5. RUDIMENTS DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE AU SENS DE GROMOV

On reprend l'étude de la géométrie hyperbolique entreprise dans le paragraphe § 2.2 que l'on va détailler.

Notations.— On notera parfois la métrique $d(x,y) = |x-y|$. Si a, b sont des réelles positifs, on notera $a \asymp b$ s'il existe une constante universelle $u \geq 1$ telle que $a/u \leq b \leq ua$ et $a \sim b$ s'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que $|a-b| \leq C$. Si $A, B \subset X$ sont des sous-ensembles d'un espace métrique, la *distance de Hausdorff* est

$$d_H(A,B) = \max \left\{ \sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A) \right\}$$

ce qui signifie que $d_H(A,B) \leq D$ si A est dans le D-voisinage de B et réciproquement.

5.1. Actions géométriques, quasi-isométries

Soit (X,d) un espace métrique propre. On suppose maintenant que G opère par homéomorphismes sur X.

Définition 5.1 (Action géométrique). — *Un groupe G* opère géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie : pour tous $x, y \in X$ et tout $g \in G$,*

$$d(g(x), g(y)) = d(x,y)\,;$$

(2) *l'action est proprement discontinue : pour tous compacts K et L de X,*

$$\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini ;

(3) *l'action est cocompacte : il existe un compact K tel que $X = \cup_{g\in G} g(K)$.*

Le lemme suivant illustre notamment le fait que l'existence d'une « bonne » action permet d'obtenir une propriété algébrique du groupe — ici le fait d'être de type fini.

Lemme 5.2 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors G est de type fini. De plus, si S est un système de générateurs fini et $x \in X$, alors l'application $f : g \in G \mapsto g(x)$ vérifie les propriétés suivantes. Il existe deux constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ telles que

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g,g') - c \leq d_X(g(x), g'(x)) \leq \lambda d_S(g,g') + c.$$

et $X \subset \cup_{g\in G} B_X(g(x), c)$.

Ce lemme montre qu'un groupe qui opère géométriquement sur un espace géodésique X « ressemble », à grande échelle, à X. Cette observation est une clef de la théorie géométrique des groupes et motive la définition suivante introduite sous cette forme par G. Margulis [Mar].

Définition 5.3 (Quasi-isométrie). — *Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un* plongement (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x,x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x,x') + c. \tag{5.1}$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi (5.1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$ et, pour tout $y \in Y$, $d_Y(f(g(y)), y) \leq c$.*

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini. Un des principaux objectifs de la théorie géométrique des groupes est d'établir des propriétés des groupes qui sont invariantes par quasi-isométries. On dit alors qu'elles sont *géométriques.*

Démonstration du lemme 5.2. Soit $K \subset X$ un compact tel que $G(K) = X$, et prenons $w \in X$ et $D > 0$ pour que $K \subset B(w, D/3)$. On note

$$S = \{g \in G,\ g(B(w,D)) \cap B(w,D) \neq \emptyset\}\,.$$

Puisque X est propre et l'action est proprement discontinue, S est fini (et non vide, puisque $e \in S$). Nous allons montrer que S engendre G.

Soit $g \in G$, et considérons un segment $\gamma : [0,1] \to X$ avec $\gamma([0,1]) = [w, g(w)]$. On se donne une subdivision $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[0,1]$ telle que $t_0 = 0$, $t_n = 1$ et $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = D/3$, pour $j < n-1$. Pour chaque $0 < j < n$, il existe $g_j \in G$ tel que $d(\gamma(t_j), g_j(w)) < D/3$; on pose $g_0 = \mathrm{Id}$ et $g_n = g$. Du coup,

$$d(g_j(w), g_{j+1}(w)) \leq d(g_j(w), \gamma(t_j)) + d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) + d(\gamma(t_{j+1}), g_{j+1}(w)) < D\,.$$

Par conséquent $d((g_j^{-1} \circ g_{j+1})(w), w) < D$ et $(g_j^{-1} \circ g_{j+1}) \in S$. En particulier,

$$g = g_0 \circ (g_0^{-1} \circ g_1) \ldots (g_{n-1}^{-1} \circ g_n)$$

donc G est engendré par S. De plus, $|g|_S \leq n$ et

$$\begin{aligned}
d(w, g(w)) &= \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\
&\geq \sum_{j=0}^{n-2} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\
&\geq \frac{D}{3}(n-1) \\
&\geq \frac{D}{3}|g|_S - \frac{D}{3}.
\end{aligned}$$

Si on note $M = \max\{d(g(w), w),\ g \in S\}$, alors, pour tout $g \in G$, on a

$$d(g(w), w) \leq |g|_S \cdot M$$

donc

$$g \mapsto g(w)$$

est une quasi-isométrie de $(G, |\cdot|_S)$ sur $G(w)$. Par définition de D, on a $X \subset G(B(w, D))$, donc on a bien une quasi-isométrie sur X. ■

Exercice 5.4. — *On suppose que G opère sur un espace connexe X, et qu'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $G(U) = X$. Montrer que*

$$S = \{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

engendre G.

On donne quelques exercices sur les quasi-isométries qui devraient permettre de se familiariser avec la notion.

Exercice 5.5. — *Montrer que la relation « être quasi-isométrique » définit une relation d'équivalence sur les espaces métriques.*

Exercice 5.6. — *Montrer que $f : X \to Y$ est une quasi-isométrie si et seulement si f est un plongement quasi-isométrique et si $f(X)$ est coborné, c.à.d. s'il existe une constante $c > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq c$.*

Exercice 5.7. — *Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont quasi-isométriques.*

Exercice 5.8. — *Montrer que pour que deux espaces métriques X et Y soient quasi-isométriques, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$ cobornés et une quasi-isométrie entre X' et Y'.*

Exercice 5.9. — *Soient X et Y deux espaces métriques. Une correspondance quasi-isométrique est donnée par deux constantes $\lambda \geq 1$ et $c > 0$ et une relation binaire $\mathcal{R} \subset X \times Y$ telles que*

(1) Pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $x\mathcal{R}y$; pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $x\mathcal{R}y$;

(2) Si $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$, alors

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(y, y') \leq \lambda d_X(x, x') + c.$$

Montrer que X et Y sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe une correspondance quasi-isométrique entre X et Y.

Exercice 5.10. — *Le but de cet exercice est de montrer que, quelle que soit $\varepsilon > 0$, un espace de longueur X est $(1 + \varepsilon, 2)$-quasi-isométrique à un graphe G dont chaque arête est isométrique au segment $[0, 1]$. Soit $\delta > 0$.*

(1) *Montrer qu'il existe une famille maximale de boules $\mathcal{B}_\delta$ de rayon δ deux à deux disjointes dans X. Montrer que si $x \in X$, il existe $B = B(c,\delta) \in \mathcal{B}_\delta$ telle que $d(x,c) < 2\delta$.*

(2) *On définit le graphe $\Gamma = (S,A)$, où $S = \mathcal{B}_\delta$ et $(B,B') \in A$, $B = B(c,\delta)$, $B' = B(c',\delta)$, si $d(c,c') \leq 1$. Montrer que l'application $B = B(c,\delta) \in \Gamma \mapsto c \in X$ définit une $(1+\varepsilon, 2)$-quasi-isométrie, où $\varepsilon = O(\delta)$.*

EXERCICE 5.11. — *Soient G un groupe de type fini et H un sous-groupe d'indice fini. Montrer que H est quasi-isométrique à G et que H est aussi de type fini. On pourra faire opérer H sur un graphe de Cayley localement fini de G.*

EXERCICE 5.12. — *Montrer que si N est un sous-groupe fini et distingué de G, alors G et G/N sont quasi-isométriques.*

EXERCICE 5.13. — *Soit T_n l'arbre régulier infini, où chaque sommet est l'extrémité de n arêtes, $n \geq 3$. On munit T_n de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique à $[0,1]$.*

(1) *On colorie les arêtes de T_3 de trois couleurs a, b et c de sorte que chaque sommet est l'extrémité d'une arête de chaque couleur, et on considère la relation d'équivalence $x \sim x'$ si $\{x,x'\}$ est inclus dans la fermeture d'une arête de couleur a.*

   (a) *Montrer que $T_3/\sim$ est isomorphe à T_4.*

   (b) *En déduire que T_3 et T_4 sont quasi-isométriques.*

(2) *Montrer que T_m et T_n sont quasi-isométriques si $m,n \geq 3$.*

(3) *En déduire que $\mathbb{F}_m$ et $\mathbb{F}_n$ sont quasi-isométriques si $m,n \geq 2$.*

5.2. **Premières propriétés des espaces hyperboliques**

Soit (X,d) un espace métrique géodésique propre. Rappelons la définition d'un espace hyperbolique et du produit de Gromov. Si $w,x,y \in X$, on note $(x|y)_w = (1/2)\{|x-w| + |y-w| - |x-y|\}$. Un espace métrique est δ-hyperbolique si pour tous w,x,y,z, on a

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta\,.$$

Rappelons aussi qu'un triangle Δ est la donnée de trois points x,y,z et de trois segments géodésiques $[x,y]$, $[x,z]$ et $[y,z]$, auquel on associe un tripode T défini par trois extrémités $\bar{x}, \bar{y}$, et $\bar{z}$ et de centre c, tels que $|\bar{x}-c| = (y|z)_x$, $|\bar{y}-c| = (x|z)_y$ et $|\bar{z}-c| = (y|x)_z$ et l'application $f_\Delta : \Delta \to T$ qui est une isométrie lorsqu'elle est restreinte à un segment. Le triangle Δ est δ-fin si pour tous $u,v \in \Delta$, on a $|u-v| \leq |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$ et on rappelle

LEMME 2.4. — Si X est δ-hyperbolique, alors les triangles sont 4δ-fins et

$$(x|y)_w \leq d(w,[x,y]) \leq (x|y)_w + 4\delta\,.$$

Un *quadrilatère* désigne 4 points cycliquement ordonnés $\{x_j, j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$ munis d'un choix de segments géodésiques $[x_j, x_{j+1}]$.

