ est connexe.

(2) Montrer que $X\hookrightarrow\Gamma$ est quasi-isométrique. On pourra montrer que, pour tous $x,y\in X$, on a

$$d_\Gamma(x,y)-1\le\rho(x,y)\le(C_g+C_m+1)d_\Gamma(x,y)\,.$$

(3) En déduire que Γ est hyperbolique.

6.6. **Action de groupes de convergence sur les triplets de points**

Soient G un groupe de convergence sur un compact X que l'on munit d'un système d'anneaux G-invariants et de transversale $\mathcal{A}_T$ finie.

D'après le fait 6.10, la propriété (A1) est vérifiée, et la propriété (A2) découle du lemme 6.14. On obtient ainsi une action de G sur $(\Theta^3(X),\rho)$ par isométries. Cet espace est C_g-géodésique et quasi-hyperbolique.

Suivant B. Sun, on construit un graphe Γ dont les sommets sont les triplets de points $\Theta^3(X)$ et on met une arête entre deux points si leur ρ-distance est au plus C_g+1. On munit Γ de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$. Par construction, le graphe Γ est connexe et G opère sur Γ par isométries. On vérifie que l'injection canonique $\Theta^3(X)\hookrightarrow\Gamma$ induit une quasi-isométrie entre $(\Theta^3(X),\rho)$ et Γ puisque, pour tous $\theta,\theta'\in\Theta^3(X)$, on trouve un chemin C_g-géodésique $(\theta_0,\ldots,\theta_n)$ de sorte que $\rho(\theta,\theta')=n$, impliquant que $d_\Gamma(\theta,\theta')\le n\le\rho(\theta,\theta')$. Réciproquement, si $(\theta_0,\ldots,\theta_n)$ est un chemin d'arêtes dans Γ joignant θ et θ', alors $\rho(\theta,\theta')\le n(C_g+1+C_m)$ donc $\rho(\theta,\theta')\le(C_g+C_m+1)d_\Gamma(\theta,\theta')$. Le théorème 6.23 montre que Γ est hyperbolique au sens de Gromov et l'on obtient ainsi une action de G par isométries.

On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 6.27 (B. Sun). — *Soit g un élément loxodromique de points fixes a,b ; on suppose qu'il existe un anneau $A\in\mathcal{A}$ tel que $a<A<b$.*

(1) Pour tout $\theta\in\Theta^3(X)$, l'évaluation $n\mapsto g^n\theta\in\Gamma$ est un plongement quasi-isométrique.

(2) L'action de g est faiblement proprement discontinue.

Rappelons qu'un élément loxodromique d'un espace hyperbolique X est faiblement proprement discontinu (WPD) si, pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $x\in X$, il existe $k\neq0$ tel que l'ensemble

$$\{h\in G,\ d(x,h(x))\le\varepsilon,\ d(g^k(x),h(g^k(x)))\le\varepsilon\}$$

est fini.

On utilisera le fait suivant à répétitions.

FAIT 6.28. — *On se donne* $(x,y,z) \in \Theta^3(X)$*, des anneaux* $A_1, \ldots, A_N$ *et* $(a,b,c) \in \Theta^3(X)$ *tels que*

$$\{x,y\} < A_1 < \ldots < A_N < \{z\} \text{ et } \rho((a,b,c),(x,y,z)) < N-1$$

alors deux points parmi $\{a,b,c\}$ *sont dans* A_N^-.

DÉMONSTRATION. Si, par exemple, a et b ne sont pas dans A_N^-, alors $a, b \in A_{N-1}^+$, donc on a

$$\{x,y\} < A_1 < \ldots < A_{N-1} < \{a,b\}$$

donc $\rho((a,b,c),(x,y,z)) \geq N-1$. ■

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 6.27. Il existe $k \geq 1$ tel que $g^k(X \setminus A^-) \subset\subset intA^+$. Par conséquent, si $z \in X \setminus (A^- \cup A^+)$, alors

$$z < g^k(A) < \ldots < g^{k(n-1)}(A) < g^{nk}(z)$$

Du coup, $\rho((a,b,z),(a,b,g^{kn}(z))) \geq n-1$ et l'injection est une quasi-isométrie.

