7. GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

L'objet de ce chapitre est de fournir quelques pistes qui justifient les allégations du paragraphe 5.2. Cela concerne en particulier le fait qu'un homéomorphisme quasiconforme est quasimöbius, ainsi que leurs propriétés analytiques. On propose de s'approcher de ce problème en utilisant la notion de module de familles de courbes.

Certaines propriétés sont valables dans les espaces métriques mesurés. Dans un espace métrique, on écrira la distance entre deux points x et y en notation polonaise $|x-y|$. Si $B=(x_B, r_B)$ est une boule et $\lambda>0$, alors λB désigne la boule concentrique $B(x_B, \lambda r_B)$ de rayon multiplié par λ.

Un espace métrique mesuré (X,μ) est dit Q-Ahlfors régulier si μ est une mesure de Radon, et si, pour tout $R\in[0,\operatorname{diam} X]$ et tout $x\in X$, on a $\mu(\overline{B(x,R)})\asymp R^Q$.

7.1. Modules de courbes

Un principe de L. Ahlfors et A. Beurling exprime que tout invariant conforme est une fonction du module d'une famille de courbes bien choisies. Nous en verrons plusieurs illustrations.

Courbes rectifiables.— On peut consulter [Väi1, Chap. 1] dans le contexte euclidien. Les arguments dans les espaces métriques sont des adaptations sans malice.

Une courbe γ dans (X,d) est une application continue d'un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ dans X. On peut, comme dans les espaces euclidiens, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma)=\sup\sum_{0\le j<n} d(\gamma(t_j),\gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0\le j\le n}$ de I telles que $[t_0,t_n]=I$. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable*. On définit alors la *fonction longueur*, croissante, $s_\gamma : I\to[0,\ell(\gamma)]$ par $s_\gamma(t)=\ell(\gamma|_{[a,t]})$. Pour tout sous-intervalle $[a,b]\subset I$, on a $\ell(\gamma|_{[a,b]})=s_\gamma(b)-s_\gamma(a)$.

Parmi les courbes rectifiables, on privilégie les paramétrages absolument continus pour lesquels le calcul différentiel est performant.

DÉFINITION 7.1. — *Soient $a<b$ deux réels (finis). On dit qu'une application $f:[a,b]\to X$ est absolument continue (AC) si, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $a\le a_1<b_1\le a_2<b_2<\ldots<b_n\le b$ tel que $\sum|b_i-a_i|<\delta$, on ait $\sum d(f(b_i),f(a_i))<\varepsilon$.*

On a la caractérisation fondamentale sur $\mathbb{R}$ suivante.

PROPOSITION 7.2. — *Une application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est absolument continue si et seulement si il existe $h\in L^1(a,b)$ telle que*

$$f(x)=f(a)+\int_a^x h(t)dt\,.$$

En ce cas, f est dérivable presque partout, et sa dérivée coïncide avec h. De plus, les formules de changement de variables et d'intégration par parties sont vraies pour les fonctions AC.

On en déduit, pour une courbe $\gamma : I \to X$ rectifiable, $\ell(\gamma) \geq \int_I s'_\gamma$ avec égalité si et seulement si γ est AC.

PROPOSITION 7.3. — *Soit $\gamma : I \to X$ rectifiable, alors il existe un chemin 1-lipschitzien $\gamma_s : [0, \ell(\gamma)] \to X$ tel que $\gamma = \gamma_s \circ s_\gamma$.*

Dans ce cas, on dit que γ est paramétrée par longueur d'arc $\gamma_s : [0, \ell(\gamma)] \to X$.

PROPOSITION 7.4. — *Soit $\gamma : I \to X$ une courbe rectifiable. On a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma_s(t+h), \gamma_s(t-h))}{2|h|} = 1 \ et \ \lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t-h))}{2|h|} = s'_\gamma(t)$$

presque partout sur leurs ensembles de définition.

Pour toute fonction borélienne $\rho : X \to [0, \infty]$, on définit

$$\int_\gamma \rho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s(t) dt.$$

DÉFINITION 7.5 (Module de familles de courbes). — *Soient (X, μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $p \geq 1$ un réel. On définit le p-*module *de Γ par*

$$\mathrm{mod}_p \Gamma = \inf \int_X \rho^p d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques *(dites admissibles) $\rho : X \to [0, \infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_\gamma \rho ds \geq 1$.*

Il suffit en général de se restreindre aux familles de courbes suivantes.

DÉFINITION 7.6 (Condensateurs et capacités). — *Si X est un espace métrique, un* condensateur *est défini par une paire de continua disjoints $\{E, F\}$. On note $\Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui joignent E et F. On définit la p-*capacité *du condensateur par*

$$\mathrm{cap}_p(E, F) = \mathrm{mod}_p(E, F) = \mathrm{mod}_p \Gamma(E, F)\,.$$

Donnons quelques propriétés élémentaires du module.

PROPOSITION 7.7. — *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{mod}_p(\emptyset) = 0$ *;*

(2) si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\mathrm{mod}_p \Gamma_1 \leq \mathrm{mod}_p \Gamma_2$ *;*

(3) si Γ_1 et Γ_2 sont deux familles de courbes telles que toute courbe γ_1 dans Γ_1 possède une sous-courbe $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors $\mathrm{mod}_p \Gamma_1 \leq \mathrm{mod}_p \Gamma_2$.