Corollaire 5.14. — *Si $Q = \{w, x, y, z\}$ est un quadrilatère dans un espace géodésique δ-hyperbolique, alors il existe $f_Q : Q \to T$ sur un arbre, isométrique sur chaque côté, tel que, pour tous $u, v \in Q$, on a $|u - v| - 8\delta \leq |f_Q(u) - f_Q(v)|$.*

Démonstration. On considère deux triangles $\{w, x, y\}$ et $\{w, y, z\}$ auxquels on associe les tripodes correspondants que l'on recolle isométriquement le long de l'image commune de $[w, y]$. Le corollaire suit en utilisant la finesse de ces triangles. ∎

Corollaire 5.15. — *Soit X un espace δ-hyperbolique.*

(1) Si $r, r' : \mathbb{R}_+ \to X$ sont des rayons tels que $d_H(r, r') < \infty$, alors il existe $u \in [-d(r(0), r'(0)), d(r(0), r'(0))]$ tel que, pour tout $t \geq d(r(0), r'(0))$, on a $d(r(t), r'(t+u)) \leq 8\delta$.

(2) Si $\gamma, \gamma' : \mathbb{R} \to X$ sont des géodésiques telles que $d_H(\gamma, \gamma') < \infty$, alors il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $d(\gamma(t), \gamma'(t + u)) \leq 8\delta$.

Démonstration. On note $M = d_H(r, r')$ et $D = d(r(0), r'(0))$. Soient $s > M + D$ et $s' > 0$ tels que $|r(s) - r'(s')| \leq M$. On considère le quadrilatère $\{r(0), r(s), r'(s'), r'(0)\}$ soutenu par r et r', ainsi que l'application $f_Q : Q \to T$ définie par le corollaire 5.14 : il existe $t_s, t'_s \in [0, D]$ minimaux tels que $f_Q(r(t_s)) = f_Q(r'(t'_s))$ et, pour $t \in [0, s-(M+D)]$, on a $f_Q(r(t_s+t)) = f_Q(r'(t'_s+t))$. Ceci implique $|r(t_s+t) - r'(t'_s+t)| \leq 8\delta$. On fait tendre s vers l'infini : on peut extraire une suite de sorte que t_s et t'_s seront convergentes puisque ces paramètres sont dans $[0, D]$. Le résultat en découle.

On suppose maintenant $d_H(\gamma, \gamma') < \infty$. Le point précédent implique $d_H(\gamma, \gamma') \leq 8\delta$. On considère un quadrilatère $\{\gamma(-s), \gamma(s), \gamma'(s_+), \gamma'(s_-)\}$ de sorte que $s > 20\delta$ et $|\gamma(\pm s) - \gamma'(s_\pm)| \leq 8\delta$. L'argument précédent montre qu'il existe $u_s \in \mathbb{R}$ tel que $|\gamma(t) - \gamma'(t+u_s)| \leq 8\delta$ pour $|t| \leq s - 10\delta$. Or u_s réside dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$, donc un passage à la limite permettra de conclure comme ci-dessus. ∎

Exercice 5.16. — *Soit X un espace géodésique.*

— *Si tous les triangles sont δ-fins alors X est 2δ-hyperbolique.*

— *Si X est δ-hyperbolique, alors, il vérifie la condition de Rips : dans tout triangle, la distance d'un point aux deux côtés opposés est plus petite que 4δ.*

— *Si X vérifie la condition de Rips, avec constante δ, alors les triangles sont 4δ-fins.*

Corollaire 5.17. — *Les conditions de Rips et de finesse des triangles sont équivalentes à l'hyperbolicité.*

On décrit deux propriétés fondamentales des espaces métriques hyperboliques : leurs liens avec les arbres, et le lemme de poursuite des quasigéodésiques.

5.2.1. *Espaces hyperboliques et arbres.*

DÉFINITION 5.18. — *Un arbre métrique est un arbre simplicial muni d'une distance de longueur. Un arbre réel est un espace métrique géodésique T tel que toute paire de points est jointe par un unique arc.*

EXERCICE 5.19. — *Montrer qu'un espace géodésique est 0-hyperbolique si et seulement si c'est un arbre réel.*

THÉORÈME 5.20. — *Un espace métrique X est 0-hyperbolique si et seulement si X admet un plongement isométrique dans un arbre réel.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace 0-hyperbolique. D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que X se plonge isométriquement dans un espace géodésique 0-hyperbolique. On définit

$$\tilde{T} = \sqcup_{x\in X\setminus\{w\}} A_x \text{ où } A_x = \{(t,x),\ t \in [0, |x-w|]\}\,.$$

On note $(t,x) \sim (t',x')$ si $t = t'$ et $t \le (x|x')_w$: $\sim$ est une relation d'équivalence. Elle est clairement réflexive et symétrique. De plus, elle est transitive car X est 0-hyperbolique. On note $T = \tilde{T}/\sim$.

On définit

$$d((t,x),(t',x')) = t + t' - 2\min\{t, t', (x|x')_w\}\,.$$

On vérifie que d ne dépend que des classes de (t,x) et de (t',x'), donc cette fonction induit une application $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$. Montrons que d est une distance. Elle est symétrique par définition. Si $d((t,x),(t',x')) = 0$ alors $t + t' = 2\min\{t, t', (x|x')_w\}$. Par suite, $t = t'$ et $t \le (x|x')_w$, donc $(t,x) \sim (t',x')$. Pour vérifier l'inégalité triangulaire, on se donne (t,x), (t',x') et (t'',x''). On a $t + t'' \le t + 2t' + t''$ et $\min\{t, t', t'', (x|x')_w, (x'|x'')_w\} \le \min\{t, t'', (x|x'')_w\}$ car X est 0-hyperbolique.

On note $\iota : X \to \tilde{T}$ l'application $x \mapsto (|x-w|, x)$. Il vient

$$d(\iota(x), \iota(x')) = |x-w| + |x'-w| - 2\min\{|x-w|, |x'-w|, (x|x')_w\} = |x-x'|$$

car $(x|y)_w \le |x-w|$ pour tous $x, y \in X$. Donc ι est un plongement isométrique. Il reste à vérifier que T est 0-hyperbolique. ■

Arbres approximatifs.— Soient (X,w) un espace δ-hyperbolique et $k \ge 0$.

(i) Si $|X| \le 2^k + 2$, alors il existe un arbre métrique pointé fini T et $\phi : X \to T$ tels que :
 - $\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x-w|$,
 - $\to$ $\forall x, y \in X$, $|x-y| - 2k\delta \le |\phi(x) - \phi(y)| \le |x-y|$.

(ii) S'il existe des sous-rayons $(X_i, w_i)_{1\le i\le n}$ avec $n \le 2^k$ tel que $X = \cup X_i$, alors, en notant $c = \max\{|w-w_i|\}$, il existe un arbre réel pointé T et $\phi : X \to T$ tels que
 - $\to$ $\forall x \in X$, $|\phi(x) - \phi(w)| = |x-w|$,
 - $\to$ $\forall x, y \in X$, $|x-y| - 2(k+1)\delta - 4c \le |\phi(x) - \phi(y)| \le |x-y|$.

Ce résultat permet d'exploiter simplement l'hyperbolicité de X comme nous le verrons par la suite. Sa démonstration requiert l'établissement de trois résultats intermédiaires.

LEMME 5.21. — Soit X un espace δ-hyperbolique. On note

→ $(x|y)' = \sup \min\{(x_{i-1}|x_i),\ 2 \le i \le L\}$, où le supremum est pris sur toutes chaînes finies $x_1, \ldots, x_L$ avec $x_1 = x$ et $x_L = y$,

→ $|x-y|' = |x-w| + |y-w| - 2(x|y)'$,

→ $x \sim y$ si $|x-y|' = 0$.

