6. LA RIGIDITÉ DE MOSTOW PAR L'ERGODICITÉ DU FLOT GÉODÉSIQUE

6.1. Flot géodésique

On s'appuie sur [Bou1, Bou2]. Pour le point de vue riemannien, on renvoie à [GHL, dC, TF]. Soit (M, g) une variété riemannienne. On se place dans le fibré unitaire tangent T^1M des (x, v) avec $x \in M$, $v \in T_xM$ de norme 1. Si g est une isométrie, on pose $g \cdot (x, v) = (g(x), T_xg(v))$.

On définit le flot géodésique

$$\Phi : \mathbb{R} \times T^1M \to T^1M$$

comme suit. A chacun des points (x, v), on associe la géodésique locale γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. On pose, lorsque c'est bien défini,

$$\Phi(t, x, v) = \Phi_t(x, v) = (\gamma(t), \gamma'(t))\,.$$

Exercice 6.1. — *(1) Montrer que $\Phi_{t+t'} = \Phi_t \circ \Phi_{t'}$.*

(2) Montrer que si g est une isométrie, alors $\Phi_t \circ g = g \circ \Phi_t$.

On considère maintenant $\mathbb{H}^n$. Notons $G\mathbb{H}^n$ l'ensemble des géodésiques paramétrées $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ que l'on munit de la distance

$$d_{G\mathbb{H}^n}(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\mathbb{R}} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{e^{-|t|}}{2} dt\,.$$

On définit le flot géodésique sur $G\mathbb{H}^n$ par $\Phi_s(\gamma) = (t \mapsto \gamma(s + t))$.

Exercice 6.2. — *Montrer que le groupe d'isométries opère sur $G\mathbb{H}^n$ par isométries, et que son action commute avec celle du flot géodésique.*

Exercice 6.3. — *Montrer que si G opère proprement discontinûment par isométries sur $\mathbb{H}^n$, il en est de même de son action sur $G\mathbb{H}^n$.*

Exercice 6.4. — *Montrer que l'application $\gamma \in G\mathbb{H}^n \mapsto \gamma(0) \in \mathbb{H}^n$ est une quasi-isométrie.*

Paramétrage de Hopf.— Chaque géodésique γ dans $\mathbb{H}^n$ a deux points limites à l'infini que l'on note $\gamma(-\infty)$ et $\gamma(+\infty)$. On se fixe un point base $w \in \mathbb{H}^n$, et on définit

$$H : G\mathbb{H}^n \to \partial^2\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$$

par

$$H(\gamma) = (\gamma(-\infty), \gamma(+\infty), \beta_{\gamma(+\infty)}(w, \gamma(0)))\,.$$

Exercice 6.5. — *Montrer que H est un homéomorphisme (il suffit de montrer que H est continue, bijective et propre).*

Dans cet espace, le flot géodésique devient

$$\Phi_t(\xi, \xi', s) = (\xi, \xi', s + t)\,.$$

6.2. **Ergodicité du flot géodésique**

Soit μ une mesure borélienne σ-finie sur $T^1\mathbb{H}^n$. On dit qu'elle est invariante sous le flot géodésique si, pour tout borélien $A \subset T^1\mathbb{H}^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(A) = \mu(\Phi_t(A))\,.$$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Si g est une transformation de Möbius de $\mathbb{S}^{n-1}$ et E est borélien, alors la formule de changement de variables donne

$$\lambda(g(E)) = \int_E |g'|^{n-1} d\lambda\,.$$

On définit la mesure μ sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ ainsi : si $E \subset \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ est borélien, on pose

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}}\,.$$

On constate que μ est une mesure de Radon sur $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}) \setminus \{(x, x)\}$.

LEMME 6.6. — La mesure μ est invariante sous l'action du groupe de Möbius.