(4) Si $(\Gamma_n)_n$ est une suite de familles de courbes, alors $\mathrm{mod}_p(\cup \Gamma_n) \leq \sum \mathrm{mod}_p(\Gamma_n)$.

(5) *Si* Γ *n'a pas de courbes rectifiables et si chaque courbe est dans une boule fixée (de rayon bornée), alors* $\mathrm{mod}_p\Gamma = 0$.

Les modules mod_p définissent donc une famille de mesures extérieures sur les familles de courbes. D'après ci-dessus, le module d'une famille de courbes ne dépend que de ses courbes rectifiables, et si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est de module nul, alors $\mathrm{mod}_p\Gamma = \mathrm{mod}_p(\Gamma \setminus \Gamma_0)$.

On note Γ_{rect} la famille des courbes rectifiables de X. Il vient $\mathrm{mod}_p(\Gamma) = \mathrm{mod}_p(\Gamma \cap \Gamma_{rect})$.

PROPOSITION 7.8. — *On a* $\mathrm{mod}_p\Gamma = 0$ *si et seulement si il existe* $\rho \in L^p$ *telle que* $\int_\gamma \rho = \infty$ *pour toute courbe* $\gamma \in \Gamma$.

On dira qu'une propriété est vraie *pour p-presque toute courbe* si elle n'est pas vérifiée sur une famille de courbes de p-module nul.

LEMME 7.9 (Fuglede). — Soit Γ une famille de courbes. Si (ρ_n) est une suite de métriques admissibles qui converge dans L^p vers ρ, alors

$$\int_\gamma \rho \geq 1$$

pour p-presque toute courbe.

On motive cette notion de modules en montrant que c'est un invariant conforme :

PROPOSITION 7.10. — *Soit* $f : M \to M'$ *un difféomorphisme conforme entre deux variétés riemanniennes de dimension* $n > 1$. *Si* Γ *est une famille de courbes sur* M *et* $f(\Gamma)$ *désigne la famille* $\{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, *alors*

$$\mathrm{mod}_n\Gamma = \mathrm{mod}_n f(\Gamma)\,.$$

DÉMONSTRATION. Si σ est une métrique admissible pour $f(\Gamma)$, on définit

$$\rho = (\sigma \circ f) \cdot |Df|\,.$$

On obtient par changement de variables et du fait que le jacobien d'une transformation conforme est la puissance n-ième de la norme de sa dérivée :

$$\mathrm{mod}_n\Gamma \leq \int_M \rho^n = \int_{M'} \sigma^n$$

donc $\mathrm{mod}_n\Gamma \leq \mathrm{mod}_n f(\Gamma)$ et on conclut par symétrie. ∎

7.2. **Applications quasiconformes et variantes**

On peut consulter [Väi1, Hei, HK, Väi2]. On définit plusieurs classes d'homéomorphismes basées sur un assouplissement des propriétés des transformations conformes.

Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un homéomorphisme.

Etant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on dit que f est η-*quasisymétrique* si pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq td(x, z)$, on ait $d(fx, fy) \leq \eta(t)d(fx, fz)$.

L'homéomorphisme f est *θ-quasimöbius* s'il existe un homéomorphisme $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux disjoints, on a

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|f(a) - f(c)|} \cdot \frac{|f(b) - f(d)|}{|f(c) - f(d)|} \leq \theta \left(\frac{|a - b|}{|a - c|} \cdot \frac{|c - d|}{|b - d|} \right) .$$

REMARQUE 7.11. — Soit X un espace métrique. Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points distincts de X, on définit

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \frac{\min\{|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|\}}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}} .$$

Alors

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1, x_2, x_3, x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1, x_2, x_3, x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$$

où

$$\eta_0(t) = t + \sqrt{t^2 + t} \quad \text{and} \quad \eta_1(t) = t(2 + t) .$$

Cela signifie que l'on peut remplacer le birapport par cette nouvelle notion quantitativement, *a priori* plus intuitive.

Notons

$$\begin{aligned} L_f(x, r) &= \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)| , \\ \ell_f(x, r) &= \inf_{|x-y| \geq r} |f(x) - f(y)| . \end{aligned}$$

On dit que f est *métriquement quasiconforme* s'il existe une constante H telle que, pour tout $x \in X$,

$$H_f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \limsup_{r \to 0} \frac{L_f(x, r)}{\ell_f(x, r)} \leq H .$$

L'homéomorphisme f est *géométriquement quasiconforme* s'il existe une constante K telle que, pour toute famille de courbes Γ de X,

$$\frac{1}{K} \text{mod}_n \Gamma \leq \text{mod}_n f(\Gamma) \leq K \text{mod}_n \Gamma .$$

L'homéomorphisme f est *analytiquement quasiconforme* si $f \in W^{1,n}$ et s'il existe une constante K_O telle que $|D_x f|^n \leq K_O |\det D_x f|$ pp., où $D_x f$ désigne la matrice jacobienne que l'on suppose inversible pp.

THÉORÈME 7.12. — *Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un homéomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *f est quasisymétrique,*
(2) *f est quasimöbius,*
(3) *f est géométriquement quasiconforme,*
(4) *f est métriquement quasiconforme,*
(5) *f est analytiquement quasiconforme.*

Si l'une de ces propriétés est satisfaite, alors f est absolument continu et absolument continu sur n-presque toute courbe.