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence et $|\cdot|'$ est une distance sur $(X/\sim)$ qui en fait un espace 0-hyperbolique. De plus, pour tout $x \in X$, on a $|x-w|' = |x-w|$, et pour tous $x, y \in X$, $|x-y|' \le |x-y|$.

DÉMONSTRATION. Montrons que $|x-z|' \le |x-y|' + |y-z|'$. Soient $\varepsilon > 0$, $(x_1, \ldots, x_L)$ et $(y_1, \ldots, y_M)$ tels que $x_1 = x$, $x_L = y_1 = y$, $y_M = z$, et $\min\{(x_{i-1}|x_i)\} \ge (x|y)' - \varepsilon$ et $\min\{(y_{i-1}|y_i)\} \ge (y|z)' - \varepsilon$. Posons $z_i = x_i$ si $1 \le i \le L$ et $z_i = y_{i-L+1}$ si $L+1 \le i \le L+M-1$. Donc $(x|z)' \ge \min\{(z_{i-1}|z_i)\} \ge \min\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$.

De plus, $|y-w| \ge \max\{(y|z_{L-1}), (y|z_{L+1})\} \ge \max\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$, donc

$$(x|y)' + (y|z)' \le (x|z)' + |y-w| + 2\varepsilon\,.$$

En utilisant la définition de $|\ |'$, on obtient l'inégalité triangulaire.

Par conséquent, $\sim$ est une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire implique la transitivité), et $|\cdot|'$ est une métrique sur $X/\sim$ qui en fait un espace 0-hyperbolique puisque $(x|z)' \ge \min\{(x|y)', (y|z)'\} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (*cf.* ci-dessus).

D'autre part, pour tout $x \in X$, $(x|w) = 0$ ce qui implique $(x|w)' = 0$, donc

$$|x-w|' = |x-w| - 2(x|w)' = |x-w|.$$

De même, $(x|y)' \ge (x|y)$ donc $|x-y|' \le |x-y|$. ■

LEMME 5.22. — Si $|X| \le 2^k + 2$ alors pour toute chaîne $x_1, \ldots, x_L \in X$, on a

$$(x_1|x_L) \ge \min\{(x_{j-1}|x_j)\} - k\delta\,.$$

DÉMONSTRATION. S'il existe j tel que $x_j = w$, alors $(x_1|x_L) \ge 0 = (x_{j-1}|x_j)$. On suppose donc que w ne figure pas dans la chaîne. De plus, si $L = 3$ et $k \ge 1$, cela découle de la définition de l'hyperbolicité. On suppose donc $4 \le L$. On traite d'abord le cas de $L \le 2^k + 1$ par récurrence sur k. Si $k = 0$, alors $|X| \le 3$ et c'est bon car $L \le 2$. Supposons que ce soit vrai jusqu'au rang $k-1$: on note $K = [L/2]$, donc $2 \le K \le 2^{k-1} + 1$ et $L - K + 1 \le L/2 \le 2^{k-1} + 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$(x_1|x_K) \ge \min\{(x_{j-1}|x_j),\ 2 \le j \le K\} - (k-1)\delta$$

et

$$(x_K|x_L) \ge \min\{(x_{j-1}|x_j),\ K+1 \le j \le L\} - (k-1)\delta\,.$$

Or $(x_1|x_L) \geq \min\{(x_1|x_K),(x_K|x_L)\} - \delta$, donc

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x_{j-1}|x_j),\ 2 \leq j \leq L\} - k\delta\,.$$

On suppose toujours que $w \notin \{x_j\}_{1\leq j\leq L}$. On dit que $(y_1,\ldots,y_M)$ est une sous-chaîne de $\{x_j\}$ si pour tout i, il existe j tel que $y_i = x_j$ et $y_{i+1} = x_{j+1}$. Du coup, $\min\{(y_{j-1}|y_j)\} \geq \min\{(x_{j-1}|x_j)\}$.

Si $x_1,\ldots,x_L$ est une chaîne avec $L \geq 2^k+2$, alors il existe une sous-chaîne $(y_1\ldots,y_K)$ avec $K \leq 2^k+1$: en effet, $L \geq 2^k+2$ implique qu'il existe $p < q$ tels que $x_p = x_q$: $x_1,\ldots,x_p,x_{q+1},\ldots,x_L$ est une sous-chaîne de longueur $< L$. Tant que la longueur est au moins 2^k+2, on peut la réduire. Il s'ensuit que l'on se ramène au cas précédent, qui permet de conclure. ■

LEMME 5.23. — Soit $X = \cup_{i=1}^n X_i$ avec (X_i,w_i) qui se plonge isométriquement dans $(\mathbb{R}_+,0)$. Si $n \leq 2^k$ alors

$$(x_1|x_L) \geq \min_{2\leq j\leq L}\{(x_{j-1}|x_j)\} - (k+1)\delta - 2c\,.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a $(x|y)_w \leq \min\{|x-w|,|y-w|\}$, et si $x,y \in X_i$ alors $(x|y)_{w_i} = \min\{|x-w_i|,|y-w_i|\}$, et $|x-w_i| \geq |x-w| - |w-w_i| \geq |x-w| - c$. De même, $|y-w_i| \geq |y-w| - c$. Par suite, $(x|y)_{w_i} \geq \min\{|x-w|,|y-w|\} - c$ et

$$(x|y)_w \geq (x|y)_{w_i} - c \geq \min\{|x-w|,|y-w|\} - 2c \geq \min\{(x|x')_w,(y|y')_w\} - 2c$$

pour tous $x',y' \in X$.

Soit $x_1,\ldots,x_L \in X$ une chaîne. Ou bien, pour tout $j \geq 2$, $x_j \notin X(x_1)$, ou bien il existe $j > 1$ (maximal) tel que $x_j \in X(x_1)$. Du coup, $(x_1|x_j) \geq \min_{2\leq i\leq j}\{(x_{j-1}|x_j)\} - 2c$ d'après ci-dessus. On considère alors $x_1,x_j,x_{j+1},\ldots,x_L$.

De proche en proche, on extrait une chaîne (x'_i) de longueur au plus $2n \leq 2^{k+1}+1$ qui contient x_1 et x_L et telle qu'au plus deux termes sont dans un même X_i, et alors ils sont consécutifs. Il découle du lemme 5.22 et de ci-dessus que

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x'_{i-1}|x'_i)\} - (k+1)\delta \geq \min\{(x_{i-1}|x_i)\} - (k+1)\delta - 2c\,.$$

■

DÉMONSTRATION DES ARBRES APPROXIMATIFS. Il suffit de trouver $\phi : X \to T$ avec T 0-hyperbolique. D'après le lemme 5.21, l'espace $(X/\sim)$ est 0-hyperbolique et $\phi : X \to X/\sim$ vérifie $|\phi(x)-\phi(w)|' = |x-w|$ et $|\phi(x)-\phi(y)|' \leq |x-y|$.

Dans le cas (i), le lemme 5.22 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - k\delta$, soit

$$|\phi(x)-\phi(y)|' \geq |x-y| - 2k\delta.$$

Dans le cas (ii), le lemme 5.23 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - (k+1)\delta - 2c$, soit

$$|\phi(x)-\phi(y)|' \geq |x-y| - 2(k+1)\delta - 4c.$$

■

On cite un corollaire qui découle plus précisément de la démonstration de l'approximation par les arbres.

COROLLAIRE 5.24. — *S'il existe $\delta > 0$ et $w \in X$ tels que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait*

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

alors X est 6δ-hyperbolique.

En effet, l'approximation par les arbres d'un nombre fini de points n'utilise que les propriétés du produit de Gromov au point base w fixé une fois pour toute.

5.2.2. *Quasigéodésiques et applications.* Une (λ, c)-quasigéodésique est un plongement quasi-isométrique de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 5.25 (lemme de poursuite). — *Soit X un espace géodésique δ-hyperbolique. Si f est un segment (λ, c)-quasigéodésique, alors, pour tout segment géodésique g de mêmes extrémités, on a $d_H(f, g) \leq H(\delta, \lambda, c)$. Par conséquent, si X est propre alors on a les extensions suivantes.*

— *Si f est un (λ, c)-quasirayon alors il existe un rayon g telle que $d_H(f, g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.*
— *Si f est une (λ, c)-quasigéodésique alors il existe une géodésique g telle que $d_H(f, g) \leq H(\delta, \lambda, c)$.*

Avant de passer à la démonstration, on en tire tout de suite un corollaire important.

