## 2. EXEMPLES

### 2.1. Groupe des homographies

On fait agir $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ par homographies *via* l'action

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Rappelons qu'une homographie est déterminée par l'image de trois points distincts et plus précisément, pour tout $\tau \in \Theta(\widehat{\mathbb{C}})$, $g \in G \mapsto g(\tau)$ réalise un homéomorphisme. Par ailleurs, l'application $(\tau, \sigma) \in \Theta(\widehat{\mathbb{C}}) \times \Theta(\widehat{\mathbb{C}}) \mapsto g \in G$ tel que $g(\tau) = \sigma$ est continue.

Fait 2.1. — *Le groupe des transformations de Möbius est un groupe de convergence uniforme.*

Démonstration. Si on se donne les antécédents $(\alpha, \beta, \gamma)$ de $(0, 1, \infty)$, alors l'homographie $h$ qui convient est

$$h(z) = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \times \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$$

pour des valeurs finies. On obtient les autres par passage à la limite. Du coup, si $(\alpha, \beta, \gamma)$ reste dans un compact $K$ de $\Theta(\widehat{\mathbb{C}})$, alors les homographies correspondantes restent aussi dans un compact ; notons $\mathcal{F}_K$ l'ensemble de ces homographies.

Prenons maintenant deux compacts $K$ et $L$ de triplets de points distincts. L'ensemble des homographies $h$ telles que $h(K) \cap L \neq \emptyset$ s'écrit

$$\{h_1^{-1} \circ h_2,\ (h_1, h_2) \in \mathcal{F}_L \times \mathcal{F}_K\}$$

qui est donc compact. On déduit de la proposition 1.8 que l'action est de convergence. Elle est uniforme puisque l'action est transitive sur les triplets de points. ■

Une attention particulière sera portée aux *groupes kleinéens*, c'est-à-dire aux sous-groupes discrets de $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{C})$. Rappelons qu'un tel groupe $G$ opère proprement discontinûment sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ et que l'on peut considérer le quotient $M_G = \mathbb{H}^3/G$, un orbifold de dimension 3.

### 2.2. Isométries d'un espace hyperbolique géodésique et propre

Les espaces et les groupes hyperboliques sont introduits par Gromov dans [Gro]. Dès lors, ils ont pris une importance considérable dans de nombreux sujets. De nombreuses notes ont été rédigées depuis, parmi elles [BH, A *et al.*, GdlH, CDP].

Soit $(X, d)$ un espace métrique géodésique propre (les boules fermées sont compactes).

DÉFINITION 2.2. — *Si $X, Y$ sont deux espaces métriques, une application $f : X \to Y$ est un plongement isométrique si pour tous $x, x' \in X$, $|f(x) - f(x')| = |x - x'|$ ; on dira que $f$ est une isométrie si $f$ est un plongement isométrique surjectif.*

*Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to X$ un plongement isométrique. On dit que $f$, ou $f(I)$, est une géodésique si $I = \mathbb{R}$, un rayon (géodésique) si $I = \mathbb{R}_+$ et un segment (géodésique) si $I$ est un intervalle compact.*

*Un segment géodésique d'extrémités $x$ et $y$ sera noté $[x, y]$, même s'il n'est pas unique.*

**Produit de Gromov.**— Soient $w, x, y \in X$. On note

$$(x|y)_w = (1/2)\{|x - w| + |y - w| - |x - y|\}\,.$$

Si $w' \in X$, alors $|(x|y)_{w'} - (x|y)_w| \le |w - w'|$. De plus, si $X$ est un arbre, il existe un unique $c \in [w, y] \cap [w, x] \cap [x, y]$ et $(x|y)_w = |w - c|$.

DÉFINITION 2.3. — *Un espace métrique est $\delta$-hyperbolique si pour tous $w, x, y, z$, on a*

$$(x|z)_w \ge \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta\,.$$

**Triangles.**— Un triangle $\Delta$ est la donnée de trois points $x, y, z$ et de trois segments géodésiques $[x, y], [x, z]$ et $[y, z]$.