La remarque 7.11 permet de montrer que si f est η-quasisymétrique alors f est θ-quasimöbius, où θ ne dépend que de η. Réciproquement, un homéomorphisme θ-quasimöbius est localement η-quasisymétrique où η ne dépend que de θ, donc est métriquement $\eta(1)$-quasiconforme. En revanche, le contrôle global de η ne dépend pas que de θ, mais aussi de l'image de trois points distincts.

Le reste du chapitre vise à justifier les autres propriétés. On étudie ensuite les suites d'homéomorphismes quasiconformes et on montre une version du théorème de Liouville.

7.3. Absolue continuité sur presque toute courbe des homéomorphismes quasiconformes

On suit [BKR].

Espaces de Sobolev.— Nous allons présenter les espaces de Sobolev basés sur la notion de gradient supérieur selon N. Shanmugalingam [Sha].

DÉFINITION 7.13. — *Soient $U \subset X$ un ouvert et $f : U \to Y$ une application mesurable entre espaces métriques. Un* gradient supérieur *g de f est une application mesurable $g : U \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute courbe rectifiable $\gamma : [0,1] \to U$, on ait*

$$d(f(\gamma(1)), f(\gamma(0)) \leq \int_\gamma g\,.$$

EXERCICE 7.14. — *Soient $\gamma : I \to X$ une courbe rectifiable et $f : X \to Y$ une application entre espaces métriques muni d'un gradient supérieur g. L'application $f\circ\gamma_s$ est absolument continue pour toute courbe γ telle que $g \circ \gamma_s$ est intégrable.*

On dit que $f|_\gamma$ *est absolument continue* si γ est rectifiable et $f \circ \gamma_s$ est absolument continue.

On parlera de gradient supérieur p-faible si $g \in L^p_{loc}(U)$ et si l'inégalité ci-dessus est valide pour p-presque toute courbe. Notons que si g est un gradient p-faible, alors la proposition 7.8 nous construit une suite de gradients supérieurs (g_n) qui converge dans L^p vers g par convergence dominée.

Exemple.—- La fonction

$$L_f(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \sup\{d(f(x), f(y)),\ d(x,y) \leq r\}$$

est borélienne. C'est un gradient supérieur si $f|_\gamma$ est AC pour toute courbe rectifiable γ. En effet, on suppose que γ est paramétrée par longueur d'arc. Si $f|_\gamma$ est absolument continue, alors l'application $s_{f\circ\gamma} : t \mapsto \ell(f \circ \gamma([0,t]))$ est AC, donc il existe h^γ mesurable telle que, pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,\ell(\gamma)]$, on ait

$$\ell(f \circ \gamma([a,b]))) = \int_a^b h^\gamma \, .$$

Or $d(f(\gamma(t-s)), f(\gamma(t+s))) \leq 2L_f(\gamma(t),s)$ donc le théorème de différentiation de Lebesgue et la proposition 7.4 impliquent $h^\gamma \leq L_f$ presque partout.

Remarque.— Si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $|\nabla u|$ est un gradient supérieur de u.

FAIT 7.15. — *Soient $U \subset X$ un ouvert, $u : U \to Y$ une application mesurable entre espaces métriques et g un gradient supérieur de u. Pour toute courbe $\gamma : I \to X$ paramétrée par longueur d'arc, on a $g \circ \gamma \geq s'_{u\circ\gamma}$ presque partout.*

DÉMONSTRATION. On suppose γ et $u \circ \gamma$ rectifiables. On a donc

$$\int_{t-h}^{t+h} g \circ \gamma \geq d(u \circ \gamma(t+h), u \circ \gamma(t-h))$$

donc la proposition 7.4 et le théorème de différentiation de Lebesgue impliquent $g\circ\gamma \geq s'_{u\circ\gamma}$ presque partout. ■

DÉFINITION 7.16 (Espaces de Sobolev). — *Soient (X, x_0, μ) un espace mesuré pointé et Y un espace métrique. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to Y$ qui admettent un gradient supérieur p-faible et telles que la fonction $u : x \mapsto d_Y(f(x), f(x_0))$ soit L^p-intégrable.*

THÉORÈME 7.17 (N. Shanmugalingam [Sha, Th. 4.5]). — *Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, alors la définition classique et celle ci-dessus des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ coïncident.*

EXERCICE 7.18. — *Montrer que si $f \in W^{1,p}_{loc}(X,Y)$, alors f est absolument continue sur p-presque toute courbe.*

THÉORÈME 7.19. — *Un homéomorphisme quasiconforme $f : X \to Y$ entre espaces métriques Q-Ahlfors-réguliers appartient à $W^{1,Q}_{loc}(X,Y)$.*

Nous commençons par un lemme de recouvrement et en tirons des conséquences.

LEMME 7.20. — Soit X un espace métrique précompact et $\mathcal{B}$ une collection de boules fermées $B(x, r(x))$ centrées en chaque point de X et de rayon uniformément borné. Alors il existe une famille finie ou dénombrable de boules $B_j = B(x_j, r_j) \in \mathcal{B}$ recouvrant X avec les propriétés suivantes.

(1) On a $B(x_i, r_i/3) \cap B(x_j, r_j/3) = \emptyset$ dès que $i \neq j$.

(2) Si $i \neq j$, alors ou bien $x_i \notin B_j$ et $B_j \setminus B_i \neq \emptyset$, ou bien $x_j \notin B_i$ et $B_i \setminus B_j \neq \emptyset$.

