4. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES GROUPES DE CONVERGENCE

Ce chapitre est basé sur [Bow, CCMT, Tuk1, Tuk2]. On s'affranchit du cas où X est fini par le fait suivant.

FAIT 4.1 (X fini). — *Si G est un groupe qui admet une action de convergence sur un ensemble compact et discret X, alors G est fini et contient un sous-groupe normal d'indice fini H tel que $G/H \subset \mathfrak{S}_X$.*

DÉMONSTRATION. Un ensemble discret et compact est fini et les seules suites convergentes sont les suites constantes à partir d'un certain rang. Du coup, un groupe de convergence qui opère sur un ensemble discret n'a pas d'écroulement. Comme X est fini, le noyau H de l'action de G est d'indice fini, donc G est fini aussi. Enfin, par la propriété universelle, G/H est un sous-groupe de permutations de X. ■

4.1. Classification dynamique des éléments d'un groupe de convergence

Soit G un groupe de convergence. On classe ses éléments en trois types. Soit $g \in G$.

— On dit que g est *elliptique* est si $\{g^n\}_n$ est relativement compact.

— On dit que g est *parabolique* s'il n'est pas elliptique et g admet un unique point fixe.

— On dit que g est *loxodromique* s'il n'est pas elliptique et g admet deux points fixes.

On montre que tous les éléments d'un groupe de convergence sont dans un de ces cas.

PROPOSITION 4.2. — *Soit G un groupe de convergence engendré par un élément $g \in G$, signifiant que $G = \overline{\{g^n,\ n \in \mathbb{Z}\}}$, alors de trois choses l'une :*

(i) Le groupe G est compact. Si G est discret alors il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $g^k = \mathrm{Id}$ et $G = \{\mathrm{Id}, g, \dots, g^{k-1}\}$.

(ii) Le générateur g a deux points fixes a et b et, pour tous voisinages U de a et V de b, il existe n_0 tel que $g^n(X \setminus V) \subset U$ et $g^{-n}(X \setminus U) \subset V$ pour tout $n \geq n_0$; de plus, G est discret et $(X \setminus \mathrm{Fix}\, g)/G$ est compact.

(iii) Le générateur g a un seul point fixe a, et pour tous voisinages U, V de a, il existe n tel que $g^n(X \setminus U) \subset V$. De plus, tout écroulement de G est de base a. Si G est discret, alors on a convergence uniforme de (g^n) vers a sur les compacts de $X \setminus \{a\}$.

On commence par un lemme qui caractérisera les éléments loxodromiques.

LEMME 4.3. — Soit g un élément d'un groupe de convergence tel que $\overline{U} \subset g(U)$ pour un ouvert U de X tel que $g(U) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$.

(i) L'homéomorphisme g a deux points fixes a et b, $a \in U$ et $b \notin \overline{U}$ et on a convergence uniforme de $(g^n)_n$ sur les compacts de $X \setminus \{a\}$ vers b.

(ii) L'action de $< g >$ est cocompact sur $X \setminus \{a, b\}$.

Démonstration du lemme 4.3. Notons $L_a = \cap_{n\geq 0} g^{-n}(\overline{U})$ et $L_b = \cap_{n\geq 0} g^n(X \setminus U)$. Ce sont des compacts non vides, comme intersection décroissante de compacts non vides. Ils sont aussi disjoints car $L_a \subset g^{-1}(\overline{U}) \subset U$ et $L_b \subset X \setminus U$ et invariants par g et g^{-1}.

Notons $A = X \setminus (L_a \cup L_b)$ et prenons $z \in A$. Si $z \in \overline{U}$, il existe $n \geq 0$ tel que $z \in g^{-n+1}(\overline{U}) \setminus g^{-n}(\overline{U})$ donc $g^n(z) \in g(\overline{U}) \setminus \overline{U}$. De même, si $z \notin U$ alors il existe $n \geq 0$ tel que $z \in g^n(X \setminus U) \setminus g^{n+1}(X \setminus U) = g^{n+1}(U) \setminus g^n(U)$, impliquant $g^{-n}(z) \in g(U) \setminus U$. Donc tout point de A visite $g(\overline{U}) \setminus U$ et l'action de $< g >$ est cocompacte sur $X \setminus (L_a \cup L_b)$.

Le groupe engendré par g n'est pas relativement compact. Cela découle du fait qu'il existe $x \in g(U) \setminus \overline{U}$, donc $(g^n(x))_n$ tend vers L_b alors que $g^n(L_b) = L_b$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il en découle qu'aucune limite n'est injective. Donc (g^n) contient un écroulement, c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite (n_k) et deux points $a, b \in X$ tels que l'on ait convergence uniforme de (g^{n_k}) vers b sur les compacts disjoints de a. Comme L_a et L_b sont invariants, on a $a \in L_a$ et $b \in L_b$. Or on a $L_b = \cap g^{n_k}(X \setminus U) = \{b\}$ car $a \notin X \setminus U$. Donc b est fixé par g, idem pour a. Par définition de L_a et L_b, on a convergence uniforme de $(g^n)_{n\geq 0}$ vers $L_b = \{b\}$ sur les compacts de $X \setminus \{a\} = X \setminus L_a$. Ceci montre (i).

Comme pour tout $z \in X \setminus \{a, b\}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g^n(z) \in \overline{g(U)} \setminus U$ et comme $a \in U$, il suffit donc de vérifier que $\overline{g(U)}$ ne contient pas b. Ceci vient du fait que $b \in g^2(X \setminus U) \subset g(X \setminus \overline{U})$. ∎

Corollaire 4.4. — *Soit g un élément d'un groupe de convergence. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) g est loxodromique,

(2) il existe une itérée $k \geq 1$ et un ouvert U tel que $\overline{U} \subset g^k(U)$ et $g^k(U) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$,

(3) g admet deux points fixes et on a convergence uniforme de (g^n) vers un point fixe en dehors du second.