A un triangle, on associe un tripode $T$ défini par trois extrémités $\bar{x}, \bar{y}$, et $\bar{z}$ et de centre $c$, tels que $|\bar{x} - c| = (y|z)_x$, $|\bar{y} - c| = (x|z)_y$ et $|\bar{z} - c| = (y|x)_z$. On constate que $|\bar{x} - \bar{y}| = |x - y|$, et de même pour les autres distances. Ainsi, il existe une application surjective $f_\Delta : \Delta \to T$ qui est une isométrie lorsqu'elle est restreinte à un segment. On appelle $f_\Delta^{-1}(c)$ le triple inscrit de $\Delta$.

On dit que $\Delta$ est un triangle $\delta$-fin si pour tous $u, v \in \Delta$, on a $|u - v| \le |f_\Delta(u) - f_\Delta(v)| + \delta$.

LEMME 2.4. — Si $X$ est $\delta$-hyperbolique, alors les triangles sont $4\delta$-fins et

$$(x|y)_w \le d(w, [x, y]) \le (x|y)_w + 4\delta\,.$$

DÉMONSTRATION. On considère d'abord $u, v \in \Delta$ tels que $\bar{u} = \bar{v}$. On suppose que $u \in [x, y]$ et $v \in [x, z]$. On a $(u|v)_x \ge \min\{(u|y)_x, (y|z)_x, (z|v)_x\} - 2\delta$. Or $(u|y)_x = (v|z)_x = |\bar{x} - \bar{u}|$ et $(y|z)_x \ge |\bar{x} - \bar{u}|$, donc $(u|v)_x \ge |\bar{x} - \bar{u}| - 2\delta$ et

$$|u - v| \le (|u - x| + |v - x|) - 2|\bar{x} - \bar{u}| + 4\delta = 4\delta\,.$$

Si $u, v$ sont quelconques, on peut supposer qu'il existe $u'$ sur la même arête que $u$ tel que $\bar{u'} = \bar{v}$. Par suite, $|u - v| \le |u - u'| + |u' - v| \le |\bar{u} - \bar{v}| + 4\delta$, donc les triangles sont $4\delta$-fins.

Soit $z \in [x, y]$. Alors $|x - w| \le |x - z| + |z - w|$ et $|y - w| \le |y - z| + |z - w|$. Donc $(x|y)_w \le |z - w| + (1/2)(|x - z| + |y - z| - |x - y|) = |z - w|$ car $|x - z| + |y - z| = |x - y|$. Du coup, $(x|y)_w \le d(w, [x, y])$.

L'autre inégalité découle de la finesse des triangles : soit $z \in [x,y] \cap f_\Delta^{-1}(\{c\})$, alors

$$(x|y)_w = |f_\Delta(z) - f_\Delta(w)| \geq |w-z| - 4\delta.$$

■

**Bord d'un espace hyperbolique.—** Soit $(X,w)$ un espace propre géodésique et $\delta$-hyperbolique. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'on a, dans le cadre des espaces hyperboliques, l'analogue du modèle de la boule pour les espaces hyperboliques “standard” $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire une compactification naturelle de $X$.

Définition 2.5 (Bord d'un espace hyperbolique). — *Une suite $(x_n)$ tend vers l'infini si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|x_j) = \infty$ ; on dit que $(x_n) \sim (y_n)$ si $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|y_j) = \infty$. On note*

$$\partial X \ = \ \{\textit{suites qui tendent vers } \infty\}/\sim\ .$$

*On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de $X$ tend vers un point $a \in \partial X$ si $(x_n)$ représente le point $a$.*

Nous allons maintenant définir une topologie.