DÉMONSTRATION. Soit g une transformation de Möbius. On considère un borélien $A \times B$; on a

$$\begin{aligned}
\mu(g(A \times B)) &= \int_{g(A)\times g(B)} \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}} \\
&= \int_{A\times B} \frac{|g'(x)|^{n-1}|g'(x)|^{n-1} d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|g(x) - g(y)|_e^{2(n-1)}} \\
&= \int_{A\times B} \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(n-1)}} \\
&= \mu(A \times B)
\end{aligned}$$

où on a utilisé (2). Donc l'action du groupe de Möbius préserve μ. ■

Sur l'espace du flot géodésique $G\mathbb{H}^n$, on considère la mesure $m = H^*(d\mu \otimes dt)$ *via* le paramétrage de Hopf. Cette mesure est une mesure de Radon invariante par le flot géodésique (car la mesure de Lebesgue est invariante par translations) et par l'action des isométries de $\mathbb{H}^n$ (car μ l'est).

On se donne un groupe G qui opère librement et géométriquement sur $\mathbb{H}^n$. Notons $\mathcal{D}$ un domaine fondamental (relativement compact) de cette action. La restriction de la mesure m à $T^1\mathcal{D}$ définit une mesure m_G sur $G\mathbb{H}^n/G$, invariante par l'action du flot géodésique et de masse finie.

THÉORÈME 6.7 (E. Hopf [Hop]). — *Le flot géodésique est ergodique sur* $(G\mathbb{H}^n/G, m_G)$. *Autrement dit, tout ensemble borélien de* $G\mathbb{H}^n/G$ *invariant par le flot géodésique est de mesure nulle, ou son complémentaire l'est.*

COROLLAIRE 6.8. — *L'action de* G *sur* $(\partial^2\mathbb{H}^n, \mu)$ *est ergodique.*

DÉMONSTRATION. Si A invariant par G avec $\mu(A) > 0$, alors $A \times \mathbb{R}$ est un ensemble de mesure positive invariant par G et le flot géodésique. Pour chaque point $p = (\xi, \xi', t)$ de $A \times \mathbb{R}$, on peut trouver $g \in G$ tel que $g(p) \in \mathcal{D}$. En passant au quotient, on obtient un ensemble de mesure positive et invariant par le flot : son complémentaire est de mesure nulle d'après le théorème de Hopf. Par suite, le complémentaire de $A \times \mathbb{R}$ est de mesure nulle, et le complémentaire de A aussi. ∎

On peut consulter [Kai] pour plus de propriétés dans le cadre de la courbure de négative.

6.3. **La rigidité de Mostow**

Le lemme suivant est dû à D. Sullivan [Sul].

LEMME 6.9. — Si $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ est un homéomorphisme tel que $f^*\mu = c \cdot \mu$, où $c > 0$ est une constante, alors f est une transformation de Möbius.

DÉMONSTRATION. Soit f une transformation telle que $f^*\mu = c\mu$. Cela signifie que $f^*\lambda$ est absolument continue par rapport à λ. Il existe une fonction borélienne positive h telle que $d(f^*\lambda) = hd\lambda$. Du coup,

$$d(f^*\mu) = \frac{h(x)h(y)d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|f(x) - f(y)|_e^{2(n-1)}}$$

donc, si $f^*\mu = c \cdot \mu$, on obtient

$$c|f(x) - f(y)|_e^{2(n-1)} = h(x)h(y)|x - y|_e^{2(n-1)}$$

presque partout ; mais, en gardant y fixe, on constate que h doit être continue. Par suite, si x_1, x_2, x_3 et x_4 sont quatre points distincts, alors

$$\begin{aligned}
[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]^{2(n-1)} &= \frac{c|f(x_1) - f(x_2)|_e^{2(n-1)} c|f(x_3) - f(x_4)|_e^{2(n-1)}}{c|f(x_1) - f(x_3)|_e^{2(n-1)} c|f(x_2) - f(x_4)|_e^{2(n-1)}} \\
&= \frac{h(x_1)h(x_2)|x_1 - x_2|_e^{2(n-1)} h(x_3)h(x_4)|x_3 - x_4|_e^{2(n-1)}}{h(x_1)h(x_3)|x_1 - x_3|_e^{2(n-1)} h(x_2)h(x_4)|x_2 - x_4|_e^{2(n-1)}} \\
&= [x_1 : x_2 : x_3 : x_4]^{2(n-1)} .
\end{aligned}$$

donc f est une transformation de Möbius. ∎

THÉORÈME 6.10 (G. D. Mostow). — *Soient* M_1 *et* M_2 *deux variétés compactes hyperboliques de dimension au moins* 3. *Si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes, alors les variétés sont isométriques.*