Lemme 7.21. — Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme où X et Y sont des espaces métriques avec X précompact. Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules vérifiant les conclusions du lemme 7.20 et tel que, pour chaque $B(x, r(x)) \in \mathcal{B}$, $L_f(x, r(x)) \leq H\ell_f(x, r(x))$. Alors

$$B\left(f(x), \frac{\operatorname{diam} f(B)}{60H^2}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\operatorname{diam} f(B')}{60H^2}\right) = \emptyset$$

pour toutes boules $B = B(x, r(x))$ et $B' = B(x', r(x'))$ dans $\mathcal{B}$ avec $x \neq x'$.

Démonstration. — On utilisera l'observation

$$B(f(x), (1/3)d(f(x), f(x'))) \cap B(f(x'), (1/3)d(f(x), f(x'))) = \emptyset$$

obtenue par l'inégalité triangulaire. On peut supposer $x' \notin B$. Puisque

$$B\left(f(x), \frac{\operatorname{diam} f(B)}{2H}\right) \subset f(B)$$

on a

$$|f(x') - f(x)| \geq \frac{\operatorname{diam} f(B)}{2H} \tag{8}$$

Si on a aussi

$$|f(x') - f(x)| > \frac{\operatorname{diam} f(B')}{3H},$$

alors on a

$$B\left(f(x), \frac{\operatorname{diam} f(B)}{10H}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\operatorname{diam} f(B')}{10H}\right) = \emptyset\,.$$

Sinon, prenons $z \in B \setminus B'$; il vient

$$|f(z) - f(x)| + |f(x) - f(x')| \geq |f(z) - f(x')| \geq \frac{\operatorname{diam} f(B')}{2H}$$

de sorte que

$$\operatorname{diam} f(B) + \frac{\operatorname{diam} f(B')}{3H} \geq \frac{\operatorname{diam} f(B')}{2H}\,.$$

Par conséquent

$$\operatorname{diam} f(B) \geq \frac{\operatorname{diam} f(B')}{6H}\,. \tag{9}$$

Par (8) et (9), on obtient

$$|f(x) - f(x')| \geq \frac{\operatorname{diam} f(B)}{2H} \geq \frac{\operatorname{diam} f(B')}{12H^2}\,.$$

Donc on a

$$B\left(f(x), \frac{\operatorname{diam} f(B)}{60H^2}\right) \cap B\left(f(x'), \frac{\operatorname{diam} f(B')}{60H^2}\right) = \emptyset\,.$$

□

Nous utiliserons dans la suite le lemme suivant dû à J. Strömberg et A. Torchinsky [ST] dans l'espace euclidien :

LEMME 7.22. — Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules dans un espace Ahlfors-régulier X. On associe à chaque boule B un réel $a_B > 0$. Soit $\lambda > 1$ et $p \geq 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{B \in \mathcal{B}} a_B \chi_{\lambda B} \right\|_{L^p} \leq C \cdot \left\| \sum_{B \in \mathcal{B}} a_B \chi_B \right\|_{L^p} .$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.19. Il suffit de trouver, dans chaque boule fermée de rayon finie $\widehat{B}$, une fonction borélienne $\rho \in L^Q(\widehat{B})$ telle que

$$|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leq \int_\gamma \rho$$

pour Q-presque toute courbe $\gamma : [0,1] \to \widehat{B}$.

Pour chaque $n \geq 1$, on note Γ_n la famille de courbes γ dans $\widehat{B}$ telles que $\operatorname{diam} \gamma > (1/n)$. On construit une suite de gradients supérieurs à l'échelle $1/n$, dont une limite produira un gradient supérieur qui sera L^Q-intégrable.

Si $x \in \widehat{B}$, on considère un rayon $r_x \in]0, 1/2n[$ tel que $L_f(x, r_x) \leq 2H\ell_f(x, r_x)$.

On applique le lemme 7.20 aux boules $\{B(x, r_x)\}$ et on désigne par $\mathcal{B} = \mathcal{B}(n)$ le nouveau recouvrement de $\widehat{B}$.

Posons

$$\rho_n = 2 \sum_{\mathcal{B}} \frac{L_f(x_i, r_i)}{r_i} \chi_{2B_i} .$$

Si $\gamma \in \Gamma_n$, alors

$$\int_\gamma \rho_n \geq 2 \sum_{B_i \cap \gamma \neq \emptyset} L_f(x_i, r_i) \geq \sum \operatorname{diam} f(B_i) \geq |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))|$$

puisque $\{f(B_i)\}$ recouvre $f(\gamma)$.

Le lemme 7.22 implique

$$\int \rho_n^Q \lesssim \int \sum \frac{L_f(x_i, r_i)^Q}{r_i^Q} \chi_{(1/3)B_i} .$$

Il vient de la régularité de X que

$$\int \rho_n^Q \lesssim \sum_{B \in \mathcal{B}} L_f(x_i, r_i)^Q .$$

Mais

$$L_f(x_i, r_i)^Q \asymp \mu_Y(B(f(x_i), \operatorname{diam} B(f(x_i), L_f(x_i, r_i)/120H^2)))$$

et puisque ces boules sont deux à deux disjointes, on peut conclure

$$\int \rho_n^Q \lesssim \mu_Y(f((1 + 1/n)\widehat{B})) < \infty .$$

Nous avons prouvé que, pour chaque $n \geq 1$, pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_n$, on a $\int_\gamma \rho_n \geq |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))|$. De plus, il existe une constante $M < \infty$ telle que $\|\rho_n\|_{L^Q} \leq M$ pour tout $n \geq 1$.

Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite (ρ_{n_k}) qui converge dans la topologie faible-* de L^Q vers une fonction borélienne ρ. On déduit du lemme de Mazur que l'on a convergence d'une combinaison convexe $(\widehat{\rho}_k)$ de (ρ_{n_k}) vers ρ dans L^Q.

Observons que si $\gamma \in \Gamma_n$, alors, pour tout k assez grand, $\int_\gamma \widehat{\rho}_k \geq |f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))|$.

Le lemme 7.9 implique

$$\int_\gamma \rho \geq |f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))|$$

pour Q-presque toute courbe de $\cup\Gamma_n$. ■

Si $f : (X, \mu) \to (Y, \nu)$ est un homéomorphisme entre espaces mesurés, on peut définir la mesure $f^*\nu$ sur X en posant $(f^*\nu)(A) = \nu(f(A))$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$ telles que $f^*\nu = \nu_a + \nu_s$.

DÉFINITION 7.23 (dérivée volumique). — *La dérivée volumique de f est*

$$\mu_f = \frac{d\nu_a}{d\mu}\,.$$

On a donc $\nu(f(A)) \geq \int_A \mu_f$ pour tout borélien $A \subset X$. Si μ est Ahlfors régulière (plus généralement une mesure doublante), alors le théorème de différentiation de Lebesgue implique que pour μ-presque tout $x \in X$ on a

$$\mu_f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(f(B(x,r)))}{\mu(B(x,r))}\,.$$

Si f est absolument continu *i.e.*, si $\nu_s = 0$, alors

$$\nu(f(A)) = \int_A \mu_f$$

pour tout borélien $A \subset X$, et on a la formule de changement de variables

$$\int_Y \varphi d\nu = \int_X (\varphi \circ f)\mu_f d\mu\,,$$

pour toute fonction borélienne $\varphi \in L^1(\nu)$.

COROLLAIRE 7.24. — *Sous les hypothèses du théorème 7.19 il existe une constante K telle que*

$$L_f(x)^Q \leq K\mu_f(x)$$

presque partout, où μ_f est la dérivée volumique de f.

DÉMONSTRATION. On remarque que

$$B(f(x), L_f(x,r)/(2H)) \subset B(f(x), \ell_f(x,r)) \subset f(B(x,r))\,.$$

Donc

$$L_f(x,r)^Q \lesssim \mu_Y(f(B(x,r)))$$

et par le théorème de différentiation de Lebesgue, on en déduit que $L_f^Q \lesssim \mu_f$ presque partout. ■

COROLLAIRE 7.25. — *Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est métriquement H-quasiconforme, $n \geq 2$, alors f est H^{n-1}-analytiquement quasiconforme et différentiable presque partout.*

DÉMONSTRATION. Le théorème de Stepanoff implique qu'une fonction $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est différentiable presque partout sur l'ensemble $\{L_f < \infty\}$. On déduit donc la différentiabilité presque partout de f du corollaire 7.24. La différentiabilité en un point x montre alors que $|D_x f|^n = H_f(x)^{n-1}|\det D_x f|$. ■

On définit l'application

$$g_f(x) = H \limsup_{r \to 0} \left(\frac{\mu_Y(f(B(x,r)))}{\mu_X(B(x,r))} \right)^{1/Q}$$

Cette application est clairement borélienne.

PROPOSITION 7.26. — *Si f est quasiconforme alors il existe une constante $C > 0$ telle que l'application Cg_f soit un gradient supérieur Q-faible associé à f.*

DÉMONSTRATION. Comme $f \in W^{1,Q}_{loc}(X, Y)$, f est AC sur Q-presque toute courbe. On peut donc supposer que $\gamma : [0, L] \to X$ est un chemin rectifiable paramétré par longueur d'arc et que $f|_\gamma$ est AC.

Pour tout $z \in \gamma$, il existe $r_z > 0$ arbitrairement petit tel que

$$f(B(z, r_z)) \subset B(f(z), L_f(z, r_z)) \subset B(f(z), 2H\ell_f(z, r_z)) \,.$$

Du coup, si $\gamma(t) = z$ alors

$$\operatorname{diam}(f \circ \gamma)(]t - r_z, t + r_z[) \leq 4H\ell_f(z, r_z)) \lesssim H\mu_Y(f(B(z, r_z)))^{1/Q} \,.$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour $j \in \mathbb{Z}$, on considère

$$E_j = \{t \in]0, L[,\ 2^{j-1} < g_f(\gamma(t)) \leq 2^j\}.$$

Pour $t \in E_j$, on peut trouver r_z assez petit pour que

$$\frac{\mu_Y(f(B(z, r_z)))^{1/Q}}{r_z} \lesssim g_f(z) \,,$$

donc $\operatorname{diam}(f \circ \gamma)(]t - r_z, t + r_z[) \lesssim 2^j r_z$.