Démonstration. Supposons que g est loxodromique, de points fixes a et b. Prenons des voisinages U et V de a et b respectivement de fermetures disjointes. Comme $\{g^n\}_n$ n'est pas relativement compact, il contient un écroulement de base (a, b). En supposant a répulsif, il existe k tel que $g^k(X \setminus U) \subset V$. Du coup $\overline{U} \subset (X \setminus V) \subset g^k(U)$. En prenant V assez petit, on peut s'assurer d'avoir $g^k(U) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$.

Si $\overline{U} \subset g^k(U)$ et $g^k(U) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$ alors le lemme 4.3 affirme que g^k est loxodromique de points fixes des points a et b, donc $\{g^n\}$ n'est pas relativement compacte. De plus, en jouant sur $g^{nk}(g(x)) = g(g^{nk}(x))$ avec $x \in X \setminus \{a, g^{-1}(a), b, g(b)\}$, on obtient $g(b) = b$ et $g(a) = a$. Donc g admet deux points fixes.

Soit K un compact disjoint de a et notons $L = \cup_{0\leq j<k} g^j(K)$ qui est aussi un compact disjoint de a. Il existe n_0 tel que $g^{nk}(L) \subset V$ pour tout $n \geq n_0$ d'après le lemme 4.3. Du coup, pour tout $n \geq kn_0$, on aura $g^n(K) \subset V$ aussi, d'où la convergence uniforme.

∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.2. Supposons d'abord G compact et discret. Dans ce cas, G est fini, donc il existe $k \geq 1$ tel que $g^k = \mathrm{Id}$ et $G = \{\mathrm{Id}, g, \ldots, g^{k-1}\}$ puisque G est engendré par g. Ceci montre (i).

Supposons dorénavant G non compact. La suite $(g^n)_{n\geq 0}$ est infinie. Il existe donc une sous-suite (n_k) et deux points $a, b \in X$ tels que $(g^{n_k})_k$ tend vers b sur $X \setminus \{a\}$.

Puisque G est non compact et X est infini, on peut trouver $x \in X \setminus \{a, g^{-1}(a)\}$. On a $g^{n_k+1}(x) = g(g^{n_k}(x))$ qui tend vers $g(b)$; mais on a aussi $g^{n_k+1}(x) = g^{n_k}(g(x))$, donc, comme $g(x) \neq a$, $g^{n_k+1}(x)$ tend aussi vers b. Donc $g(b) = b$. De même pour a en passant à l'inverse. Remarquons que g ne peut avoir plus de points fixes que a et b, même s'ils sont confondus, car cela contredirait la propriété des écroulements.

Soient U et V deux voisinages ouverts de a et b respectivement. Il existe $k \geq 1$ tel que $g^k(X \setminus U) \subset V$.

Montrons le point (iii) en supposant $a = b$. Dans le cas discret, toute sous-suite de $(g^n)_n$ contient un écroulement de base a, donc on a bien convergence uniforme.

Si $a \neq b$, on peut supposer U et V de fermetures disjointes. Du coup, on a $\overline{U} \subset (X\setminus V) \subset g^k(U)$. Le corollaire 4.4 montre que g est loxodromique et $X \setminus \{a, b\}/G$ est cocompact. Prenons un ouvert V tel que $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset g(U)$. Comme, pour $n \geq 1$, on a $g^{nk}(U) \supset \overline{V}$, on en déduit que $< g^k >$ est discret et donc G aussi. ■

LEMME 4.5. — Soit G un groupe de convergence sur X. Si $(g_n)_n$ est un écroulement de base (a, b) avec $a \neq b$, alors g_n est loxodromique pour tout n assez grand.

DÉMONSTRATION. Soient U et V des voisinages disjoints de a et b respectivement. Si n est assez grand, alors on a $g_n(X \setminus U) \subset V$. Cela implique que $g_n(U) \supset X \setminus V \supset \overline{U}$. Donc le lemme 4.3 conclut l'argument. ■

EXERCICE 4.6. — *Soient K, L deux compacts disjoints de X et G un groupe de convergence. Montrer que l'ensemble E des $g \in G$ non loxodromiques tels que $g(K) \cap K \neq \emptyset$ et $g(L) \cap L \neq \emptyset$ est compact.*

LEMME 4.7. — Soit G un groupe de convergence discret.

(i) Deux éléments loxodromiques ont ou bien leurs points fixes disjoints ou bien confondus.

(ii) Un élément parabolique et un élément loxodromique n'ont pas de points fixes en commun. Par conséquent, ils ne peuvent pas commuter.

DÉMONSTRATION. (i) Soient h_1 et h_2 deux transformations loxodromiques de points fixes (b_j, a_j), $j = 1, 2$. On suppose que $a_1 = a_2 = a$ et $b_1 \neq b_2$. En vertu de la proposition 4.2, il existe un domaine fondamental compact K_j de h_j dans $X \setminus \{a_j, b_j\}$ pour $j = 1, 2$.