**Produit de Gromov au bord.—** On plonge $X$ dans l'espace des suites $(x_n)$ modulo convergence, en disant qu'une suite $(x_n)$ représente $x$ si elle est convergente vers $x$. Pour $a,b \in X \cup \partial X$, on définit

$$(a|b) = \inf_{x_i\to a, y_i\to b} \liminf_{i,j\to\infty}(x_i|y_j)$$

Si $x_i \to a$ et $y_j \to b$ alors on a $(a|b) \leq \limsup(x_i|y_j) \leq (a|b) + 2\delta$. Soient $\varepsilon > 0$ et $(x'_k)$ et $(y'_\ell)$ des représentants tels que

$$\lim_{k,\ell\to\infty}(x'_k|y'_\ell) - (a|b) \leq \varepsilon\,;$$

il vient

$$(x'_k|y'_\ell) \geq \min\{(x'_k|x_i),(x_i|y_j),(y_j|y'_\ell)\} - 2\delta \geq (x_i|y_j) - 2\delta$$

dès que les indices sont assez grands puisque $(x_i) \sim (x'_k)$ et $(y_j) \sim (y'_\ell)$. Du coup,

$$\limsup_{i,j\to\infty}(x_i|y_j) \leq (a|b) + 2\delta + \varepsilon$$

et l'arbitraire de la précision $\varepsilon$ nous permet de conclure.

La définition proposée permet de prolonger l'inégalité quasi-ultramétrique

$$(x|z) \geq \min\{(x|y),(y|z)\} - \delta$$

pour tous $x,y,z \in X \cup \partial X$.

Un système de voisinages pour $a \in \partial X$ est donné par $\{b \in X \cup \partial X,\ (a|b) \geq R\}$. Cela confère une topologie sur $X \cup \partial X$ qui le rend compact (voir Chap. 7, § 2 de [GdlH]).

Proposition 2.6. — *L'action du groupe d'isométries $G$ d'un espace hyperbolique $X$ géodésique et propre s'étend en une action de convergence sur $X \cup \partial X$.*

DÉMONSTRATION. On montre d'abord qu'une isométrie $h : X \to X$ s'étend en homéomorphisme de $X \cup \partial X$. On part du fait que, pour tous $x, y \in X$, on a $(h(x)|h(y))_w = (x|y)_{h^{-1}(x)}$ pour en déduire $|(h(x)|h(y))_w - (x|y)_w| \le d_X(w, h(w))$. Ceci suffit puisque cela implique que les suites divergentes sont préservées par $h$, que les classes de $\sim$ aussi et enfin que l'extension est continue. L'argument avec $h^{-1}$ montre que l'extension est un homéomorphisme.

Soit $w \in X$ un point base et considérons une famille $\mathcal{F} \subset G$ non relativement compacte. Il existe donc une suite $(g_n)_n$ de $\mathcal{F}$ telle que $\{d_X(w, g_n(w))\}_n$ tende vers l'infini. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(g_n(w))_n$ tend vers un point $b$ et $(g_n^{-1}(w))_n$ tend vers un point $a$.

Prenons un compact de $X \cup \partial X$ disjoint de $b$. Il existe donc $M > 0$ tel que $(x|b)_w \le M$ pour tout $x \in K$. Soit $x \in K$ ; il vient $(g_n(x)|g_n(w))_w = (x|w)_{g_n^{-1}(w)}$. Or

$$M \ge (x|b)_w \ge \min\{(x|g_n^{-1}(w))_w, (g_n^{-1}(w)|b)_w\} - \delta \ge (x|g_n^{-1}(w)) - \delta$$

pour tout $n$ assez grand, indépendamment de $x \in K$. De plus, comme on a

$$|(x|w)_{g_n^{-1}(w)} + (x|g_n^{-1}(w))_w - d_X(w, g_n^{-1}(w))| \le 2\delta\,,$$

il vient

$$(g_n(x)|g_n(w))_w \ge d_X(w, g_n^{-1}(w)) - (M + 3\delta)$$

donc

$$(g_n(x)|a) \ge \min\{(g_n(x)|g_n(w)), (g_n(w)|a)\} - \delta \ge \min\{d_X(w, g_n^{-1}(w)), (g_n(w)|a)\} - (M+4\delta)$$

ce qui implique la convergence uniforme de $(g_n)$ sur $K$ vers $a$. ■

## 2.3. Groupes quasimöbius

Une application $f : X \to Y$ entre espaces métriques est $\eta$-quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux distincts, on a

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \cdot \frac{|f(b) - f(d)|}{|f(c) - f(d)|} \le \eta\left(\frac{|a-b|}{|a-c|} \cdot \frac{|c-d|}{|b-d|}\right).$$

On dit qu'un groupe d'homéomorphismes d'un espace métrique $X$ est uniformément quasimöbius s'il existe une fonction de distorsion $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que chaque élément est $\eta$-quasimöbius.