Soit $U_j \supset E_j$ un ouvert tel que $\ell(U_j) \leq \ell(E_j) + \varepsilon/2^{2|j|}$. On peut s'arranger pour que $]t - r_z, t + r_z[\subset U_j$ pour chaque $t \in E_j$. On extrait un sous-recouvrement $(I_{i,j})$ par le lemme 7.20 ; on peut même s'arranger pour qu'un point x n'appartienne au plus qu'à deux tels intervalles. On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_i \operatorname{diam} f(\gamma(I_{i,j})) &\lesssim 2^j \sum_i r_{z_i} \\
&\lesssim 2^j \ell(U_j) \\
&\lesssim 2^j \ell(E_j) + \varepsilon/2^{|j|} \\
&\lesssim \int_{\gamma|E_j} g_f + \varepsilon/2^{|j|} \,.
\end{aligned}$$

Soit F les points pour lesquels $g_f \circ \gamma = 0$. On montre que $\ell(f(F)) = 0$ en utilisant les estimations ci-dessus. Soit G les points pour lesquels $g_f \circ \gamma$ est infini. Si $\ell(G) > 0$, alors on a bien l'inégalité recherchée. Sinon, $\ell(G) = 0$ et par continuité absolue, on a aussi $\ell(f(G)) = 0$.

Comme $(I_{i,j})_{i,j}$ recouvre $[0, L]$ a un ensemble nul près, il vient en rassemblant nos différentes estimées

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \lesssim \int_\gamma g_f.$$

■

PROPOSITION 7.27. — *Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme quasiconforme entre deux espaces métriques propres Q-Ahlfors réguliers, alors*

$$\mathrm{mod}_Q \Gamma \lesssim \mathrm{mod}_Q f(\Gamma).$$

DÉMONSTRATION. Si σ est admissible pour $f(\Gamma)$, on pose

$$\rho = \sigma \circ f \cdot g_f\,.$$

Comme f est absolument continue sur presque toute courbe, il suffit de considérer $\gamma \in \Gamma$ paramétrée par longueur d'arc telle que $f \circ \gamma$ est absolument continue. On rappelle que, comme g_f est un gradient supérieur, on a $g_f \circ \gamma \geq s'_{f\circ\gamma}$ presque partout. Notons $f \circ \gamma = \beta \circ s$ où β est un paramétrage par longueur d'arc et s la fonction longueur de $f \circ \gamma$. Du coup, on a

$$\int_\gamma \rho = \int_\gamma \sigma \circ f \cdot g_f = \int (\sigma \circ \beta \circ s)(g_f \circ \gamma) \geq \int (\sigma \circ \beta) \circ s \cdot s' = \int_{f\circ\gamma} \sigma \geq 1$$

car s est absolument continu. Par ailleurs,

$$\int \rho^Q = \int (\sigma \circ f)^Q g_f^Q \asymp \int (\sigma \circ f)^Q \mu_f \leq \int \sigma^Q.$$

■

COROLLAIRE 7.28. — *Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, est analytiquement K_O-quasiconforme, alors* $\mathrm{mod}_n \Gamma \leq K_O \mathrm{mod}_n f(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. Si ρ est admissible pour $f(\Gamma)$, on note $\sigma = (\rho \circ f)L_f$. Comme L_f est un gradient supérieur, on a $\int_\gamma \sigma \geq \int_{f(\gamma)} \rho \geq 1$. Par ailleurs, comme f est différentiable presque partout, on a $L_f = |Df|$ presque partout. Du coup

$$\int \sigma^n = \int (\rho \circ f)^n |Df|^n \leq K_O \int (\rho \circ f)^n Jac f \leq K_O \int \rho^n\,.$$

■

7.4. **Du local au global**

Dans cette partie, on exploite les propriétés géométriques des condensateurs qui découlent d'estimées sur leurs capacités. Le point de départ est le fait établi par C. Loewner que la capacité d'un condensateur non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est toujours non nulle [Loe]. Cette propriété implique ce que l'on appelle la condition de Loewner, cf. [HK] :

CONDITION DE LOEWNER. Il existe une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour chaque condensateur (E, F) de $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, on a

$$\mathrm{mod}_n(E, F) \geq \psi(\Delta(E, F))$$

où $\Delta(E, F)$ désigne la *distance relative* entre E et F définie par la formule

$$\Delta(E, F) = \frac{\mathrm{dist}(E, F)}{\min\{\mathrm{diam}\, E, \mathrm{diam}\, F\}}\,.$$

EXERCICE 7.29. — *Soit η un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe deux homéomorphismes $\eta_\pm$ de $\mathbb{R}_+$ tels que, pour tout homéomorphisme η-quasimöbius f et tout condensateur (E, F), on a*

$$\eta_-(\Delta(E, F)) \leq \Delta(f(E), f(F)) \leq \eta_+(\Delta(E, F))\,.$$

REMARQUE 7.30. — J. Heinonen et P. Koskela ont développé une théorie des homéomorphismes quasiconformes dans certains espaces métriques mesurés, qualifiés de Loewner, basés sur cette condition [HK].