Pour n assez grand, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $g_n = h_2^{k_n} \circ h_1^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$. Soit $x_n \in K_1 \cap g_n^{-1}(K_2)$. Du coup, $\theta_n \overset{\text{def.}}{=} (x_n, a, h_1^{-n}(b_2))$ reste dans un compact de $\Theta(X)$ car $x_n \in K_1$

et $h_1^{-n}(b_2)$ tend vers b_1 puisque $b_2 \neq a$. Or $g_n(x_n) \in K_2$, $g_n(a) = a$ et $g_n(h_1^{-n}(b_2)) = b_2$, donc $g_n(\theta_n)$ reste aussi dans un compact de $\Theta(X)$. Du coup, comme G est discret, on en déduit que $g_n = g_m$ pour certains n et m distincts, donc $h_2^{k_n - k_m} = h_1^{m-n}$ est loxodromique et les points fixes de h_1 et h_2 coïncident.

(ii) Soient h loxodromique et p parabolique. On suppose que le point fixe a de p est aussi un point fixe de h. Notons b l'autre point fixe de h. On note $h' = p \circ h \circ p^{-1}$, qui est loxodromique de points fixes a et $b' = p(b) \neq b$ puisque p est parabolique. Ceci contredit le point précédent.

Si h et p permutent et a est le point fixe de p, alors $h(a) = h(p^n(a)) = p^n(h(a))$ tend vers a, donc $h(a) = a$.

∎

EXERCICE 4.8. — *Soit G un groupe de convergence abélien non compact. Montrer que l'ensemble des points fixes d'un élément $h \in G$ est G-invariant. Montrer aussi l'alternative suivante.*

(1) Ou bien il existe un unique point fixe p de G. Tous les éléments non elliptiques sont paraboliques.

(2) Ou bien il existe exactement deux points invariants $\{a, b\}$ et il existe une action proprement discontinue et cocompacte de $\mathbb{Z}$ sur $X \setminus \{a, b\}$ et sur G. Tous les éléments non elliptiques sont loxodromiques.

4.2. **Dynamique des groupes de convergence**

DÉFINITION 4.9 (Ensemble limite et ensemble ordinaire). — *Soit G un groupe de convergence opérant sur X. L'ensemble limite Λ_G est l'ensemble des points $x \in X$ qui font partie de la base d'un écroulement de G. L'ensemble ordinaire Ω_G est son complémentaire.*

FAIT 4.10. — *Soit $(g_n)_n$ un écroulement de base (a, b).*

(1) Si $h_b : X \to Y$ et $h_a : X \to Y$ sont des homéomorphismes, alors $(h_b \circ g_n \circ h_a^{-1})_n$ est un écroulement de base $(h_a(a), h_b(b))$.

(2) (g_n^{-1}) est un écroulement de base (b, a).

(3) Si $(h_n)_n$ est un écroulement de base (c, d) et si $b \neq c$, alors $(h_n g_n)_n$ un écroulement de base (a, d).

DÉMONSTRATION. Soit $K \subset (X \setminus \{h_a(a)\})$ un compact. Du coup, $h_a^{-1}(K)$ est un compact de $X \setminus \{a\}$ et $((g_n \circ h_a^{-1})|_K)_n$ tend uniformément vers a. Par suite, on a convergence uniforme de $(h_b \circ g_n \circ h_a^{-1})_n$ vers $h_b(b)$, impliquant le premier point.

Soient K un compact de X disjoint de b et U un voisinage ouvert de a dans X. Du coup, $V = X \setminus K$ est un voisinage de b et notons $L = X \setminus U$, compact disjoint de a. Pour n assez grand, $g_n(L)$ est inclus dans V donc $g_n^{-1}(K)$ est inclus dans $X \setminus L = U$.

De même, prenons un voisinage compact V de b disjoint de c. Soit K un compact de $X \setminus \{a\}$. Pour n assez grand, on aura $g_n(K) \subset V$ et $(h_n)_n$ tend vers d sur V. Par conséquent, $(h_n g_n)$ est un écroulement de base (a, d). ■

LEMME 4.11. — Soit G un groupe de convergence non compact opérant sur un compact X.

(1) Si G admet un point fixe p, alors tout écroulement contient p dans sa base et $p \in \Lambda_G$.

(2) Si G n'a pas de point fixe, alors, pour tous $x, y \in \Lambda_G$, il existe un écroulement de base (x, y).

DÉMONSTRATION. Supposons que p est un point fixe de G. Puisque G est non compact, il contient au moins un écroulement. Prenons-en un de base (x, y). On sait que tout point $z \in X$ tend vers y, à moins que $z = x$. Du coup, comme p est fixe, on a $p \in \{x, y\}$. Autrement dit, tout écroulement contient p dans sa base et $p \in \Lambda_G$.

Supposons maintenant G sans point fixe et considérons deux points $x, y \in \Lambda_G$. Prenons un écroulement (g_n) de (x, z) et un écroulement (h_n) de (w, y). Si $z = y$ ou $w = x$, alors on a fini. Supposons donc $z \neq y$ et $w \neq x$. Si $w = z$ alors on peut trouver $g \in G$ tel que $g(z) \neq w$, car G n'a pas de point fixe. Du coup, le fait 4.10 nous permet de supposer $w \neq z$ et de construire un écroulement de base (x, y). ■

COROLLAIRE 4.12. — *Soit G un groupe de convergence non compact opérant sur X. Soit $K \subset X$ un compact invariant non vide. Alors $\Lambda_G \neq \emptyset$ et on a les situations suivantes.*

(1) Si K est un singleton, alors cet élément est un point de fixe de G dans Λ_G.

(2) Si K a au moins deux points, alors $\Lambda_G \subset K$.

