## 1. INTRODUCTION

La notion de groupe de convergence est due à F. Gehring et G. Martin, qui voulaient mettre en avant les propriétés dynamiques des groupes kleinéens comme système dynamique conforme [GM]. On s'inspire aussi des traitements de [Bow, Tuk1, Tuk2].

Soient $X$ et $Y$ deux espaces compacts métrisables. On munit l'ensemble des homéomorphismes Homéo$(X, Y)$ de la topologie compacte-ouverte. Si $f : X \to Y$ est une application continue, une base de voisinages de $f$ pour la topologie compacte-couverte est donnée par

$$W_{K,U}(f) = \{g : X \to Y : g(K) \subset U\}$$

où $K \subset X$ est un compact de $X$ et $U$ un ouvert de $Y$ tels que $f(K) \subset U$.

EXERCICE 1.1. — *Soient $X, Y$ deux espaces métriques. Montrer que la topologie compacte-ouverte et la topologie de la convergence uniforme sur les compacts coïncident dans $\mathcal{C}(X, Y)$.*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'homéomorphismes de $X$ sur $Y$. La famille $\mathcal{F}$ a la *propriété de convergence* si tout sous-ensemble $\Phi \subset \mathcal{F}$ est ou bien relativement compact dans Homéo$(X, Y)$ ou contient un écroulement de base $(a, b)$, i.e., une suite $(h_n)_n$ d'applications deux à deux disjointes et deux points $b \in X$ et $a \in Y$ tels que la restriction de la suite $(h_n)_n$ à $X \setminus \{b\}$ tend vers $a$ uniformément sur les compacts. Si $\mathcal{F}$ est un groupe de transformations on parle alors de groupe de convergence.

Un *groupe topologique* $G$ est un groupe muni d'une topologie de sorte que $(x, y) \in G \times G \mapsto xy \in G$ et $x \in G \mapsto x^{-1} \in G$ sont continues.

EXERCICE 1.2. — *Soit $X$ un espace compact. Montrer que le groupe de ses homéomorphismes* Homéo$(X)$ *est un groupe topologique, lorsqu'il est muni de la topologie compacte-ouverte.*

Une action *continue* d'un groupe $G$ sur un espace $X$ est une action telle que $A : (g, x) \in G \times X \mapsto gx \in X$ est continue. Une action continue induit une représentation $\rho : G \to$ Homéo$(X)$ définie par $\rho(g)(x) = A(g, x)$. Si $\rho(G)$ est un groupe de convergence, alors on dit que $G$ admet une action de convergence sur $X$.

L'action est *propre* si l'application $G \times X \to X \times X$ définie par $(g, x) \mapsto (g(x), x)$ est propre, i.e., l'image réciproque de tout compact est compact.

On s'intéresse aux notions suivantes.

(1) Un groupe est *discret* s'il est muni de la topologie discrète.
(2) L'action est à *orbites discrètes* si l'orbite d'un point quelconque est un ensemble discret.
(3) L'action est *discrète* si $\rho(G)$ est un sous-groupe discret de Homéo$(X)$.
(4) L'action est *errante* si tout $x \in X$ admet un voisinage $V$ tel que

$$\{g \in G,\ g(V) \cap V \neq \emptyset\}$$

est fini.

(5) L'action est *proprement discontinue* si, pour tous compacts $K$ et $L$ de $X$,
$$\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$
est fini.

(6) L'action est *cocompacte* s'il existe un compact $K$ tel que $X = \cup_{g\in G} g(K)$.

EXERCICE 1.3. — *Soient $X$ un espace localement compact et $G$ un groupe topologique opérant sur $X$.*

*(1) Montrer qu'une action proprement discontinue est errante, une action errante a ses orbites discrètes et qu'une action à orbites discrètes est discrète. Les réciproques sont-elles vraies ?*

*(2) Toutes les actions d'un groupe discret sont-elles discrètes ? Une action discrète provient-elle toujours d'un groupe discret ?*

EXERCICE 1.4. — *Montrer que si l'action est errante, alors le stabilisateur de chaque point est fini.*