On note $\theta = (a,b,z)$ et $\theta_n = g^{kn}(\theta)$. Soient $\varepsilon > 0$ et n fixés, on considère

$$H_n(\varepsilon) = \{h \in G,\ \rho(\theta, h(\theta)) \leq \varepsilon,\ \rho(g^{nk}(\theta), h(g^{nk}(\theta)) \leq \varepsilon\}.$$

Soit $h \in H_n(\varepsilon)$. Soit $N > \varepsilon + 1$ un entier et $n \geq 2N$. Puisque $\rho(\theta, h(\theta)) \leq \varepsilon$, le fait 6.28 montre que deux points de $h(\theta)$ sont dans $g^{kN}(intA^-)$. De même, on a $\rho(\theta_n, h(\theta_n)) \leq \varepsilon$, donc deux points de $h(g^{kN}(\theta)$ sont dans $g^{k(n-N)}(intA^+)$. Notons que $k(n-N) \geq kN$, donc deux points de $h(\theta)$ sont dans $g^{kN}(intA^-)$ et deux points de $h(g^{kn}\theta)$ sont dans $g^{kN}(intA^+)$.

Si $H_n(\varepsilon)$ est infini, on peut extraire un écroulement (h_j) de base (x,y). Du coup, au moins deux suites extraites de $h_n(\theta)$ tendront vers y, impliquant $y \in A_N^-$; par symétrie, on montre aussi que $y \in A_N^+$, ce qui est impossible.

Maintenant, sachant que, pour tous $\theta, \theta' \in \Gamma$ et tout $h \in G$, on a

$$d(\theta, h(\theta)) \leq 2d(\theta,\theta') + d(\theta', h(\theta'))$$

on a $H_n(\theta', \varepsilon) \subset H_n(\theta, \varepsilon + 2d(\theta,\theta'))$ et on obtient la propriété WPD pour tout triplet. ■

6.7. Les groupes de convergence uniforme

Avant démontrer le théorème 6.2, on montre que l'action d'un groupe hyperbolique G à l'infini est *uniforme*, c'est-à-dire que l'action diagonale de G est proprement discontinue et cocompacte sur $\Theta^3(\partial G)$.

PROPOSITION 6.29. — *Soit* G *un groupe qui opère géométriquement sur un espace hyperbolique, géodésique et propre* Z*. Son action induite sur* ∂Z *est uniforme.*

DÉMONSTRATION. On se fixe une distance visuelle d_ε sur ∂Z basée en un point $w \in Z$. Il suffit de montrer l'existence d'une constante $m > 0$ telle que l'orbite de tout triplet contient un triplet de points m-séparés.

Prenons donc $\{a_1, a_2, a_3\} \in \Theta(\partial Z)$ et notons $z = p(a_1, a_2, a_3)$, c'est-à-dire un point à distance au plus 4δ d'un triangle idéal de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$. Il existe $g \in G$ tel que $d_Z(gz, w) \leq D$, où D désigne le diamètre d'un domaine fondamental relativement compact de l'action de G sur Z. Du coup, on a $d(w, [ga_i, ga_j]) \leq D + 4\delta$ pour toute paire de points de $\{a_1, a_2, a_3\}$. Il vient

$$(ga_i|ga_j)_w \leq d(w, [ga_i, ga_j]) \leq D + 4\delta$$

ce qui implique $d_\varepsilon(ga_i, ga_j) \gtrsim e^{-\varepsilon(D+4\delta)}$, montrant ainsi que ces points uniformément séparés, indépendamment du triplet initial. ■

On suppose dorénavant que G admet une action uniforme sur X. Puisque l'action est cocompacte, il existe un compact $\Theta_0 \subset \Theta(X)$ tel que, pour $\theta \in \Theta(X)$, il existe $g \in G$ tel que $g(\theta) \in \Theta_0$. On choisit un recouvrement fini $\{U_j(\theta^j) = U(x_1^j) \times U(x_2^j) \times U(x_3^j)\}_{j=1,\ldots,\ell}$, où les $U(x_k^j)$ sont des voisinages de x_k^j, où $X \setminus \cup_k \overline{U(x_k^j)} \neq \emptyset$, et où $\theta^j = (x_i^j) \in \Theta_0$.

On note $\mathcal{A}_T$ l'ensemble de tous les anneaux de la forme $(\overline{U(x_a^j)}, \overline{U(x_b^j)})$ lorsque l'on parcourt $\{x_1^j, x_2^j, x_3^j\}$, $j = 1, \ldots, \ell$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des anneaux obtenus en faisant opérer G sur $\mathcal{A}_T$.