DÉMONSTRATION. Le lemme 4.11 implique que tout point fixe de G est dans Λ_G. Si K a au moins deux points et $x \in \Lambda_G$, alors il existe un écroulement qui tend vers x, donc au moins un des points de K tendra vers x, et, comme K est invariant et fermé, on obtient ainsi $x \in K$ puis $\Lambda_G \subset K$. ■

PROPOSITION 4.13. — *Soit G un groupe de convergence opérant sur un compact X. On a les propriétés suivantes.*

(1) L'ensemble ordinaire Ω_G est l'ouvert maximal de X qui soit G-invariant et sur lequel l'action de G est propre.

(2) L'ensemble limite d'un groupe de convergence est compact et G-invariant.

(3) S'il existe un élément non elliptique, alors l'ensemble des points fixes d'éléments non elliptiques forment un sous-ensemble dense de Λ_G.

(4) Pour tout $x \in X$ non fixe, $\overline{Gx}$ contient Λ_G. En particulier, si $x \in \Lambda_G$ n'est pas fixe alors son orbite est dense dans Λ_G.

(5) Soit U un ouvert de X intersectant Λ_G. De deux choses l'une,

(a) ou bien $GU = X$ et il existe $g_1, \ldots, g_n$ tel que $X = \cup g_j(U)$;

(b) ou bien $X \setminus GU$ est un point fixe de G.

(6) L'une de ces situations a lieu.

(a) G est compact et $\Lambda_G = \emptyset$.

(b) Λ_G a un ou deux points.

(c) Λ_G est parfait.

Démonstration. Le fait 4.10 montre que Λ_G est invariant. Il suffit de montrer que Λ_G est fermé pour montrer qu'il est compact. Prenons donc (a_n) une suite de Λ_G tendant vers $a \in X$. Le lemme 4.11 montre que l'on peut trouver $b \in \Lambda_G$ tel que (a_n, b) soit la base d'un écroulement pour tout $n \geq 0$. Prenons des bases de voisinages dénombrables $(U_k)_k$ et $(V_k)_k$ de a et b respectivement. Pour tout $k \geq 0$, U_k est le voisinage d'un point a_{n_k}, donc il existe $g_k \in G$ tel que $g_k(X \setminus U_k) \subset V_k$. Cela montre que (g_k) est un écroulement de base (a, b) et donc $a \in \Lambda_G$. Ceci montre (2). Par définition, Λ_G contient tous les points fixes des éléments non elliptiques, établissant une première partie de (3).

Prenons deux compacts non dégénérés K et L de Ω_G et notons $\Phi = \{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$. Montrons que Φ ne contient aucun écroulement. Soit $(g_n)_n$ un écroulement de base (x, y) avec $x, y \in \Lambda_G$. Comme $X \setminus L$ est un voisinage de y et $x \notin K$, on a $g_n(K) \subset (X \setminus L)$ pour n assez grand, montrant ainsi que (g_n) n'est pas dans Φ. Ceci implique la compacité de Φ, ainsi que le fait que l'action est propre sur Ω_G. Comme tout point de Λ_G appartient à une base d'un écroulement, l'action ne peut être propre en ces points, donc Ω_G est bien l'ouvert maximal de X sur lequel l'action est propre, montrant (1).

Soit $x \in X$ non fixe. Par construction, $\overline{Gx}$ est un compact invariant ayant au moins deux points, donc il contient Λ_G d'après le corollaire 4.12. S'il est fixé par un élément non elliptique, alors c'est le cas des points de son orbite, donc, ces points étant denses, on a la densité des points fixes non elliptiques, ceci termine (3) et montre aussi (4). Remarquons que si $x \in \Omega_G$, alors x n'est pas fixe, cf. lemme 4.11.

Passons à (6). Par définition de Λ_G, G est compact si et seulement si $\Lambda_G = \emptyset$, traitant le cas (6)(a). Supposons maintenant que Λ_G a au moins trois points. Soit $x \in \Lambda_G$, alors il existe un écroulement $(g_n)_n$ de base (y, x) et un point $z \in \Lambda_G \setminus \{x, y\}$. Du coup, $(g_n(z))_n$ est contenue dans Λ_G par son invariance et tend vers x. Ainsi, les points de Λ_G ne sont pas isolés. Donc Λ_G est parfait.

Soit U un ouvert de X tel que $U \cap \Lambda_G \neq \emptyset$. Notons $K = X \setminus GU$ qui est compact invariant ne contenant pas Λ_G. D'après le corollaire 4.12, ou bien K est vide, ou bien K est un singleton constitué d'un point fixe. Dans le premier cas, GU est un recouvrement ouvert d'un compact, donc contient un sous-recouvrement fini. Ceci montre (5). On aurait aussi argumenter comme suit. L'ensemble limite Λ_G étant parfait, $U \cap \Lambda_G$ est infini et contient la base (a, b) d'un écroulement (g_n) d'après le lemme 4.11 (puisque U contiendrait un point fixe s'il y en avait). Du coup, si V_a et V_b sont des voisinages dans U, on aura $g_n(X \setminus V_a) \subset V_b$ si n est assez grand. Donc $X = g_n(V_a) \cup V_b \subset g_n(U) \cup U$. ∎

On adapte la classification de Gromov [Gro, 3.1] aux actions de convergence, cf. [CCMT].