Pour $j = 1, 2$, on considère un sous-groupe d'isométries G_j tels que $\mathbb{H}^{d_j}/G_j \simeq M_j$. Le groupe G_j opère donc géométriquement sur $\mathbb{H}^{d_j}$. D'après le lemme de Švarc-Milnor, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{d_j}$ est quasi-isométrique à l'orbite d'un point $G_j(w_j)$.

Notons $\rho : G_1 \to G_2$ un isomorphisme. On définit $\phi : G_1(w_1) \to G_2(w_2)$ par $\phi(g(w_1)) = \rho(g)(w_2)$. On obtient ainsi une quasi-isométrie équivariante $\Phi : \mathbb{H}^{d_1} \to \mathbb{H}^{d_2}$. Par conséquent, le Théorème 4.22 montre que Φ se prolonge en un homéomorphisme quasimöbius $\varphi : \mathbb{S}^{d_1-1} \to \mathbb{S}^{d_2-1}$ équivariant.

On en déduit en particulier que $d_1 = d_2 = d$.

Puisque $d \geq 3$, le théorème 5.9 implique que φ est absolument continu. Notons λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}^{d-1}$ et μ la mesure sur $\partial^2\mathbb{H}^d$ définie par

$$d\mu(x, y) = \frac{d\lambda(x) \otimes d\lambda(y)}{|x - y|_e^{2(d-1)}} .$$

Par suite, il existe une fonction intégrable h telle que $d(\varphi^*\lambda) = hd\lambda$. Donc les mesures μ et $\varphi^*\mu$ sur $\partial^2\mathbb{H}^d$ sont dans la même classe. Étant ergodiques (théorème de Hopf), on en déduit qu'elles sont proportionnelles. Par le lemme 6.27, on conclut que φ est de Möbius. Comme φ est une transformation de Möbius qui commute avec G_1 et G_2, φ se prolonge en une isométrie hyperbolique équivariante par la proposition 3.18, et passe donc au quotient en une isométrie. ■

EXERCICE 6.11. — *Montrer que si $d = 2$, alors ou bien φ est totalement singulier, ou bien φ est une homographie.*

6.4. **Espaces CAT(-1)**

Nous nous référons ici essentiellement à [BH, GdlH, Bou1, Bou2]. Un espace métrique CAT(-1) est un espace géodésique dont les triangles sont plus fins que leurs homologues de $\mathbb{H}^2$. Un tel espace partage de nombreuses propriétés avec les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^d$, $d \geq 2$, qui s'établissent avec les mêmes arguments.

6.4.1. *Triangle de comparaison.* Soit X un espace métrique géodésique.

Rappelons qu'un triangle Δ est la donnée de trois points a, b, c et de trois segments géodésiques qui les relient deux à deux. On lui associe un *triangle de comparaison* $\overline{\Delta} = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ sur $\mathbb{H}^2$, bien défini à isométries près de $\mathbb{H}^2$, dont la longueur des côtés ont même longueur que ceux de Δ. Son existence découle essentiellement de l'inégalité triangulaire. En effet, si on place $\overline{a}$ et $\overline{b}$ dans $\mathbb{H}^2$ à distance $d_X(a, b)$, et que l'on considère le cercle centré en $\overline{a}$ de rayon $d_X(a, c)$, alors un point courant z de ce cercle aura sa distance à $\overline{b}$ qui variera entre $d_X(a, b) + d_X(a, c)$ et $|d_X(a, b) - d_X(a, c)|$; or cet intervalle contient $d_X(b, c)$ par l'inégalité triangulaire donc le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence de $\overline{c}$ à distance $d_X(a, c)$ de $\overline{a}$ et $d_X(b, c)$ de $\overline{b}$. On définit aussi *l'angle comparaison* $\angle_a(b, c)$ comme étant l'angle correspondant de $\overline{\Delta}$ (en $\overline{a}$).