EXERCICE 1.5. — *Montrer qu'une action d'un groupe dénombrable sur un espace localement compact est proprement discontinue si et seulement si l'application*
$$\begin{aligned} G \times X &\to X \times X \\ (g, x) &\mapsto (g(x), x) \end{aligned}$$
*est propre, où $G$ est muni de la topologie discrète. Montrer alors que* $\ker \rho$ *est fini.*

EXERCICE 1.6. — *On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par*
$$g_n(x, y) = (2^n x, y/2^n)\,.$$

*(1) Montrer que cette action est errante.*

*(2) Montrer que le quotient n'est pas séparé.*

EXERCICE 1.7. — *Montrer que si un groupe $G$ opère proprement discontinûment sur un espace localement compact $X$ alors, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U$ de $x$ tel que* $\operatorname{stab} x = \{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$.

**Triplets de points.**— Etant donné un espace topologique (métrisable) $X$, on note $\Delta_3 \subset X^3$ l'ensemble des triplets ordonnés dont au moins deux termes sont identiques, $\Theta^0(X) = X^3 \setminus \Delta_3$ l'ensemble des triplets ordonnés distincts —non vide si $X$ contient au moins trois points. On considère aussi la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $\theta \sim \theta'$, $\theta$, $\theta' \in \Delta_3$, si $\theta$ et $\theta'$ ont leurs deux coordonnées communes identiques dans $X$. On écrit $\partial\Theta^0(X) = \Delta_3/\sim$ ; l'application $p : \Delta_3 \to X$ qui envoie un point de la diagonale sur le point qui a au moins deux occurrences induit naturellement un homéomorphisme de $\partial\Theta^0(X)$, muni de la topologie quotient, sur $X$.

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit sur $X^3$ par permutations sur les coordonnées et il préserve les classes de $\sim$. On définit alors

$$\Theta(X) = \Theta^0(X)/\mathfrak{S}_3 \quad \text{et} \quad \partial\Theta(X) = \partial\Theta^0(X)/\mathfrak{S}_3\,.$$

L'application $p$ induit à nouveau un homéomorphisme, cette fois entre $\partial\Theta(X)$ et $X$.

Proposition 1.8. — *Soit $G$ un groupe de transformations d'un espace compact métrisable $X$. L'action de $G$ est de convergence si et seulement si son action est propre sur l'ensemble $\Theta(X)$ des triplets de points distincts.*

Démonstration. Si $X$ est fini, alors le groupe de ses bijections est fini, donc $G$ aussi. Le lemme est donc trivialement vérifié (notons qu'il ne dit rien si $X$ a au plus deux points). Supposons dorénavant $X$ infini.

Supposons $G$ un groupe de convergence. Prenons deux compacts $K$ et $L$ de triplets de points distincts et notons $A = \{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}$. Si $A$ n'est pas relativement compact, il existe $(g_n)$ dans $A$, $a, b \in X$ tels que l'action de $(g_n)$ sur $X$ tend vers $a$ en dehors de $b$. Comme $L$ est compact, on peut trouver un voisinage $U$ de $a$ tel qu'au plus une seule coordonnée d'un point de $L$ se trouve dans $U$. De même, on peut trouver un voisinage $V$ de $b$ tel que, pour tout triplet $\tau \in K$, au moins deux de ses coordonnées sont en dehors de $V$. Du coup, sous l'action de $(g_n)$, ces deux points se retrouvent dans $U$ pour $n$ assez grand : contradiction.

Réciproquement, supposons l'action propre sur les triplets et prenons un sous-ensemble non relativement compact d'homéomorphismes $\mathcal{F}$. Soit $\theta = \{x_1, x_2, x_3\} \in \Theta(X)$ ; comme $\mathcal{F}$ n'est pas compact et l'action est propre, on en déduit que $\mathcal{F}\theta$ n'est pas compact, donc on peut trouver une suite $(g_n)_n$ de $\mathcal{F}$ telle que $g_n(\theta)$ sort de tout compact de $\Theta(X)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc trouver $a \in X$ et $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distincts tels que $g_n(x_i)$ et $g_n(x_j)$ tendent vers $a$. De même, la suite $(g_n^{-1})_n$ n'est pas relativement compacte donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver $b \in X$ et $k, \ell \in \{1, 2, 3\}$ distincts tels que $g_n^{-1}(x_k)$ et $g_n^{-1}(x_\ell)$ tendent vers $b$. Notons $A$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $(g_n(x))_n$ tend vers $a$ et $B$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $(g_n^{-1}(x))_n$ tend vers $b$.