COROLLAIRE 4.14 (Classification dynamique). — *On a la classification dynamique suivante des actions de convergence :*

- *L'action est élémentaire si Λ_G est fini, c'est-à-dire dans l'un des cas suivants.*
  - *L'action est bornée si Λ_G est vide. Tout élément est elliptique.*
  - *L'action est horocyclique, ou parabolique, si Λ_G est un singleton et G contient un élément parabolique. Aucun élément n'est loxodromique.*
  - *L'action est elliptique si Λ_G est un singleton et si chaque élément est elliptique.*
  - *L'action est linéale si Λ_G a deux points. Aucun élément n'est parabolique.*
- *L'action est non-élémentaire si Λ_G est parfait, c'est-à-dire dans les cas suivants.*
  - *L'action est focale si G admet un unique point fixe et un élément loxodromique.*
  - *L'action est de type général sinon. Il existe un élément loxodromique.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.13, si Λ_G est fini, alors il ne contient au plus que deux points. S'il est vide, G est compact. S'il ne contient qu'un seul point, p, G est non compact et tout écroulement est de base (p, p). Donc aucun élément n'est loxodromique. Notons que si tous les éléments sont elliptiques, alors un écroulement dont la base serait composée de deux points distincts auraient des éléments loxodromiques en vertu du lemme 4.5. Donc une action elliptique a au plus un point limite. Si Λ_G est composé de deux points, alors tout élément qui fixe l'un de ces points doit fixer l'autre, donc ne peut être parabolique. Or tout élément non elliptique ne peut avoir de points fixes en dehors de Λ_G. Donc une action linéale n'a pas d'élément parabolique. Si Λ_G n'est pas fini, il est donc parfait et on peut construire un écroulement dont la base est composée de deux points distincts en vertu du lemme 4.11, assurant ainsi l'existence d'éléments loxodromiques d'après le lemme 4.5 —que G ait un point fixe ou non. ∎

Exemples.— On fournit des exemples des différents types d'actions. Le groupe $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ est un groupe de type général d'ensemble limite $\widehat{\mathbb{C}}$. Une action focale est fournie par le groupe des applications affines complexes sur $\widehat{\mathbb{C}}$. Pour une action parabolique, on se restreint aux translations. Une action linéale est donnée par le groupe engendré par $z \mapsto 2z$. Enfin, pour une action elliptique, on considère n'importe quel compactifié de Floyd d'un groupe infini de type fini dont tous ses éléments sont de torsion. L'existence d'un tel groupe a été établie par Golod et Shafarevich en 1964.

Précisons un peu l'énoncé précédent.

PROPOSITION 4.15. — *Soit G un groupe de convergence non compact opérant sur X.*

(1) Le groupe G admet au plus deux points fixes.

(2) L'ensemble limite de G est un singleton si, et seulement si l'action est parabolique ou elliptique.

(3) L'ensemble limite du groupe G admet exactement deux points si, et seulement si l'action est linéale. Dans ce cas, G contient un sous-groupe H d'indice au plus deux ayant deux points fixes et il existe $h \in H$ loxodromique tel que $G/(h)$ est compact.

(4) Si G est focal de point fixe p, alors G contient un semi-groupe libre. Tout point $x \in \Lambda_G \setminus \{p\}$ a une orbite dense, et, pour tout ouvert U contenant p, il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tel que

$$\Lambda_G \subset \cup_{1\le j\le n} g_j(U)\,.$$

(5) Si G est de type général, alors G contient un sous-groupe libre non abélien. De plus, l'action de G sur Λ_G est minimale (toutes les orbites sont denses) et, pour tout ouvert U intersectant Λ_G, il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que

$$\Lambda_G \subset \cup_{1\le j\le n} g_j(U)\,.$$

DÉMONSTRATION. Comme G est non compact, il ne peut y avoir plus de deux points fixes, montrant (1). Le corollaire 4.14 implique (2).

Si Λ_G a exactement deux points, alors G contient un sous-groupe H d'indice au plus deux qui fixe Λ_G ponctuellement. Du coup, H contient un élément loxodomique h d'après le lemme 4.5. De plus, l'action de h sur $X \setminus \Lambda_G$ est cocompact d'après le lemme 4.3. On note $K \subset X \setminus \Lambda_G$ un domaine fondamental compact et

$$\Phi = \{g \in G,\ g(K) \cap K \neq \emptyset\}\,.$$

Comme l'action est propre d'après la proposition 4.2, on en déduit que Φ est compact. Si $g \in G$ et $x \in K$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $h^n(gx) \in K$, du coup, $g = kh^{-n}$, avec $k \in \Phi$. Ceci implique que G est engendré par le compact $\{h\} \cup \Phi$.

Supposons maintenant que G est de type général. La proposition 4.13 montre que l'orbite de tout point est dense et que X peut être recouvert par un nombre fini de translatés de U. On construit deux éléments loxodromiques g, h de points fixes distincts a_g, b_g et a_h, b_h respectivement à l'aide des lemmes 4.11 et 4.5. On choisit des voisinages A^-, A^+, B^-, B^+, de fermetures deux à deux disjointes et suffisamment petits pour que leur réunion ne recouvre pas X. On peut supposer $g(X \setminus A^-) \subset A^+$ et $h(X \setminus B^-) \subset B^+$. Notons F le sous-groupe engendré par g et h. Si m est un mot réduit non vide en les lettres g et h, et si $x \in X \setminus (A^- \cup A^+ \cup B^- \cup B^+)$, alors l'élément du groupe F représenté par m enverra x dans $(A^- \cup A^+ \cup B^- \cup B^+)$, donc ne sera pas trivial. Donc F est libre.