COROLLAIRE 5.26. — *Soit $\varphi : X \to Y$ une quasi-isométrie entre espaces métriques géodésiques. Alors X est hyperbolique si et seulement si Y l'est.*

DÉMONSTRATION. Supposons que X est hyperbolique, et montrons que Y aussi. On utilise la caractérisation par la condition de Rips : soit Δ un triangle dans Y. Alors $\varphi^{-1}(\Delta)$ est un “quasitriangle”, dans l'ombre d'un réel triangle qui vérifie la condition de Rips. Du coup, un côté de $\varphi^{-1}(\Delta)$ est dans un voisinage des deux autres. Cette propriété se transporte bien par quasi-isométries. et on en déduit que Δ vérifie la condition de Rips aussi. ■

La démonstration du théorème 5.25 repose sur l'idée amusante de Bowditch qu'une fonction croissante, qui ne croît pas assez vite doit être bornée :

LEMME 5.27. — Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle qu'il existe des constantes $A, B, C, D, E \geq 0$, et $r_0 > 0$ telles que

$$\begin{cases} f(r) \leq A \log^+ r + B, \ r > 0 \\ f(r) \leq f(Cf(r) + D) + E, \ r \geq r_0 \,. \end{cases}$$

Alors f est bornée.

On rappelle que $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Démonstration. Posons $F(r) = Cf(r) + D$ de sorte que $F(r) \leq F(F(r)) + E$ pour $r \geq r_0$. Comme le logarithme croît doucement, il existe $r_1 \geq r_0$ telle que, si $r \geq r_1$ alors

$$AC \log r + BC + D + E < r\,.$$

On en déduit, pour $r \geq r_1$,

$$F(r) + E \leq Cf(r) + D + E \leq AC \log r + BC + D + E < r$$

donc, s'il existait $r > r_1$ tel que $F(r) > r_1$, alors on aurait $F(r) \leq F(F(r)) + E < F(r)$ ce qui est impossible. Donc $F \leq r_1$ et f est bornée aussi. ■

Démonstration du théorème 5.25. On déduit la poursuite des quasirayons et des quasigéodésiques par un argument de compacité, licite puisque X est supposé propre. On se concentre sur les quasisegments. La démonstration se passe en quatre étapes.

Etape préliminaire : réduction au cas où I est de longueur entière.— Soit $f : I \to X$ une (λ, c)-quasigéodésique joignant x, y. On peut étendre f en une $(\lambda, c+1)$-quasigéodésique $f : J \to X$ où J est de longueur entière.

Quitte à translater I, on peut s'arranger pour que $I = [a, b']$ avec $a \in \mathbb{Z}$; on note $b = \min\{n \geq b',\ n \in \mathbb{Z}\}$ de sorte que $b - b' < 1$ et on pose $J = [a, b]$. On définit $f|_{[b',b]}$ en posant $f(x) = f(b')$. On utilisera que si $x, y \in [b', b]$, alors $|x - y| \leq 1 \leq \lambda$, soit $(1/\lambda)|x - y| \leq 1$. On vérifie que si $x \in [a, b']$ et $y \in [b', b]$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - b'| + c \leq \lambda|x - y| + c$$

et

$$|f(x) - f(y)| \geq (1/\lambda)|x - b'| - c \geq (1/\lambda)|x - y| - (c+1)\,.$$

Si $x, y \in [b', b]$, on a aussi

$$(1/\lambda)|x - y| - (c+1) \leq (1/\lambda)|x - y| - 1 \leq |f(x) - f(y)| = 0 \leq |x - y| + c\,.$$

Première étape : réduction aux quasigéodésiques continues.— Soit $f : I \to X$ une (λ, c)-quasigéodésique joignant x, y définie sur un intervalle d'extrémités dans $\mathbb{Z}$, il existe une courbe $q : I \to X$, géodésique par morceaux, joignant x, y telle que $\ell(q) \leq (\lambda + c)\ell(I)$, $d_H(q, f) \leq \lambda + c$ et, pour tous $s, t \in I$,

$$\frac{1}{\lambda}|t - s| - 3(c + \lambda) \leq |q(t) - q(s)| \leq (\lambda + c)|t - s|\,.$$

On définit $q : I \to X$ en posant $q = f$ aux bornes et sur $I \cap \mathbb{Z}$. Entre deux valeurs consécutives x_j, x_{j+1}, on étend par des segments géodésiques. On a

$$|f(x_j) - f(x_{j+1})| \leq \lambda|x_j - x_{j+1}| + c \leq \lambda + c\,.$$

Prenons $s,t \in I$, $s < t$. S'ils sont dans le même intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, le contrôle obtenu ci-dessus montre

$$|q(s) - q(t)| \le |f(x_j) - f(x_{j+1})| \cdot |s-t| \le (\lambda + c)|s-t| \,.$$

Supposons donc $n < s \le n+1 \le k \le t < k+1$ pour des entiers n,k. On obtient

$$\begin{aligned} |q(s) - q(t)| &\le |q(s) - f(n+1)| + |f(k) - f(n+1)| + |f(k) - q(t)| \\ &\le (\lambda + c)\cdot(|(n+1) - s| + |k - (n+1)| + |t-k|) \le (\lambda+c)|s-t| \end{aligned}$$

donc q est $(\lambda+c)$-lipschitzienne et $d_H(f,q) \le \max\{d_H(f, f(\mathbb{Z})), d_H(q, f(\mathbb{Z}))\} \le (\lambda + c)$. Pour conclure cette étape, il suffit de supposer $|s-t| > 1$. Du coup,

$$|q(s) - q(t)| \ge |q(k+1) - q(n)| - 2(\lambda + c) \ge \frac{1}{\lambda}|t-s| - 3(\lambda + c)\,.$$

On suppose dorénavant, pour tous $s,t \in I$,

$$\frac{1}{\lambda}|t-s| - c \le |q(t) - q(s)| \le \lambda |t-s|\,.$$

Deuxième étape : le segment géodésique est proche. — Il existe une constante $H = H(\delta, \lambda, c)$ telle que, pour tout $w \in [x,y]$, on a $d(w,q) \le H$.

Etant données des constantes $r > 0$, λ, c, on note $f(r) = \sup\{d(w,q),\ w \in g\}$, où g est un segment de longueur au plus r et q est un chemin quasigéodésique comme ci-dessus ayant les mêmes extrémités x et y.

On utilise de manère itérative la finesse des triangles. On écrit $V_R(Z)$ pour désigner le R-voisinage d'un ensemble Z. On considère le point $m \in q$ qui coupe q en deux courbes de même longueur. On a donc $g \subset V_{4\delta}([x,m] \cup [m,y])$. On itère ce processus en coupant chaque fois des sous-courbes de q en parties de longueur égale. Après k itérations, on a donc $x_0 = x, \ldots, x_{2^k} = y \in q$ tels que $d(x_j, x_{j+1}) \le \lambda r/2^k$ et

$$g \subset \cup_{0 \le j < 2^k} V_{4\delta k}([x_j, x_{j+1}])\,.$$

Pour le premier indice k tel que $\lambda r/2^k \le 1$, on obtient $[x_j, x_{j+1}] \subset N_1(q)$ donc $g \subset V_{4k\delta+1}(q)$ soit $f(r) \le A \log^+ r + B$, avec $A = A(\delta, \lambda, c)$ et $B = B(\delta, \lambda, c)$.

Prenons $w \in g$ tel que $d(w,q) = D$ soit maximal. On peut trouver $x' \in [x,w]$ et $y' \in [y,w]$ à distance D de w. Pour chacun d'eux, on peut trouver $x'', y'' \in q$ tels que $|x' - x''|, |y' - y''| \le D\,(\le f(r))$. Du fait que $d(w,q) \ge D$, le corollaire 5.14 implique $d(w, [x'', y'']) \le 8\delta$. Or $|x'' - y''| \le |x'' - x'| + |x' - y'| + |y' - y''| \le 4D$, donc on trouve $d(w,q) \le 8\delta + f(4D) \le 8\delta + f(4f(r))$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $D \le f(r)$, on obtient $f(r) \le f(4f(r)) + 8\delta$. Le lemme 5.27 implique que f est bornée.

Troisième étape : le segment quasigéodésique est proche. — On prend $w = q(t) \in q$, qui découpe q en deux courbes q_x, q_y contenant comme autre extrémité x ou y. L'application $z \in g \mapsto d(z, q_x) - d(z, q_y)$ est continue et change de signe. Donc il existe $z \in g$ tel que

$d(z, q_x) = d(z, q_y) \leq H$. Soient $z_x = q(s_x) \in q_x$ et $z_y = q(s_y) \in q_y$ qui réalisent ces distances. On a $s_x \leq t \leq s_y$ par construction et

$$|s_x - t| \leq |s_x - s_y| \leq \lambda(|z_x - z_y| + c) \leq \lambda(2H + c)$$

donc $d(w, g) \leq d(w, z) \leq d(q(t), q(s_x)) + d(z_x, z) \leq \lambda^2(2H + c) + H$. ■

On a la caractérisation suivante de l'hyperbolicité.