PROPOSITION 2.7. — *Un groupe uniformément quasimöbius d'un espace métrique compact est un groupe de convergence.*

On s'appuie sur le théorème d'équicontinuité suivant.

THÉORÈME 2.8 (Väisälä [Väi, théorème 1.2]). — *Soient $X, Y$ deux espaces bornés. Soient $\lambda > 0$ et $x_1, x_2, x_3 \in X$ trois points tels que $|x_i - x_j| \ge \operatorname{diam} X/\lambda$. Il existe un homéomorphisme*

$\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *tel que pour toute application* $\eta$*-quasimöbius* $f : X \to Y$ *telle que* $|f(x_i) - f(x_j)| \geq \operatorname{diam} Y/\lambda$*, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq \mu\left(\frac{|x-y|}{\operatorname{diam} X}\right) \cdot \operatorname{diam} Y\,.$$

Autrement dit, l'ensemble de ces applications est équicontinue.

Démonstration de la prop. 2.7. Le théorème 2.8 implique directement que l'action est propre sur $\Theta(X)$. ■

**Conjecture de Lichnerowicz.—-** Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte. On note $\mathrm{Conf}(M)$ le groupe des difféomorphismes conformes de $M$, c'est-à-dire les difféomorphismes $f : M \to M$ pour lesquels il existe une fonction $u = u_f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que, pour tout $x \in X$, tous $v, w \in T_xM$, on ait $g(T_xf(v), T_xf(w)) = e^{u(x)}g(v, w)$. La conjecture, maintenant établie par M. Obata et J. Lelong-Ferrand, prédisait que si $\mathrm{Conf}(M)$ n'est pas compact, alors $M$ est conformément équivalent à une sphère euclidienne [Fe1].

La première étape de la démonstration de J. Lelong-Ferrand consiste à montrer que $\mathrm{Conf}(M)$ est un groupe uniformément quasimöbius [Fe2, Fe3], donc de convergence, pour en déduire que $M$ est homéomorphe à une sphère.

## 2.4. Bord de Floyd

Soient $G$ un groupe de type fini, $S$ un système de générateurs et $Z$ le graphe de Cayley de $(G, S)$ : les sommets sont donnés par les éléments de $G$ et les arêtes sont de la forme $(g, gs)$, avec $s \in S \cup S^{-1}$. On munit $Z$ de la métrique $d = d_S$ de longueur telle que chaque arête est isométrique au segment $[0, 1]$. Une *jauge de Floyd* est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\lambda f(n) \leq f(n+1) \leq f(n)$ ;

(2) la série de terme général $(f(n))_n$ est sommable.

On définit une nouvelle distance sur $Z^{(0)}$ de la manière suivante. Si $a = (z, w)$ est une arête, on pose $\ell_f(a) = f(d(e, \{z, w\}))$. Pour toute courbe $\gamma$ de $Z$, paramétrée par longueur d'arc et qui envoie les points entiers sur des sommets de $Z$, on pose

$$\ell_f(\gamma) = \sum \ell_f(a_j)$$

où la somme est prise sur les arêtes de $\gamma$. Puis, on définit

$$d_f(z, w) = \inf \ell_f(\gamma)$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chemins reliant $z$ et $w$.

Lemme et définition 2.9 (Compactification et bord de Floyd). — *La complétion* $\overline{Z_f}$ *de* $(Z_f, d_f)$ *est compacte et s'appelle la compactification de Floyd. Le bord de Floyd est* $\partial_f Z = \overline{Z}_f \setminus Z$.