Supposons enfin l'action de G focale de point fixe p. Comme Λ_G est parfait, on peut trouver deux éléments loxodromiques h_a et h_b de points fixes (p, a) et (p, b) d'après les lemmes 4.5 et 4.11. Notons U un voisinage de p, V_a et V_b des voisinages de a et b respectivement de fermetures disjointes. Quitte à itérer g_a et g_b, on peut supposer $g_a(X \setminus U) \subset V_a$ et $g_b(X \setminus U) \subset V_b$. Du coup, $X = g_a(U) \cup g_b(U)$. Notons F le semi-groupe engendré par g_a

et g_b. Un mot est donné sous la forme $m = g_b^{k_n} g_a^{\ell_n} \dots g_b^{k_1} g_a^{\ell_1}$ où $k_j = 0$ seulement si $j = n$ et $\ell_j = 0$ seulement si $j = 1$. Extraire le préfixe est écrire le mot sous la forme $g_c^{k_j} w$ où $c \in \{a, b\}$, $k_j \geq 1$ et w est le suffixe de m. Par récurrence sur le nombre de lettres de m, on montre que $m(x) \subset V_c$ pour $x \in X \setminus (U \cup V_a \cup V_b)$. Prenons deux mots et extrayons leurs préfixes pour les écrire sous la forme $g_c^k m$ et $g_d^\ell w$, avec $c, d \in \{a, b\}$ et $k, \ell \geq 1$. Si $c \neq d$, alors les images du point x sont dans des ouverts V_c et V_d différents, donc ces mots représentent des éléments de F différents. Si $c = d$, on se ramène au cas précédent en simplifiant à gauche par la plus petite puissance de k et ℓ. Du coup, F est un semi-groupe libre. D'après la proposition 4.13, l'orbite de points non fixes est dense. ■

Application à la compactification de Floyd.— Soient G un groupe de type fini, S un système de générateurs finis et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une jauge de Floyd. On remarque tout d'abord que G opère proprement discontinûment sur le graphe de Cayley Z induit par S. Du coup, G est discret dans Homéo$(\overline{Z}_f)$.

- L'ensemble limite de G est $\partial_f G$.
- Si G admet un point fixe, alors $\partial_f G$ est un singleton ou deux points : l'action est ou bien linéale ou bien parabolique ou bien elliptique.
- Il n'y a pas d'action focale. Si $\partial_f G$ a au moins trois points, alors il est parfait et G contient un sous-groupe libre à deux générateurs.

4.3. Mesures stationnaires et marches aléatoires

Ce paragraphe a pour but d'introduire les premiers résultats vers une théorie mesurable des actions de convergence. Donnons-nous donc un groupe de convergence discret G opérant sur un espace compact métrisable X.

Tout d'abord la notion de mesure de probabilité (et borélienne) invariante ne semble pas pertinente dans ce contexte. En effet, supposons que μ soit une telle mesure et prenons un point $x \in X$ de son support de sorte que $\mu(V) > 0$ pour tout voisinage V de x. Supposons en outre que l'orbite de x n'est pas finie (x n'est ni fixe par G ni par un sous-groupe d'indice deux). Si G n'est pas fini, alors il existe un écroulement $(g_n)_n$ de base (a, b), $a, b \in X \setminus \{x\}$. Du coup, on a convergence uniforme de tout voisinage compact V de x évitant a vers b. Si V est assez petit, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $g_n(V) \cap g_m(V) \neq \emptyset$ seulement si $n = m$. Du coup, par invariance, on aurait $\mu(g_n(V)) = \mu(V) > 0$ pour tout n et on aurait $\mu(X) \geq \sum \mu(g_n(V))$, somme divergente...

A la place, on s'intéresse à des mesures stationnaires, c'est-à-dire à des mesures invariantes en moyenne au sens suivant. Pour cela, on se fixe deux mesures de probabilité μ sur G et ν sur X. Par définition, le produit de convolution $\mu \star \nu$ est la loi image de $\mu \otimes \nu$ par cette action : pour toute fonction mesurable bornée h sur X, on a

$$\mu \star \nu(h) = \sum_{g \in G} \mu(g) \int_X h(g \cdot x) d\nu(x) .$$

Autrement dit,

$$\mu \star \nu = \int g_* \nu d\mu(g) = \sum_{g\in G} \nu(g^{-1}\cdot)\mu(g)\,.$$

On dit que ν est *stationnaire* si $\nu = \mu \star \nu$.

Théorème 4.16. — *Soit G un groupe de convergence discret muni d'une mesure de probabilité μ et opérant sur un espace compact métrisable X. Si l'action du semi-groupe* $\mathrm{sgr}(\mu)$ *engendré par* supp μ *n'est pas élémentaire, alors il existe une unique mesure stationnaire ν sur X. Cette mesure est ergodique (tout ensemble invariant est de mesure pleine ou nulle), sans atome et de support Λ_G.*

Nous montrerons un énoncé un peu plus précis en considérant la marche aléatoire sur G induite par μ.

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant. On note $\Omega = G^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ muni de la tribu borélienne produit $\mathcal{A}$ et de la probabilité $\mathbb{P} = \mu^{\otimes(\mathbb{N}\setminus\{0\})}$. La suite des projections $(X_n)_{n\geq 1}$ définit une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ.

On associe la marche droite $(Z_n)_{n\geq 0}$ partant de l'élément neutre e en posant $Z_0 = e$ et $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$. On a donc $Z_n(\omega) = \omega_1 \dots \omega_n$.

Pour chaque $n \geq 1$, la loi de Z_n est donnée par la puissance $n$ième du produit de convolution μ^n de μ.