Soient $y_1, y_2 \notin \{x_i, x_j\}$ et supposons que les deux suites $(g_n(y_m))_n$, $m = 1, 2$ aient le même point limite $a' \in X$. Montrons que $a' = a$. Prenons $a'' \in X$ différent de $a$ et $a'$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(g_n^{-1}(a''))_n$ ait pour limite un point $w$ ; on peut donc choisir des indices $p \in \{i, j\}$ et $q \in \{1, 2\}$ de sorte que $(x_p, y_q, w) \in \Theta(X)$. Du coup, $g_n(x_p, y_q, g_n^{-1}(a''))$ sort de tout compact de $\Theta(X)$, mais tend vers $(a, a', a'')$, impliquant ainsi $a = a'$. Ceci implique que $A$ a au moins trois points. De même pour $B$.

Montrons enfin la convergence uniforme de $(g_n)$ sur les compacts de $X \setminus \{b\}$ vers $a$ par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un compact $K$ disjoint de $b$ et une suite $(y_n)$ de $K$ dont l'image ne tend pas vers $a$. On peut donc supposer que $(y_n)$ tend vers $y \in K$ et $(g_n(y_n))$ tend vers $z \neq a$. En choisissant $x_A \in A \setminus \{b, y\}$ et $x_B \in B \setminus \{a, z\}$, la suite $\{x_A, y_n, g_n^{-1}(x_B)\}$ est compacte, car elle tend vers $(x_A, y, b)$, mais la suite image $\{g_n\{x_A, y_n, g_n^{-1}(x_B)\},\ n \geq 0\} = \{g_n(x_A), g_n(y_n), x_B\}_n$ aussi puisqu'elle tend vers $(a, z, x_B)$. Ceci contredit la non-compacité relative de la suite $(g_n)$, donc $(g_n)$ est un écroulement. ■

REMARQUE 1.9. — Si $G$ a la propriété de convergence, alors sa fermeture dans Homéo$(X)$ aussi. En effet, prenons deux compacts $K, L$ de $\Theta(X)$ et $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que le $\varepsilon$-voisinage de $L$ dans $\Theta(X)$ reste relativement compact. On a l'inclusion

$$\{g \in \overline{G}, g(K) \cap L \neq \emptyset\} \subset \overline{\{g \in G, g(K) \cap L_\varepsilon \neq \emptyset\}}\,.$$

Par conséquent, on peut toujours supposer que $G$ est un sous-groupe fermé de Homéo$(X)$.

La précédente proposition nous fournit un moyen pratique d'utiliser la propriété de convergence :

COROLLAIRE 1.10. — *Soit $G$ un groupe de convergence opérant sur un espace compact $X$. Etant donnés un triplet de points $\theta \in \Theta(X)$ et une famille $\mathcal{F} \subset G$, $\mathcal{F}\theta$ est relativement compact si et seulement si $\mathcal{F}$ l'est aussi. Dans le cas contraire, $\mathcal{F}$ contient un écroulement.*

Un groupe de convergence est *uniforme* si son action est cocompacte sur les triplets de points distincts.

## RÉFÉRENCES

[Bow] Brian H. Bowditch. Convergence groups and configuration spaces. In *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, pages 23–54. de Gruyter, Berlin, 1999.

[GM] Frederik W. Gehring and Gaven J. Martin. Discrete quasiconformal groups. I. *Proc. London Math. Soc. (3)* **55**(1987), 331–358.

[Tuk1] Pekka Tukia. Convergence groups and Gromov's metric hyperbolic spaces. *New Zealand J. Math.* **23**(1994), 157–187.

[Tuk2] Pekka Tukia. Erratum : "Convergence groups and Gromov's metric hyperbolic spaces" [New Zealand J. Math. **23** (1994), no. 2, 157–187 ; MR1313451 (96c :30042)]. *New Zealand J. Math.* **25**(1996), 105–106.