Si $S$ et $f$ sont fixés, on écrira plus simplement $\partial_f Z = \partial_f G$ lorsque le système de générateurs ne revêt pas d'information particulière.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $\overline{Z}_f$ est précompact pour conclure que cet espace est compact. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est sommable, il existe $k$ tel que $\sum_{n\geq k} f(n) \leq \varepsilon/2$. Du coup, on a

$$Z = B_S(0,k) \bigcup \left( \bigcup_{d(e,x)=k} B_f(x,\varepsilon) \right) .$$

Comme $B_S(0,k)$ est précompacte, on peut aussi recouvrir cette boule par un nombre fini de $d_f$-boules de rayon $\varepsilon$. ■

PROPOSITION 2.10 (A. Karlsson [Ka]). — *Le groupe $G$ opère sur $\overline{Z}_f$ et son action est de convergence.*

LEMME 2.11. — Le groupe opère par homéomorphismes sur $\overline{Z}_f$.

DÉMONSTRATION. On note que, pour chaque $z \in Z^{(0)}$ et chaque générateur $s \in S$, on a

$$|d(e,z) - d(e,sz)| = |d(e,z) - d(s^{-1},z)| \leq d(e,s^{-1}) \leq 1$$

donc, pour chaque arête $a$, on a $|d(e,sa) - d(e,a)| \leq 1$ donc $\lambda \ell_f(a) \leq \ell_f(sa) \leq \lambda^{-1}\ell_f(a)$. Il vient $\lambda d_f(z,w) \leq d_f(sz,sw) \leq \lambda^{-1} d_f(z,w)$. Du coup, tout générateur préserve les suites de Cauchy, impliquant que $G$ opère sur $\overline{Z}_f$ par homéomorphismes. ■

LEMME 2.12. — Il existe une fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ qui tend vers zéro à l'infini telle que, pour tous $z,w \in Z^{(0)}$ et toute géodésique (pour la métrique des mots) $\gamma$ joignant $z$ et $w$, on ait $d_f(z,w) \leq F(d(e,\gamma))$.

DÉMONSTRATION. Soit $m \in \gamma$ le point le plus proche de $e$ et notons $r = d(e,m)$. On écrit le sous-segment $[m,z] \subset \gamma$ sous la forme $\{z_0, \ldots z_n\}$ avec $z_0 = m$ et $z_n = z$ de sorte que $d(e,z_j) \geq \max\{d(m,e), d(z_j,m) - d(m,e)\}$ et $d(e,z_j) \geq \max\{r, j-r\}$. Du coup, on a, par monotonie de $f$,

$$\begin{aligned} d_f(z,m) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} f(d(e,\{z_j,z_{j+1}\})) \\ &\leq \sum_{j=0}^{2r-1} f(r) + \sum_{j=2r}^{n} f(j-r) \\ &\leq 2rf(r) + \sum_{j\geq r} f(j) \end{aligned}$$

avec la convention que les termes faisant intervenir des points d'indice plus grand que $n$ sont fixés à 0. En traitant de la même manière le sous-segment $[w,m]$, on obtient

$d_f(z,w) \le F(d(e,\gamma))$ avec

$$F(n) \stackrel{\text{def.}}{=} 4n(f(n)) + 2\sum_{k\ge n} f(k)\,.$$

Comme $f$ est décroissante et sommable, $f(n) = o(1/n)$, donc $F$ tend vers zéro à l'infini. En effet, on a par exemple

$$nf(2n) \le \sum_{k=n}^{2n-1} f(k) \le \sum_{k\ge n} f(k)$$

qui est le reste d'une série convergente. ■

Démonstration de la prop. 2.10. On sait déjà que $G$ opère sur la compactification de Floyd. Prenons une suite $(g_n)$ d'éléments distincts de $G$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(g_n)$ tend vers un point $a \in \partial_f G$ et $(g_n^{-1})_n$ tend vers un point $b \in \partial_f G$.