Lemme 4.17. — Pour $m, n \geq 1$ et $x \in G$, on a

$$\mu^{m+n}(x) = \sum_{y\in G} \mu^m(y)\cdot \mu^n(y^{-1}x)\,.$$

Démonstration. Calculons la loi de Z_{m+n} ; soit $x \in G$,

$$\mathbb{P}[Z_{m+n} = x] = \sum_{y\in G} \mathbb{P}[Z_{m+n} = x; Z_m = y] = \sum_{y\in G} \mathbb{P}[Z_m^{-1} Z_{m+n} = y^{-1}x; Z_m = y]\,;$$

or, $Z_m^{-1} Z_{m+n} = X_{m+1} \dots X_{m+n}$ donc $Z_m^{-1} Z_{m+n}$ est indépendante de Z_m et de même loi que Z_n :

$$\mathbb{P}[Z_{m+n} = x] = \sum_{y\in G} \mathbb{P}[Z_m^{-1} Z_{m+n} = y^{-1}x]\cdot \mathbb{P}[Z_m = y] = \sum_{y\in G} \mu^n(y^{-1}x)\cdot \mu^m(y)\,.$$

■

On montre tout d'abord que la marche sort de tout compact de G presque sûrement.

Lemme 4.18. — Si le semi-groupe sgrμ est infini, alors la marche visite une infinité de sites.

Démonstration. Par σ-sous-additivité, il suffit de montrer que pour tout ensemble fini $F \subset G$, la probabilité que la marche soit confinée dans F est nulle. On se fixe donc F fini, et on peut supposer que l'élément neutre soit dans F.

Comme le semi-groupe engendré par supp μ est infini, pour tout $g \in F$, il existe $k_g \geq 1$ (minimal) tel que $\mu^{k_g}(g^{-1}F) < 1$. Notons $\lambda = \max\{\mu^{k_g}(g^{-1}F),\ g \in F\}$, de sorte que $0 \leq \lambda < 1$ et $k = \max\{k_g,\ g \in F\}$.

Notons A_n l'événement $Z_j \in F$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Pour $n \geq 1$, on écrit

$$\begin{aligned} A_{k(n+1)} &= \cup_{g\in F}(A_{k(n+1)} \cap \{Z_{kn} = g\}) \\ &= \cup_{g\in F}[(A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\}) \cap (Z_{kn}^{-1}Z_j \in g^{-1}F,\ kn+1 \leq j \leq k(n+1))] \,. \end{aligned}$$

Notons que, pour chaque $g \in F$, les événements $(A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\})$ et $(Z_{kn}^{-1}Z_j \in g^{-1}F,\ 1 \leq j \leq k\}$ sont indépendants et $Z_{kn}^{-1}Z_j$ suit la même loi que Z_{j-kn}. Du coup, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_{k(n+1)}] &= \sum_{g\in F} \mathbb{P}[A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\}]\mathbb{P}[Z_{kn}^{-1}Z_j \in g^{-1}F,\ kn+1 \leq j \leq k(n+1)] \\ &= \sum_{g\in F} \mathbb{P}[A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\}]\mathbb{P}[Z_j \in g^{-1}F,\ 1 \leq j \leq k] \\ &\leq \sum_{g\in F} \mathbb{P}[A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\}]\mathbb{P}[Z_{k_g} \in g^{-1}F] \\ &\leq \sum_{g\in F} \mathbb{P}[A_{kn} \cap \{Z_{kn} = g\}]\lambda \\ &\leq \lambda\mathbb{P}[A_{kn}] \,. \end{aligned}$$

Du coup, on obtient $\mathbb{P}[A_{kn}] \leq \lambda^n$, ce qui suffit pour conclure. ∎

L'existence d'une mesure stationnaire est standard et suit l'argument de Kakutani. Son unicité est plus élaborée. Nous reprenons les arguments de H. Furstenberg [Fur] dans notre situation qui utilise la notion de martingale. Nous rappelons ce dont nous avons besoin.

DÉFINITION 4.19 (Martingale, cas particulier). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et considérons* Ω^n *muni de la mesure produit pour chaque* $n \geq 1$. *Soit* $(M_n)_n$ *une suite de variables aléatoires intégrables, où* M_n *est définie sur* Ω^n.

On dit que (M_n) *est une martingale si, pour presque toute suite* (x_k) *et tout* $n \geq 1$, *on a*

$$\int M_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y)d\mathbb{P}(y) = M_n(x_1, \ldots, x_n) \,.$$

THÉORÈME 4.20 (Doob, cas particulier). — *Soit* $(M_n)_n$ *une martingale telle que* $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$. *Il existe une variable aléatoire* $M : \Omega^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\lim M_n(x_1, \ldots, x_n) = M(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

presque sûrement.

LEMME 4.21. — Soit μ une mesure de probabilité sur G et ν une mesure stationnaire sur X. Alors la limite des mesures $((Z_n)_*\nu)_n$ existe pour presque toute trajectoire et si on note ν_ω la limite pour la suite $\omega \in \Omega$, alors $\nu = \int \nu_\omega d\mathbb{P}(\omega)$.

DÉMONSTRATION. Soit φ une fonction continue sur X. On note, pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$,

$$w_n(\omega, \varphi) = \int \varphi(x) d(Z_n(\omega)_* \nu)(x) = \int \varphi(\omega_1 \ldots \omega_n(x)) d\nu(x)\,.$$

Alors $(w_n)_n$ est une martingale bornée. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int \varphi(\omega_1 \ldots \omega_n g(x)) d\nu(x) d\mu(g) &= \int [\varphi \circ (\omega_1 \ldots \omega_n)](g(x)) d\nu(x) d\mu(g) \\ &= \int [\varphi \circ (\omega_1 \ldots \omega_n)](x) d(\mu \star \nu)(x) \\ &= \int [\varphi \circ (\omega_1 \ldots \omega_n)](x) d\nu(x) = w_n(\omega, \varphi)\,. \end{aligned}$$

Donc le théorème des martingales implique la convergence de $(w_n(\omega, \varphi))_n$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Du coup, on peut poser

$$L_\omega(\varphi) = \lim \int_X \varphi d(Z_n)_* \nu$$

bien définie $\mathbb{P}$-presque sûrement.