D'après le fait 6.10, la propriété (A1) est vérifiée. La propriété (A2) découle du lemme 6.14 et (A3) du lemme 6.13. On obtient ainsi une action de G sur l'espace quasihyperbolique $(\Theta^3(X), \rho)$ par isométries dont le bord est homéomorphe à X en vertu du théorème 6.15.

Notons que (Θ_0, ρ) est borné car Θ_0 est compact et (A1) est vérifié. Notons D son diamètre.

Soit $\theta \in \Theta^3(X)$ et considérons $G\theta \subset \Theta^3(X)$. On se fixe $r \geq 2C_m + C_g + 2D + 1$ et on construit un graphe Γ de sommets $G\theta$ et avec une arête entre deux points s'ils sont à distance au plus r. Comme $r \geq 2C_m + C_g + 2D + 1$, on en déduit que Γ est connexe. En effet, on construit une C_g-géodésique entre θ et $g(\theta)$. Chaque point θ_j est dans un translaté de Θ_0, donc, on trouve $g_j \in G$ tel que $\rho(g_j(\theta), \theta_j) \leq D$. Du coup, $\rho(g_j(\theta), g_{j+1}(\theta)) \leq \rho(g_j(\theta), \theta_j) + \rho(\theta_j, \theta_{j+1}) + \rho(\theta_{j+1}, g_{j+1}(\theta)) + 2C_m \leq 2C_m + 1 + C_g + 2D$.

On montre que $(G\theta, \rho) \hookrightarrow \Gamma$ est une quasi-iométrie. Par équivariance, il suffit de considérer les couples $(\theta, g(\theta))$, $g \in G$. On trouve un chemin C_g-géodésique $(\theta_0, \ldots, \theta_n)$ de sorte que $\rho(\theta, g\theta) = n$, impliquant que $d_\Gamma(\theta, \theta') \leq n \leq \rho(\theta, \theta')$ d'après ci-dessus. Réciproquement, si $(\theta_0, \ldots, \theta_n)$ est un chemin d'arêtes dans Γ joignant θ et $g(\theta)$, alors $\rho(\theta, g(\theta)) \leq n(r + C_m) \leq (r + C_m) d_\Gamma(\theta, \theta')$.

Supposons qu'il existe une boule $B(\theta, R)$ qui contient une infinité de points de $G\theta$. Alors on aurait un écroulement (g_n) de base (a, b). D'après (A3), cela impliquerait que $\rho(\theta, g_n(\theta))$ tendrait vers l'infini. Donc Γ est localement fini et l'action de G sur Γ est proprement discontinue, donc géométrique car il n'existe qu'une seule orbite de sommets. Comme $\Theta^3(X)$ est quasihyperbolique, on en déduit que Γ est hyperbolique au sens de Gromov par le théorème 6.23., donc G aussi. Cela conclut la démonstration du théorème 6.2.

Cette approche produit, après efforts supplémentaires, une démonstration du théorème suivant, dont une autre preuve est donnée par P. Tukia.

THÉORÈME 6.30 (B. Bowditch [Bow], P. Tukia [Tuk]). — *Soit G un groupe de convergence discret opérant sur un espace compact métrisable. Si tous les points de l'ensemble limite sont coniques, alors le groupe est hyperbolique et l'action est cocompacte sur les triplets de points (de l'ensemble limite).*

L'enjeu est d'obtenir des presque géodésiques à partir des points coniques, hypothèse qui n'est pas aussi quantitative que l'action cocompacte sur les triplets de points.

RÉFÉRENCES

[BS] Mario Bonk and Oded Schramm. Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.* **10**(2000), 266–306.

[Bow] Brian H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.* **11**(1998), 643–667.

[Ger] Victor Gerasimov. Expansive convergence groups are relatively hyperbolic. *Geom. Funct. Anal.* **19**(2009), 137–169.

[Pau] Frédéric Paulin. Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord. *J. London Math. Soc. (2)* **54**(1996), 50–74.

[Sun] Bin Sun. A dynamical characterization of acylindrically hyperbolic groups. *Algebr. Geom. Topol.* **19**(2019), 1711–1745.

[Tuk] Pekka Tukia. Conical limit points and uniform convergence groups. *J. Reine Angew. Math.* **501**(1998), 71–98.

[Yam] Asli Yaman. A topological characterisation of relatively hyperbolic groups. *J. Reine Angew. Math.* **566**(2004), 41–89.