PROPOSITION 7.31. — *Une transformation analytiquement quasiconforme ou une transformation géométriquement quasiconforme est quasimöbius quantitativement.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si le birapport de l'image de quatre points est petit, alors c'était le cas des quatre points —quantitativement. Supposons donc $[f(x_j)] \leq \varepsilon$. On peut construire un condensateur (E, F) avec E qui contient $\{x_1, x_2\}$ et F qui contient $\{x_3, x_4\}$ tel que $\Delta(f(E), f(F)) \geq M$ est grand. On a donc avec la condition de Loewner et la proposition 7.27 dans le premier cas, ou sa définition dans le second,

$$\psi(\Delta(E, F)) \leq \mathrm{mod}_n(E, F) \lesssim \mathrm{mod}_n(f(E), f(F)) \lesssim \log^{1-n}(1 + \Delta(f(E), f(F)))$$

ce qui montre que $\Delta(E, F)$ est grand, impliquant la petitesse de $[x_j]$, où la dernière estimée s'obtient en testant le module sur $\rho(x) = 1/d(e, x)$, $e \in f(E)$. ■

COROLLAIRE 7.32. — *Un homéomorphisme analytiquement quasiconforme est géométriquement quasiconforme.*

DÉMONSTRATION. En effet, sachant que f est quasimöbius, c'est aussi le cas de son inverse. En appliquant ce qui précède à l'inverse, on obtient l'autre inégalité par la proposition 7.27. ■

Absolue continuité.—- On montre enfin l'absolue continuité des homéomorphismes quasiconformes. On utilise implicitement la condition de Loewner.

Théorème 7.33. — *Soit $f : \mathbb{S}^n \to X$, $n \geq 2$, un homéomorphisme quasisymétrique où X est n-régulier, alors f est absolument continu.*

Démonstration. Soit E un ensemble borélien de $\mathbb{S}^n$. On recouvre E par des boules $(B_j)_j$ qui vérifient les conclusions du lemme 7.20.

Considérons le plus grand cube $Q = [-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}]^n$ inscrit dans la boule unité. Le module des courbes qui joignent deux opposés $\{-1/\sqrt{n}\}\times[-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}]^{n-1}$ et $\{1/\sqrt{n}\}\times[-1\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}]^{n-1}$ est strictement positif. En effet, considérons les segments

$$\gamma_x = [-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}] \times \{x\},\ x \in \{0\} \times [-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}]^{n-1}\,.$$

Si $\rho \in L^n(Q)$, alors le théorème de Fubini montre que pour presque tout $x \in \{0\} \times [-1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}]^{n-1}$, on a $\int_{\gamma_x} \rho < \infty$, donc le module est strictement positif d'après la proposition 7.8. Du coup, il existe, pour chaque j, une courbe $\gamma_j : [0,1] \to (1/3)B_j$ telle que $\operatorname{diam} \gamma_j \geq |\gamma_j(1) - \gamma_j(0)| \gtrsim \operatorname{diam} B_j$ et

$$\left(\int_{\gamma_j} g_f\right)^n \lesssim \int_{(1/3)B_j} \mu_f\,.$$

Pour établir ce fait, il suffit de tester le module avec $\rho = g_f$ qui est admissible par la proposition 7.26, en remarquant que $g_f = \mu_f^{1/n}$ presque partout par le théorème de différentiation de Lebesgue.

Par quasisymétrie, on a $|f(\gamma_j(1)) - f(\gamma_j(0))| \gtrsim \operatorname{diam} f(B_j)$. De plus, comme g_f est un gradient supérieur, on a aussi

$$|f(\gamma_j(1)) - f(\gamma_j(0))| \leq \int_{\gamma_j} g_f$$

de sorte que

$$\operatorname{diam} f(B_j)^n \lesssim \int_{(1/3)B_j} \mu_f\,.$$

En utilisant le fait que ces boules sont deux à deux disjointes, il vient

$$\mu_Y(f(E)) \leq \sum \operatorname{diam} f(B_j)^n \lesssim \sum \int_{(1/3)B_j} \mu_f \lesssim \int_{\cup B_j} \mu_f\,.$$

Donc $\mu_Y(f(E)) \lesssim \int_E \mu_f$. ■

Remarque 7.34. — Les transformations quasisymétriques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne sont pas absolument continues en général. En effet, si μ est doublante sur $\mathbb{R}$ et étrangère à la mesure de Lebesgue, alors $f(x) = \operatorname{sg}(x)\mu([0,x])$ est quasisymétrique et non absolument continue.

7.5. **Convergence des homéomorphismes quasiconformes**

L'énoncé le plus efficace concerne les homéomorphismes quasisymétriques.

THÉORÈME 7.35. — *Soient (X, x_0), (Y, y_0), deux espaces métriques propres marqués, $\mathcal{F}$ la famille d'applications quasiymétriques $f : X \to Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et telles qu'il existe un point $x_0' \neq x_0$ et une constante $M < \infty$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $(1/M) \leq |f(x_0) - f(x_0')| \leq M$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille compacte.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Quitte à échanger les rôles de x_0 et x_0', on peut supposer que $|x - x_0| \geq (1/2)|x_0 - x_0'|$. Soit $x' \in X$. On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &\leq \eta\left(\frac{|x - x'|}{|x - x_0|}\right)|f(x_0) - f(x)| \\
&\leq \eta\left(\frac{|x - x'|}{|x - x_0|}\right)\eta\left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x_0'|}\right)|f(x_0) - f(x_0')| \\
&\leq \eta\left(\frac{2|x - x'|}{|x_0' - x_0|}\right)\eta\left(\frac{|x - x_0|}{|x_0 - x_0'|}\right)M
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue sur toute boule bornée $B(x_0, R)$.

Par un procédé diagonale et le théorème d'Ascoli, on peut montrer que de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers une application continue f non constante. Il vient par passage à la limite que f est aussi η-quasisymétrique, et injective. ■

Si on considère une suite d'homéomorphismes uniformément quasiconformes, alors c'est une suite uniformément quasimöbius. Ou bien l'image de trois points distincts restent séparés sous la suite, ou bien la suite sera une suite de convergence à extraction d'une sous-suite près (propriété de convergence). Dans le premier cas, la suite est uniformément quasisymétrique, donc relativement compacte.