THÉORÈME 5.28 (Masur & Schleimer). — *Soit X un espace métrique géodésique. On suppose qu'il existe $h \geq 0$ et une assignation d'un ensemble connexe $L(x, y)$ à chaque paire de points distincts vérifiant les propriétés suivantes.*

(1) On a $L(x, y) = L(y, x)$ pour tous $x, y \in X$.

(2) $L(x, y)$ est contenu dans le h-voisinage de $L(x, z) \cup L(z, y)$ pour tous x, y, z.

(3) Si $d(x, y) \leq 1$, alors diam $L(x, y) \leq h$.

Alors X est hyperbolique et il existe $H < \infty$ telle que $d_H(L(x, y), [x, y]) \leq H$ pour tous $x, y \in X$.

On présente l'argument de B. Bowditch [Bow3].

DÉMONSTRATION. La démonstration suit le même plan que celle du lemme de poursuite. Pour $x, y \in X$, on note $\mathcal{G}(x, y)$ l'ensemble des segments géodésiques joignant x, y. On montre dans un premier temps que $L(x, y)$ est dans un voisinage uniforme de $\gamma \in \mathcal{G}(x, y)$. On note

$$f(r) = \sup\{d(w, \gamma),\ \exists\, x, y \in X,\ d(x, y) \leq r,\ \gamma \in \mathcal{G}(x, y),\ w \in L(x, y)\}\,.$$

Première étape : $L(x, y)$ est proche de tout segment.— On paramètre $\gamma \in \mathcal{G}(x, y)$ de sorte que $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| d(x, y)$.

On utilise de manière itérative la finesse de nos L. On a donc $L(x, y) \subset V_h(L([x, \gamma(1/2)] \cup L(\gamma(1/2), y])$. On itère ce processus en coupant chaque fois les segments géodésiques en deux parties égales. Après k itérations, on a donc $x_0 = x, \ldots, x_{2^k} = y \in \gamma$ tels que $d(x_j, x_{j+1}) \leq r/2^k$ et

$$\gamma \subset \cup_{0 \leq j < 2^k} V_{hk}(L(x_j, x_{j+1}))\,.$$

Pour le premier indice k tel que $d(x, y)/2^k \leq 1$, on obtient $L(x_j, x_{j+1}) \subset V_h([x_j, x_{j+1}])$ donc $L(x, y) \subset V_{(k+1)h}(\gamma)$. Du coup $f(r) \leq h(\log_2 r + 2) \leq A \log^+ r + B$.

Deuxième étape : $L(x, y)$ est uniformément proche de tout segment.— On note $t = f(r) + 2h + 1$ et on choisit $w \in L(x, y)$. Notons

$$\begin{cases} \ell_0 = \max\{0, d(w, x) - t\} \\ \ell_1 = \max\{0, d(w, y) - t\} \end{cases}$$

On a $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y) \leq \ell_0 + \ell_1 + 2t$. Par conséquent, on peut découper γ en trois segments $\gamma = [x, x'] \cup [x', y'] \cup [y', y]$, que l'on écrit $\gamma = \gamma_x \cup \gamma' \cup \gamma_y$, de sorte que

$d(x, x') \leq \ell_0$, $d(y, y') \leq \ell_1$ et $d(y, y') \leq 2t$ avec $x = x'$ seulement si $\ell_0 = 0$ et $y = y'$ seulement si $\ell_1 = 0$.

Observons que $d(w, x) \leq d(w, \gamma_x) + d(x, x')$ donc $d(w, \gamma_x) \geq d(w, x) - \ell_0$. Du coup, si $x \neq x'$ alors $d(x, x') > 0$ et $\ell_0 = d(w, x) - t$ donc $d(w, \gamma_x) \geq t$. Or, on a $L(x, x') \subset V_{f(r)}(\gamma_x)$ donc $d(w, L(x, x')) \geq d(\gamma_x, w) - f(r) \geq t - f(r) \geq 2h + 1$. De même, si $y \neq y'$, alors $d(w, L(y, y')) \geq 2h + 1$.

Or $L(x, y) \subset V_{2h}(L(x, x') \cup L(x', y') \cup L(y', y))$ donc $w \in L_{2h}(L(x', y')) \subset V_{2h+f(2t)}(\gamma)$. Ceci implique $f(r) \leq f(2t) + 2h \leq f(2f(r) + 4h + 2) + 2h$. Avec la première étape et le lemme 5.27, on trouve que f est bornée par une constante H.

Troisième étape : conclusion.— On prend $w \in \gamma$, qui découpe γ en deux segments γ_x, γ_y contenant comme autre extrémité x ou y. L'application $z \in L(x, y) \mapsto d(z, \gamma_x) - d(z, \gamma_y)$ est continue et change de signe. Donc il existe $z \in L(x, y)$ tel que $d(z, \gamma_x) = d(z, \gamma_y) \leq H$. Soient $z_x, z_y \in \gamma_x, \gamma_y$ qui réalisent ces distances. On a $d(z, w) \leq d(z_x, z_y) + d(z_x, z) \leq 3H$ donc $\gamma \subset N_{3H}(L(x, y))$. Ceci implique que les triangles sont fins, donc que X est hyperbolique. ■

5.3. Bord d'un espace hyperbolique

Soit (X, w) un espace propre géodésique et δ-hyperbolique muni d'un point base $w \in X$. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on a, dans le cadre des espaces hyperboliques, l'analogue du modèle de la boule pour les espaces hyperboliques "standard" $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire une compactification naturelle de X.

Définition du bord.— Une suite (x_n) *tend vers l'infini* si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|x_j) = \infty$; on dit que $(x_n) \sim (y_n)$ si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|y_j) = \infty$. Le bord ensembliste ∂X de X est défini par $\{$suites qui tendent vers $\infty\}/\sim$.

On note $\mathcal{R}_0$ l'ensemble des plongements isométriques $r : (\mathbb{R}_+, 0) \to (X, w)$, $\mathcal{R}_b$ l'ensemble des applications $r : (\mathbb{R}_+, 0) \to (X, w)$ telles qu'il existe $s \in [0, \infty[$ telle que $r|_{[0,s]}$ est un plongement isométrique et $r(t) = r(s)$ pour tout $t > s$.

PROPOSITION 5.29. — *Soit X un espace géodésique, propre et hyperbolique. L'espace $\mathcal{R} = \mathcal{R}_b \cup \mathcal{R}_0$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est compact. De plus, pour tout $r \in \mathcal{R}$, $\lim_{t\to\infty} r(t)$ définit un point de $X \cup \partial X$, et l'application induite $\varphi : \mathcal{R} \to X \cup \partial X$ est surjective.*

DÉMONSTRATION. On vérifie d'abord que $\mathcal{R}$ est fermé. On considère une suite (r_n) qui tend vers r. On a trois cas à étudier.

— Si $r_n \in \mathcal{R}_0$ pour tout n, la convergence uniforme sur tout compact implique $r \in \mathcal{R}_0$.

Les autres cas correspondent à des suites de $\mathcal{R}_b$. On note $s_n \in [0, \infty[$ le point à partir duquel l'application est constante.

— Si (s_n) est bornée, alors on peut supposer que $s = \lim s_n$ existe, donc $\lim r_n(s_n) = r(s)$ par convergence uniforme autour de s, donc $r \in \mathcal{R}_b$.

— Si (s_n) est une suite de $\mathbb{R}$, qui tend vers l'infini, alors on montre que $r \in \mathcal{R}_0$.

La compacité provient maintenant du théorème d'Arzéla-Ascoli puisque X est propre et toutes les applications sont 1-lipschitziennes, donc uniformément équicontinues.

Si r est un rayon, alors on vérifie que toute suite $(r(t_n))_n$, avec (t_n) tendant vers l'infini, définit le même point à l'infini car pour tous t, t', on a $(r(t)|r(t'))_w = \min\{t, t'\}$, donc toute suite (t_n) tendant vers l'infini définit un point $(r(t_n))_n$ et deux telles suites sont équivalentes.

L'application $\varphi : \mathcal{R}_b \to X$ est surjective car X est géodésique. Soit $a \in \partial X$. Si (x_n) tend vers $a \in \partial X$, alors on considère une suite de transformations $r_n \in \mathcal{R}_b$ telles que $r_n(s_n) = x_n$. Par compacité, on peut supposer que $(r_n)_n$ est convergente sur les compacts vers un rayon r. Il suffit de montrer que r représente le point a. Fixons-nous t assez grand. Pour n assez grand, on aura $|r(t) - r_n(t)| \leq 1$, et donc

$$(x_n|r(t))_w \geq \min\{(x_n|r_n(t))_w, (r_n(t)|r(t))_w\} - \delta \geq t - 1 - \delta\,.$$

■

Produit de Gromov au bord.— Rappelons que, pour $a, b \in X \cup \partial X$, on définit

$$(a|b) = \inf_{x_i \to a, y_i \to b} \liminf_{i,j \to \infty} (x_i|y_j)$$

La définition proposée permet de prolonger l'inégalité quasi-ultramétrique

$$(x|z) \geq \min\{(x|y), (y|z)\} - \delta$$

pour tous $x, y, z \in X \cup \partial X$.