En appliquant ce raisonnement à une famille dense et dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(X)$ de fonctions continues sur X, on obtient ainsi un sous-ensemble Ω_0 de Ω de mesure pleine sur lequel L_ω définit une forme linéaire continue pour chaque $\omega \in \Omega_0$. En effet, si $\omega \in \Omega_0$, $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors on peut trouver $\psi \in \mathcal{D}$ telle que $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon/3$ et on peut trouver $n \geq 0$ assez grand pour que $|w_p(\omega, \psi) - w_q(\omega, \psi)| \leq \varepsilon/3$ pour tous $p, q \geq n$; ceci implique la convergence de $(w_n(\omega, \varphi))_n$. La linéarité de L_ω suit de celle de ses approximations. Le théorème de Riesz nous représente L_ω en l'intégration contre une mesure ν_ω.

On remarque que, pour chaque n et toute fonction φ, on a, par stationnarité de ν,

$$\mathbb{E}[w_n(\omega, \varphi)] = \int \varphi(x) d(Z_n(\omega)_* \nu)(x) d\mathbb{P}(\omega) = \int \varphi(\omega_1 \ldots \omega_n(x)) d\mu^n d\nu(x) = \int \varphi(x) d\nu(x)\,.$$

Or $(w_n(\omega, \varphi))_n$ tend vers $\nu_\omega(\varphi)$ presque sûrement, suite dominée par $\|\varphi\|_\infty$, donc le théorème de convergence dominée nous permet de passer à la limite pour obtenir

$$\int \varphi d\nu = \int \left(\int \varphi d\nu_\omega \right) d\mathbb{P}\,.$$

■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.16. On établit d'abord l'existence d'une mesure stationnaire. Soit ν_0 une mesure de probabilité sur X et posons $\nu_n = \dfrac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \mu^k \star \nu_0$. Toute limite faible d'une sous-suite est stationnaire. En effet, supposons que $(\nu_{n_k})_k$ tend vers une mesure ν dont l'existence est assurée par le théorème de Banach-Alaoglu. Pour toute fonction continue φ sur X, on a

$$\lim \nu_{n_k+1}(\varphi) = \lim \frac{n_k}{n_k+1} \mu \star \nu_{n_k}(\varphi) = \mu \star \nu(\varphi)$$

et
$$\lim \nu_{n_k+1}(\varphi) = \lim \frac{n_k}{n_k+1}\nu_{n_k}(\varphi) + \frac{1}{n_k+1}\mu^{n_k+1} \star \nu_0(\varphi) = \nu(\varphi).$$

De la même manière qu'il n'existe pas de mesure invariante, on peut montrer qu'une mesure stationnaire est forcément supportée par l'ensemble limite de G. Observons aussi que toute mesure stationnaire sur X charge tout ouvert de l'ensemble limite de G car l'action de G est minimale.

Comme l'action de G est non-élémentaire, son ensemble limite est infini ; supposons que ν ait un atome, et considérons un point x de masse maximale. Comme ν est stationnaire, on a $\nu(x) = \sum_g \mu(g)\nu(g^{-1}(x))$ donc tous les points de l'orbite de x (dans $\operatorname{supp}\mu$) portent la même masse que x. Comme ν est une probabilité, l'orbite de x doit être finie, donc Λ_G aussi : contradiction.

Pour l'unicité, l'idée est d'identifier les mesures limites données par le lemme 4.21 afin de montrer que ν est complètement déterminée. En effet, d'après le lemme 4.18, on sait que $(Z_n)_n$ contient une infinité d'éléments distincts de G pour presque tout $\omega \in \Omega$. Du coup, (Z_n) contient presque sûrement un écroulement : il existe $a, b \in X$ et une sous-suite $(n_k)_k$ tels que $(Z_{n_k})_k$ converge uniformément sur les compacts de $X \setminus \{a\}$ vers b. Comme ν est diffuse, cela implique que $(Z_{n_k})_*\nu$ tend vers la masse de Dirac δ_b, donc $(Z_n)_*\nu$ aussi par le lemme 4.21. On en tire deux conclusions. D'abord, la marche (Z_n) tend vers $Z_\infty = b$ et ensuite, ces limites ne dépendent que de ω et non de ν. D'où l'unicité de la mesure stationnaire.

Si A est un ensemble invariant de mesure $\nu(A) > 0$, alors la restriction $\nu(A \cap \cdot)/\nu(A)$ de ν à A est aussi une mesure stationnaire. Par unicité, on en déduit $\nu(A) = 1$, d'où l'ergodicité.

■

RÉFÉRENCES

[Bow] Brian H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 23–54. de Gruyter, Berlin, 1999.

[CCMT] Pierre-Emmanuel Caprace, Yves Cornulier, Nicolas Monod and Romain Tessera. Amenable hyperbolic groups. *J. Eur. Math. Soc.* **17**(2015), no. 11, 2903–2947.

[Fur] Harry Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 193–229. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Tuk1] Pekka Tukia. Convergence groups and Gromov's metric hyperbolic spaces. *New Zealand J. Math.* **23**(1994), 157–187.

[Tuk2] Pekka Tukia. Erratum : "Convergence groups and Gromov's metric hyperbolic spaces" [New Zealand J. Math. **23** (1994), no. 2, 157–187 ; MR1313451 (96c :30042)]. *New Zealand J. Math.* **25**(1996), 105–106.

[Väi] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.