On montre un cas particulier du théorème 5.14.

THÉORÈME 7.36 (Tukia [Tuk, Lemma B2]). — *Soit $(\mathbb{S}^n \xrightarrow{f_k} \mathbb{S}^n)_k$ une suite d'homéomorphismes K-quasiconformes qui tend vers un homéomorphisme $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Si, pour $K' \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{k\to\infty} |\{x \in \mathbb{S}^n,\ K_{f_k}(x) \geq K' + \varepsilon\}| = 0$$

alors f est K'-quasiconforme. En particulier, f est K-quasiconforme.

DÉMONSTRATION. Une telle suite est uniformément quasimöbius. Comme elle est convergente vers un homéomorphisme, celui-ci est aussi quasimöbius, donc quasiconforme. Pour tout condensateur (E, F), et ρ_k admissible pour $f_k(E, F)$, on pose $\sigma_k(x) = (\rho_k \circ f(x))L_f(x)$. On a pour $\gamma \in \Gamma(E, F)$ rectifiable

$$\int_\gamma \sigma_k = \int_\gamma \rho_k(f)L_f ds \geq \int_{f(\gamma)} \rho_k \geq 1\,.$$

Notons $A_k = \{K_{f_k}(x) \geq K' + \varepsilon\}$ et $B_k = \mathbb{S}^n \setminus A_k$. On a

$$\begin{aligned}\int \sigma_k^n &\leq \int_{A_k} (\rho_k \circ f)^n |D_x f|^n + \int_{B_k} (\rho_k \circ f)^n |D_x f|^n \\ &\leq K \int_{A_k} (\rho_k \circ f)^n Jac(f_k) + (K' + \varepsilon) \int_{B_k} (\rho_k \circ f)^n Jac(f_k) \\ &\leq K \int_{f_k(A_k)} \rho_k^n + (K' + \varepsilon) \int_{f_k(B_k)} \rho_k^n\end{aligned}$$

On déduit des hypothèses que $\mathrm{mod}_n(f(E,F)) \leq K' \mathrm{mod}_n(E,F)$. Cela suffit à montrer que f est K'-quasiconforme. ∎

7.6. **Théorème de Liouville**

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liouville suivant P. Tukia et J. Väisälä [TV].

THÉORÈME 7.37 (de Liouville). — *Une transformation* 1*-quasiconforme de* $\mathbb{S}^n$*,* $n \geq 2$*, est une transformation de Möbius.*

On globalise le contexte.

PROPOSITION 7.38. — *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *des transformations* 1*-quasiconformes de* $\mathbb{R}^n$ *telles que* $f(0) = 0$ *et* $f(e_1) = e_1$ *est un groupe compact.*

DÉMONSTRATION. Sachant que l'inverse d'un homéomorphisme quasiconforme l'est aussi, on sait que $\mathcal{F}$ est stable par passage à l'inverse. De même pour la composition. Comme ce sont des transformations uniformément quasimöbius normalisées par trois points, $\mathcal{F}$ est compact et toute limite sera aussi 1-quasiconforme d'après le théorème 7.36. ∎

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Liouville :
DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.37. D'après le théorème 3.15, il suffit de montrer que ces applications préservent les sphères.

Notons $B = B(0,1)$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ le semi-groupe des transformations 1-quasiconformes g telles que $g(B) \supset B$. Pour tout homéomorphisme 1-quasiconforme f, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in]0, \pi[$, il existe des transformations de Möbius φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1(B) = B(x,r)$ et $(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1) \in \mathcal{F}'$.

Il suffit donc de montrer que $f(B) = B$ pour tout $f \in \mathcal{F}'$. On procède par l'absurde. Puisque $\mathcal{F}$ est compact (proposition 7.38), $\mathcal{F}'$ l'est aussi. Donc il existe $h \in \mathcal{F}'$ telle que

$$\lambda(h(\overline{B})) = \sup_{f \in \mathcal{F}'} \lambda(f(\overline{B}))$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Si $\lambda(h(\overline{B})) > \lambda(\overline{B})$, alors $\overline{B}$ est un sous-ensemble strict de $h(\overline{B})$, par conséquent $h(\overline{B})$ est aussi un sous-ensemble strict de $(h \circ h)(\overline{B})$. Mais alors,

$$\lambda((h \circ h)(\overline{B})) > \lambda(h(\overline{B})),$$

ce qui contredit la définition de h puisque $(h \circ h) \in \mathcal{F}'$. ∎

RÉFÉRENCES

[BKR] Zoltán M. Balogh, Pekka Koskela, and Sari Rogovin. Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2007), 645–664.

[Hei] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[HK] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* **181**(1998), 1–61.

[Loe] Charles Loewner. On the conformal capacity in space. *J. Math. Mech.* **8**(1959), 411–414.

[Sha] Nageswari Shanmugalingam. Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana* **16**(2000), 243–279.

[ST] Jan Olov Strömberg and Alberto Torchinsky. Weights, sharp maximal functions and Hardy spaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **3**(1980), 1053–1056.

[TV] Pekka Tukia and Jussi Väisälä. A remark on 1-quasiconformal maps. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **10**(1985), 561–562.

[Väi1] Jussi Väisälä. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229.

[Väi2] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.