Un système de voisinages pour $a \in \partial X$ est donné par $\{b \in X \cup \partial X,\ (a|b) \geq R\}$.

PROPOSITION 5.30. — *Le bord d'un espace hyperbolique, géodésique et propre est compact. L'application précédente $\varphi : \mathcal{R} \to (X \cup \partial X)$ est continue et surjective.*

DÉMONSTRATION. La continuité sur $\mathcal{R}_b$ provient de la convergence uniforme sur les compacts. Prenons maintenant $r_0 \in \mathcal{R}_0$ et notons $a = \varphi(r_0) \in \partial X$. Soit $R > 0$ et considérons $V_R(a) = \{x,\ (x|a) \geq R\}$. On se fixe $W = \{r \in \mathcal{R},\ d_X(r(t), r_0(t)) \leq \delta,\ t \in [0, R + 5\delta]\}$, voisinage de r_0. Soit $r \in W$. Notons $\tau = R + 5\delta$ et s la borne supérieure des valeurs où r est isométrique. Observons que si $s \leq \tau$, alors

$$\delta \geq |r(\tau) - r_0(\tau)| \geq |r_0(\tau) - r_0(s)| - |r_0(s) - r(s)| \geq |\tau - s| - \delta$$

donc $|s - \tau| \leq 2\delta$.

Du coup

$$\begin{aligned}(a|\varphi(r)) &\geq \min\{(a|r_0(\tau)), (r_0(\tau)|r(\tau)), (r(\tau)|r(s))\} - 2\delta \\ &\geq \min\{\tau, \tau-\delta, s\} - 2\delta \\ &\geq \min\{\tau-\delta, \tau-2\delta\} - 2\delta \\ &\geq \tau - 4\delta \geq R\end{aligned}$$

donc $\varphi(W) \subset V_R(a)$ et φ est continue. Enfin, comme $X \cup \partial X$ est séparé, on en déduit, par la continuité de φ et la compacité de $\mathcal{R}$ (et $\mathcal{R}_0$) que $X \cup \partial X$ et ∂X sont compacts.■

EXERCICE 5.31. — *Deux (quasi-)rayons r_1 et r_2 sont asymptotes si $d_H(r_1, r_2) < \infty$. Cette notion définit une relation d'équivalence $\sim_0$ sur $\mathcal{R}_0$. Montrer que φ induit un homéomorphisme entre $\mathcal{R}_0/\sim_0$ et ∂X. Etendre cet homéomorphisme en un homéomorphisme entre $\mathcal{R}_b/\sim_b \cup \mathcal{R}_0/\sim_0$ et $X \cup \partial X$ où $\mathcal{R}_b/\sim_b$ est un quotient à déterminer.*

Métriques visuelles au bord.— On note $\rho_\varepsilon(a,b) = \exp -\varepsilon(a|b)$. On notera $\rho = \rho_1$. On a, pour $a, b, c \in \partial X$,

$$\rho_\varepsilon(a,c) \leq e^{\varepsilon\delta} \max\{\rho_\varepsilon(a,b), \rho_\varepsilon(b,c)\}\,.$$

DÉFINITION 5.32 (métrique visuelle). — *Une métrique d sur ∂X telle que $d(x,y) \asymp \rho_\varepsilon$ est une métrique visuelle issue de w.*

On déduit l'existence de métriques visuelles du lemme suivant.

LEMME 5.33. — Soit $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $q(x,y) = q(y,x)$ et $q(x,z) \leq K \max\{q(x,y), q(y,z)\}$ pour une constante $K > 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $q_\varepsilon = q^\varepsilon$.

Si $\varepsilon \leq \log\sqrt{2}/\log K$, alors, pour toute chaîne finie $x_0, \ldots, x_k$, on a

$$\sum q_\varepsilon(x_{j-1}, x_j) \geq K^{-2\varepsilon} q_\varepsilon(x_0, x_k)\,.$$

DÉMONSTRATION. Montrons par récurrence sur la longueur k, $k \geq 2$, d'une chaîne $x_0, \ldots, x_k$ que

$$q_\varepsilon(x_0, x_k) \leq K^{2\varepsilon} \sum_{j=0}^{k-1} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1})\,.$$

Si $k = 2$, alors

$$q_\varepsilon(x_0, x_2) \leq K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_1), q_\varepsilon(x_1, x_2)\} \leq K^{2\varepsilon}(q_\varepsilon(x_0, x_1) + q_\varepsilon(x_1, x_2))\,.$$

Supposons que l'assertion soit vraie pour toute chaîne de longueur k, et étudions une chaîne $x_0, \ldots, x_{k+1}$ de longueur $k+1$: on note $R = \sum q_\varepsilon(x_j, x_{j+1})$; soit p le plus grand indice telle que $\sum_{k=0}^{p-1} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1}) \leq R/2$. Du coup, on a aussi $\sum_{j=p+1}^{k} q_\varepsilon(x_j, x_{j+1}) \leq R/2$.

Il vient

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(x_0, x_{k+1}) &\le K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_p), q_\varepsilon(x_p, x_{k+1})\} \\ &\le K^\varepsilon \max\{q_\varepsilon(x_0, x_p), K^\varepsilon q_\varepsilon(x_p, x_{p+1}), K^\varepsilon q_\varepsilon(x_{p+1}, x_{k+1})\} \\ &\le K^\varepsilon \max\{K^{2\varepsilon} R/2, K^\varepsilon R, K^{2\varepsilon} R/2\}\,. \end{aligned}$$

Par suite, on a $q_\varepsilon(x_0, x_{k+1}) \le K^{2\varepsilon} R$ si $K^{2\varepsilon} \le 2$, et le lemme en découle. ■

Corollaire 5.34. — *Si $\varepsilon\delta \le \log\sqrt{2}$ alors il existe une métrique complète d_ε telle que*

$$e^{-2\delta\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y) \le d_\varepsilon(x,y) \le \rho_\varepsilon(x,y)\,.$$

Démonstration. D'après le lemme 5.33, il suffit d'avoir $e^{2\delta\varepsilon} \le 2$, soit $\varepsilon\delta \le \log\sqrt{2}$, pour avoir l'existence d'une métrique d_ε telle que

$$e^{-2\delta\varepsilon}\rho_\varepsilon(x,y) \le d_\varepsilon(x,y) \le \rho_\varepsilon(x,y)\,.$$

■

Exercice 5.35. — *Montrer que les distances visuelles définissent la même topologie que celle décrite en terme de produits de Gromov.*

Proposition 5.36. — *Soient $a, b \in \partial X$ deux points distincts. Il existe une géodésique qui les relie.*

Démonstration. Soient r_a, r_b deux rayons géodésiques qui définissent a et b. Par approximation par un arbre, on en déduit que leur réunion est une quasi-géodésique. Par suite, le théorème 5.25 montre l'existence d'une géodésique à distance bornée de ces rayons. ■

Théorème 5.37. — *Si $\phi : X \to Y$ est une (λ, c)-quasi-isométrie entre espaces géodésiques hyperboliques, alors Φ se prolonge en homéomorphisme et il existe $C = C(\lambda, c, \delta) > 0$ telle que, pour tout $a, b \in \partial X$, $w \in X$,*

$$\frac{1}{\lambda}(a|b)_w - C \le (\phi(a)|\phi(b))_{\phi(w)} \le \lambda(a|b)_w + C\,.$$

Démonstration. L'image d'un rayon par une quasi-isométrie est un quasirayon, à distance bornée d'un véritable rayon ; de plus deux rayons asymptotes s'envoient sur des quasirayons asymptotes. Donc ϕ s'étend en une transformation entre les bords. Par symétrie, on en déduit que $\phi : \partial X \to \partial Y$ est bijectif.