Soit $K \subset \overline{Z}_f \setminus \{b\}$ un compact et montrons que l'on a convergence uniforme de $(g_n|_K)_n$ vers $a$. Prenons $z \in K$, et observons

$$d_f(a, g_n z) \le d_f(a, g_n) + d_f(g_n, g_n z) \le d_f(a, g_n) + F(d(e,[g_n, g_n z])) \tag{2.1}$$

d'après le lemme 2.12.

On contrôle $d(e,[g_n, g_n z])$ en utilisant le produit scalaire de Gromov. Rappelons sa définition $(x|y) = (1/2)(d(e,x)+d(e,y)-d(x,y))$ ainsi que le fait $(x|y) \le d(e,[x,y])$ pour tout segment géodésique entre $x$ et $y$. On a

$$\begin{array}{rcl} d(e,[g_n,g_n z]) & \ge & (g_n|g_n z) \\ & \ge & (1/2)(d(g_n,e) + d(g_n z, e) - d(g_n z, g_n)) \\ & \ge & d(e,g_n) - (1/2)(d(g_n^{-1},e) - d(z,g_n^{-1}) + d(z,e)) \\ & \ge & d(e,g_n) - (z|g_n^{-1}) \\ & \ge & d(e,g_n) - d(e,[z,g_n^{-1}])\,. \end{array}$$

Il existe $\delta > 0$, valide pour tour $z \in K$, telle que $d_f(z,b) \ge 2\delta$, donc $d_f(z,g_n^{-1}) \ge 2\delta - d(b,g_n^{-1}) \ge \delta$ pour tout $n$ assez grand. Du coup, pour les mêmes indices, on obtient

$$\delta \le d_f(g_n^{-1}, z) \le F(d(e,[z,g_n^{-1}]))$$

par le lemme 2.12 et on en déduit $d(e,[z,g_n^{-1}]) \le \bar{F}(\delta)$, où on a posé $\bar{F}(x) = \max\{y \ge 0, F(y) \ge x\}$. Du coup, (2.1) devient

$$d_f(a,g_n z) \le d_f(a,g_n) + F(d(e,g_n) - \bar{F}(\delta))$$

pour tout $z \in K$. D'où la convergence uniforme. ■

## 3. QUESTIONS GÉNÉRALES

Un problème général est de déterminer les propriétés d'un groupe de convergence en fonction du compact sur lequel il agit, et, réciproquement, de déterminer les propriétés du compact en fonction de celles du groupe de convergence.

Nous verrons qu'un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique géodésique et propre opère sur son bord de manière uniformément quasimöbius sur son bord pour une famille de métriques naturelles avec la structure hyperbolique. Une telle action est toujours une action de convergence :

QUESTION 3.1. — *Quelles sont les réciproques qui tiennent ? Autrement dit, toute action de convergence est-elle conjuguée à une action uniformément quasimöbius ? Une action uniformément quasimöbius, provient-elle d'une action propre sur un espace hyperbolique géodésique propre ?*

QUESTION 3.2. — *Pour quels groupes de type fini peut-on définir un bord de Floyd non trivial ?*

D'après Gerasimov, la réponse est positive si $G$ est relativement hyperbolique.

QUESTION 3.3. — *Les groupes de convergence de $S^2$ sont-ils des groupes kleinéens ?*

## RÉFÉRENCES

[A *et al.*] Juan Alonso *et al.* Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short, accessible sur `http://www.latp.univ-mrs.fr/~hamish/MSRInotes2004.pdf`.

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CDP] Michel Coornaert, Thomas Delzant, and Athanatase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov.*, volume 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Lecture Notes in Mathematics.

[GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[Fe1] Jacqueline Lelong-Ferrand. Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz). *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in–8*deg *(2)* **39**(1971), 44.

[Fe2] Jacqueline Ferrand. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Math. Ann.* **304**(1996), 277–291.

[Fe3] Jacqueline Ferrand. Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds. *J. Anal. Math.* **69**(1996), 1–24.

[Gro] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[Ka] Anders Karlsson. Free subgroups of groups with nontrivial Floyd boundary. *Comm. Algebra* **31**(2003), 5361–5376.

[Väi] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.