On a vu que $(x|y)_w$ représentait la distance de w à $[x, y]$. Si $a, b \in \partial X$, alors il existe une géodésique $[a, b]$ qui les relie d'après la proposition 5.36. On vérifie que $|d(w, [a, b]) - (a|b)_w| \le 4\delta$ dans ce cas aussi. Or

$$(1/\lambda)d(w, [a, b]) - c \le d(\phi(w), \phi([a, b])) \le \lambda d(w, [a, b]) + c\,,$$

d'où la conclusion à l'aide du lemme de poursuite. En passant aux métriques visuelles, on en déduit que l'extension à l'infini est un homéomorphisme. ∎

Fonctions de Busemann.— Soient $a \in \partial X$, $x, y \in X$ et $h : \mathbb{R}_+ \to X$ un rayon géodésique tel que $h(0) = y$ et $\lim_\infty h = a$. On définit $\beta_a(x, h) = \lim(|x - h(t)| - t)$, qui est bien définie par l'inégalité triangulaire, et

$$\beta_a(x, y) = \sup\{\beta_a(x, h),\ \text{avec } h \text{ comme ci-dessus}\}\,.$$

Tout rayon est une bonne approximation : si t est assez grand alors

$$|\beta_a(x, y) - (|x - h(t)| - t)| \leq 40\delta.$$

De plus, β_a est presque un cocycle :

$$\begin{cases} |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, x)| \leq 120\delta \\ \\ |\beta_a(x, y) + \beta_a(y, z) + \beta_a(z, x)| \leq 200\delta \\ \\ |\beta_a(x, y) - \beta_a(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'| + 400\delta \end{cases}$$

Pour une démonstration, se référer au lemme 8.1 et à la proposition 8.2 de [GdlH].

5.4. **Groupes d'isométries d'un espace hyperbolique**

Nous avons déjà vu que le groupe d'isométries d'un espace hyperbolique géodésique et propre est un groupe de convergence. Nous proposons une autre approche dans les deux exercices qui suivent.

EXERCICE 5.38. — *Soit G un groupe qui opère par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et soit $f : X \to Y$ une application continue surjective propre et G-équivariante. Montrer les assertions suivantes.*

- *G agit proprement (discontinûment) sur X si et seulement si G agit proprement (discontinûment) sur Y.*
- *L'action de G est cocompacte sur X si et seulement si l'action de G est cocompacte sur Y.*

EXERCICE 5.39. — *On suppose que X est géodésique, propre et δ-hyperbolique et on note $G = \mathrm{Isom}\, X$. On considère l'ensemble $Y \subset X \times \Theta(\partial X)$ des points $(a, \{x_1, x_2, x_3\})$ tels qu'il existe un triangle géodésique $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$ dont la distance de a à chaque côté est au plus une constante $D \geq 4\delta$.*

(1) Montrer que cet ensemble Y est non vide et fermé et que G opère sur Y.

(2) Notons $p : Y \to X$ et $q : Y \to \Theta(\partial X)$ les projections canoniques et on note $Z = p(Y)$. Montrer que les projections de Y sur $\Theta(\partial X)$ et Z sont continues, propres, surjectives et G-équivariantes.

(3) Montrer que l'action de G sur Y est propre et en déduire que c'est aussi le cas sur $\Theta(\partial X)$.

(4) Soit $H < G$ un sous-groupe. Montrer que si l'action de H sur X est cocompacte, alors on peut choisir D assez grand pour avoir $Z = X$. En déduire que l'action de H sur $\Theta(\partial X)$ est aussi cocompact.

PROPOSITION 5.40. — *Soit (Z, w) un espace hyperbolique géodésique et propre marqué et $(g_n)_n$ une suite d'isométries telle que $(g_n(w))_n$ tend vers un point $b \in \partial Z$ et $(g_n^{-1}(w))_n$ tend vers $a \in \partial Z$. Alors $(g_n)_n$ est un écroulement de base (a, b).*

DÉMONSTRATION. Comme $(g_n(w))_n$ est divergente, cette suite contient un écroulement. Comme $w \notin \partial Z$, on en déduit que tout écroulement est de base (a, b). ■

EXERCICE 5.41. — *Soit G un sous-groupe d'isométries d'un espace hyperbolique géodésique et propre Z, alors $\Lambda_G \subset \partial Z$.*

5.4.1. *Classification des isométries.* Si g est une isométrie, on note Λ_g l'ensemble limite du groupe engendré par g. On rappelle la classification obtenue à la proposition 4.2.

(1) elliptique si $\Lambda_g = \emptyset$;

(2) parabolique si Λ_g est un singleton ;

(3) loxodromique si Λ_g est une paire.

On exploite la géométrie hyperbolique pour préciser ses propriétés.

EXERCICE 5.42. — *Montrer qu'une isométrie est elliptique si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :*

(1) il existe une orbite bornée ;

(2) toutes les orbites sont bornées.

LEMME 5.43. — Pour toute isométrie g, la limite suivante existe et est indépendante du point $x \in X$.

$$\tau(g) = \lim_{n \to \pm\infty} \frac{d(x, g^n(x))}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{d(x, g^n(x))}{n} .$$

EXERCICE 5.44. — *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour une isométrie g :*

(1) g est une isométrie loxodromique ;

(2) pour tout $x \in X$, $\{g^n(x)\}_n$ est une quasigéodésique ;

(3) on a $\tau(g) > 0$.

PROPOSITION 5.45. — *Il existe une constante $C = C(\delta) \geq 0$ vérifiant la propriété suivante. Si G est un groupe parabolique opérant sur X et de point fixe $a \in \partial X$ alors, pour $x \in X$ et tout $g \in G$, on a $|\beta_a(x, gx)| \leq C$.*

EXERCICE 5.46. — *Soit $a \in \partial X$ et g une isométrie qui fixe le point a.*

(1) Montrer que

$$B(g) \stackrel{def.}{=} \lim \frac{1}{n}\beta_a(x, g^n x)$$

est bien définie, et ne dépend pas du point $x \in X$.

(2) Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$, $C = C(\delta)$, telle que, pour tout $x \in X$, on ait $|\beta_a(gx, x) - B(g)| \leq C$.

(3) Montrer que $B(g) \neq 0$ si et seulement si g est loxodromique.

DÉMONSTRATION DE LA PROP. 5.45. D'après l'exercice précédent, si g est parabolique, alors $B(g) = 0$, donc, pour tout $x \in X$, on a $|\beta_a(x, gx)| \leq C$, où C ne dépend que de la constante d'hyperbolicité de X. ■

5.4.2. *Groupes hyperboliques.* On présente maintenant la classe des groupes hyperboliques au sens de Gromov [Gro], avec quelques propriétés.

DÉFINITION 5.47 (groupe hyperbolique). — *Un groupe G est hyperbolique s'il opère géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique.*

Le lemme de Švarc-Milnor implique qu'un groupe hyperbolique est de type fini et, en général, un groupe de type fini G est hyperbolique si et seulement si n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G est hyperbolique.

PROPOSITION 5.48. — *Soit G un groupe hyperbolique opérant géométriquement sur un espace hyperbolique géodésique et propre Z. On a $\Lambda_G = \partial Z$.*

DÉMONSTRATION. Soient $w \in Z$ un point base et $a \in \partial Z$. Il existe une suite $(z_n)_n$ de Z qui tend vers a. Comme l'action est cocompacte sur Z, il existe $D > 0$ et une suite $(g_n)_n$ telle que $d_Z(g_n(w), z_n) \leq D$. Du coup,

$$(g_n(w)|z_n)_w \geq (1/2)(|g_n(w) - w| + |z_n - w| - D) \geq |g_n(w) - w| - D$$

donc $(g_n(w))_n$ tend vers a aussi. Du coup, on a convergence vers a. Ceci implique $\Lambda_G = \partial Z$. ■

Le lemme de Švarc-Milnor implique qu'il n'existe qu'une classe de quasi-isométrie d'espaces hyperboliques géodésiques et propres sur lesquels un groupe hyperbolique G peut opérer. Du coup, tous leurs bords sont homéomorphes d'après le théorème 5.37, et définissent le bord ∂G, bien défini à homéomorphisme près. L'action de G sur son bord est minimale, et on a $\Lambda_G \simeq \partial G$ quelle que soit l'action géométrique de G sur un espace géodésique et propre.

Soit Γ un graphe, et fixons-nous $n \geq 1$. Le *complexe de Rips* $P_n(\Gamma)$ est le complexe simplicial dont les sommets sont les sommets de Γ et, pour $k \geq 1$, le k-squelette est formé de $(k+1)$ sommets $\{g_0, \ldots, g_k\}$ tels que $d(g_j, g_i) \leq n$. C'est un complexe localement fini —donc de dimension finie— si Γ est uniformément localement fini.

THÉORÈME 5.49 (Rips). — *Si Γ est le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique G, alors, pour $n \geq 1$ assez grand, P_n est contractile et quasi-isométrique à G. Plus précisément, G opère sur $P_n(\Gamma)$ proprement discontinûment, fidèlement et avec quotient compact.*

DÉMONSTRATION. Voir [GdlH, théorème 3.1]. ■

On en déduit qu'un groupe hyperbolique

(1) est de présentation finie ;

(2) possède un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion.

EXERCICE 5.50. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique n'a que des éléments loxodromiques ou d'ordre fini.*

EXERCICE 5.51. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique a un bout a un bord connexe.*

EXERCICE 5.52. — *Montrer qu'un groupe hyperbolique ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Points coniques.— On dit qu'un point $x \in X$ est un *point conique* d'un groupe de convergence s'il existe un écroulement de (x, y) pour un certain point $y \in X$ tel que $(g_n(x))_n$ tende vers un point $y' \neq y$.

EXERCICE 5.53. — *Montrer que si G est hyperbolique alors tout point de son bord est conique.*

5.4.3. *Groupes relativement hyperboliques.* On présente ici une classe de groupes plus générales de celles des groupes hyperboliques qui capturent l'essence des réseaux non uniformes des groupes de Lie simple de rang 1 ; voir par exemple [Bow1, Bow2, Far, Hru].

Soit G un groupe de convergence discret de type fini opérant sur un compact métrisable X. Un sous-groupe $H < G$ est parabolique si Λ_H est un singleton. On appelle ce point un *point parabolique.* Dans ce cas, on a vu que H n'avait aucun élément loxodromique. Si le point parabolique est le point fixe d'un élément parabolique, alors on parle de *point fixe parabolique.* Le stabilisateur G_p d'un point parabolique p est forcément parabolique et ce sous-groupe est un sous-groupe parabolique maximal. On dit p est un point *parabolique borné* si p est un point fixe parabolique et si l'action de son stabilisateur G_p sur $\Lambda_G \setminus \{p\}$ est cocompact.

LEMME 5.54. — Un point parabolique n'est pas un point conique dans un groupe de convergence discret.

Démonstration. Supposons que a est un point conique et qu'il existe un écroulement (g_n) de base (a,b) tel que $(g_n(a))$ tendent vers $c \neq b$ avec a point fixe d'un sous-groupe parabolique H de G. Prenons $h \in H$. Posons $h_n = g_n \circ h \circ g_n^{-1}$.

Si $(h_n)_n$ est infinie, on peut supposer que (h_n) est un écroulement. Or $(g_n(a))$ tend vers un point $c \neq b$, donc $h_n(g_n(a)) = g_n(a) \to c$; de même, pour $z \neq a$, $g_n(z)$ tend vers b, donc $h_n(g_n(z)) = g_n(h(z))$ tend vers b car $h(z) \neq a$. On en déduit que h_n est loxodromique pour n assez grand par le lemme 4.5, ce qui contredit le fait que h est non-loxodromique.

Du coup, pour tout $h \in H$, la suite $(g_n \circ h \circ g_n^{-1})_n$ est finie. Comme G est dénombrable, quitte à extraire une sous-suite de (g_n) par un procédé diagonal, on peut supposer que, pour tout $h \in H$, il existe n_h et $\varphi(h)$ non loxodromique tels que $g_n \circ h \circ g_n^{-1} = \varphi(h)$ pour tout $n \neq n_h$. On en déduit que φ est injective et donc que $\varphi(H)$ est infini. De plus, pour tout $h \in H$, comme $(g_n(a))_n$ tend vers c, on en déduit que $\varphi(h)(c) = c$ et, de même, on montre que $\varphi(h)(b) = b$. Or $\varphi(H)$ étant infini, il contient un écroulement, forcément de base (b,c) ou (c,b), et donc $\varphi(H)$ devrait contenir un élément loxodromique... contradiction. ■

On donne quelques définitions.

Définition 5.55 (groupe géométriquement fini). — *Un groupe de convergence G est géométriquement fini si tout point de Λ_G est ou bien conique, ou bien parabolique borné.*

Définition 5.56 (groupe relativement hyperbolique). — *Soit G un sous-groupe discret d'isométries d'un espace géodésique propre et hyperbolique Z. On suppose qu'il existe un nombre fini de points fixes paraboliques bornés $\mathcal{P}$ à l'infini dont on note $\mathbb{P} = \{\mathrm{stab}\, p,\ p \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble de leurs stabilisateurs. On suppose enfin qu'il existe une collection d'horoboules deux à deux disjointes, G-invariante, centrées en chaque point de $G\mathcal{P}$, telle que l'action sur leur complémentaire est cocompacte. On dit alors que $(G,\mathbb{P})$ est relativement hyperbolique.*

Théorème 5.57 (Bowditch, Gerasimov, Tukia, Yaman). — *Soit G un groupe de convergence de type fini opérant sur un compact X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) L'action de G sur X est géométriquement fini.

(2) Le groupe G opère par isométrie sur un espace hyperbolique géodésique propre Z de sorte que son action sur $Z \cup \partial Z$ est géométriquement fini.

(3) Il existe une collection finie $\mathbb{P}$ de sous-groupes de G telle que $(G,\mathbb{P})$ est relativement hyperbolique.

(4) L'action diagonale de G sur $\Theta^2(\Lambda_G)$ est cocompacte.

Si l'une de ces conditions est satisfaite alors on peut s'arranger pour que les actions de G sur les bords d'espaces hyperboliques ∂Z et sur $\Lambda_G \subset X$ sont conjuguées. De plus toutes les points paraboliques sont fixes, et leur ensemble correspond à $G\mathcal{P}$.

Une démonstration découle d'une combinaison des articles [Bow2, Tuk, Yam, Ger1].

Remarque 5.58. — Le théorème précédent permet d'associer un bord à un groupe hyperbolique $(G, \mathbb{P})$ en considérant l'ensemble limite de l'action sur son bord. Ce bord s'appelle *le bord de Bowditch.*

Enfin, on cite le résultat suivant qui donne la meilleure réponse connue à la non-trivialité du bord de Floyd.

Théorème 5.59 (Gerasimov [Ger2]). — *Soit* $(G, \mathbb{P})$ *un groupe relativement hyperbolique. Il existe une jauge de Floyd de la forme* $f(r) = e^{-ar}$, $a > 0$, *dont le bord est non trivial. Plus précisément, il existe une application continue, surjective et équivariante* $\varphi : \partial_f G \to \partial_B(G, \mathbb{P})$.

5.5. **Groupes acylindriquement hyperboliques**

On présente une dernière extension de la notion de groupes hyperboliques. Ici, on se donne un espace hyperbolique géodésique Z, mais on ne suppose plus qu'il est propre. On dit que l'action est *acylindriquement hyperbolique* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une distance $R > 0$ et une borne N de sorte que, si $x, y \in Z$ et $d_Z(x, y) \geq R$, alors

$$\{g \in G,\ d_Z(g(x), x), d_Z(g(y), y) \leq \varepsilon\}$$

contient au plus N éléments. C'est un affaiblissement d'une forme de propre discontinuité uniforme.

On dit qu'un élément loxodromique g d'un groupe G opérant sur un espace hyperbolique géodésique Z est faiblement proprement discontinu (WPD) si, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in Z$, il existe $k \neq 0$ tel que l'ensemble

$$\{h \in G,\ d(x, h(x)) \leq \varepsilon,\ d(g^k(x), h(g^k(x))) \leq \varepsilon\}$$

est fini.

D. Osin a formalisé cette notion ainsi [Osi], étendant à ce cadre général des notions similaires plus particulières. Il montre qu'un groupe admet une action acylindriquement hyperbolique si et seulement si ce groupe admet une action sur un espace hyperbolique de sorte qu'au moins un de ses éléments est loxodromique et (WPD).

Il y a deux intérêts à cette notion. La première est qu'il existe de nombreux groupes qui admettent des actions acylindriques, comme les groupes modulaires de surfaces. La seconde est qu'un tel groupe G est SQ-universel : n'importe quel groupe dénombrable s'injecte dans un quotient approprié de G.

RÉFÉRENCES

[Bow1] B. H. Bowditch. Geometrical finiteness for hyperbolic groups. *J. Funct. Anal.* **113**(1993), 245–317.

[Bow2] Brian H. Bowditch. Relatively hyperbolic groups. *Internat. J. Algebra Comput.* **22**(2012), 1250016, 66.

[Bow3] Brian H. Bowditch. Uniform hyperbolicity of the curve graphs. *Pacific J. Math.* **269**(2014), 269–280.

[Far] B. Farb. Relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.* **8**(1998), 810–840.

[Ger1] Victor Gerasimov. Expansive convergence groups are relatively hyperbolic. *Geom. Funct. Anal.* **19**(2009), 137–169.

[Ger2] Victor Gerasimov. Floyd maps for relatively hyperbolic groups. *Geom. Funct. Anal.* **22**(2012), 1361–1399.

[GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Hru] G. Christopher Hruska. Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups. *Algebr. Geom. Topol.* **10**(2010), 1807–1856.

[Mar] Gregory A. Margulis. The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group. *Soviet Math. Dokl.* **11**(1970), 722–723.

[Osi] D. Osin. Acylindrically hyperbolic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**(2016), 851–888.

[Tuk] Pekka Tukia. Conical limit points and uniform convergence groups. *J. Reine Angew. Math.* **501**(1998), 71–98.

[Yam] Asli Yaman. A topological characterisation of relatively hyperbolic groups. *J. Reine Angew. Math.* **566**(2004), 41–89.