On considère enfin l'application $f_\Delta : \Delta \to \overline{\Delta}$ dont la restriction à chaque côté est une isométrie et telle que $f(a,b,c) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

DÉFINITION 6.12. — *(1) On dit que Δ satisfait le théorème de comparaison d'Aleksandroff si f_Δ est une dilatation.*

(2) On dit que X est un espace CAT(-1) si tout triangle de X vérifie le théorème de comparaison d'Aleksandroff.

Les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, sont des exemples d'espaces CAT(-1). Plus généralement, les variétés riemanniennes simplement connexes de courbure sectionnelle majorée par (-1).

EXERCICE 6.13. — *Soit X un espace CAT(-1). Etablir les propriétés suivantes.*

(1) Par deux points passe un unique segment géodésique.

(2) Soit Δ un triangle hyperbolique. La distance d'un point x aux deux côtés opposés est borné par $\log(1+\sqrt{2})$.

(3) Soient r_1, r_2 deux rayons géodésiques. Ou bien r_1 et r_2 sont asymptotes et il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t\to\infty} d_X(r_1(t+u), r_2(t)) = 0$ *; sinon* $d_X((r_1(t), r_2(t)) \gtrsim t$.

(4) Il existe $\delta_0 > 0$ telle que, pour tous $w, x, y \in X$, on ait

$$|d(w,[x,y]) - (x|y)_w| \leq \delta_0 \, .$$

(5) L'espace X est hyperbolique au sens de Gromov i.e., il existe $\delta > 0$ telle que, pour tous $x, y, z, w \in X$, on ait

$$(x|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (y|z)_w\} - \delta \, .$$

6.4.2. *Compactification.* On reprend les mêmes idées que pour les espaces hyperboliques. Les démonstrations identiques ne seront pas répétées. On suppose dorénavant que X est un espace propre. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rayons de X sur lequel on met la relation d'équivalence $r \sim r'$ si $d_H(r,r') < \infty$. On désigne $\mathcal{R}/\sim$ par ∂X. Si $w \in X$ est fixé, on note $\mathcal{R}_w$ les rayons issus de w. On a une bijection naturelle entre $\mathcal{R}/\sim$ et $\mathcal{R}_w$

On munit $X \cup \partial X$ de la topologie suivante. On identifie X aux segments issus de w. Un système de voisinages de $x \in X$ est donné par les boules (de rayon fini). Si $r_0 \in \mathcal{R}$, on écrit $V_{r_0}(R,\varepsilon)$ l'ensemble des rayons r de $X \cup \partial X$ tel que $d(r_0(R), r(R)) \leq \varepsilon$. Une base de voisinages d'un point $\xi \in \partial X$ est donnée par la famille $V_{r_0}(R,\varepsilon)$, où r_0 représente ξ et $R, \varepsilon > 0$.

Si $\xi \in \partial X$, on dit que r aboutit en ξ si r représente ξ.

EXERCICE 6.14. — *Soit X un espace propre de type CAT(-1). On se donne deux rayons r_+ et r_- non équivalents. Montrer qu'il existe une géodésique γ asymptote à r_+ en $+\infty$ et à r_- en $-\infty$, unique au paramétrage près. On dit que X a* la propriété de visibilité.

Fonctions de Busemann.— Soit r un rayon. On considère
$$b_r(x) = \lim_{t\to\infty} d(r(t),x) - t\,.$$
Si $\xi \in \partial X$ et $x, y \in X$, on définit $\beta_\xi(x,y) = b_r(x) - b_r(y)$ où r aboutit en ξ (cette limite est indépendante du rayon car ils sont tous asymptotes). Les lignes de niveau $\{b_r(x) = L\}$ sont les horosphères.

On a les propriétés suivantes, dont la démonstration s'établit comme dans le cas hyperbolique.

PROPOSITION 6.15. — *On a les propriétés suivantes :*

(1) $\beta_\xi(x,y) = -\beta_\xi(y,x)$.

(2) $\beta_\xi(x,y) = \beta_\xi(x,z) + \beta_\xi(z,y)$.

(3) $|\beta_\xi(x,y)| \le d(x,y)$*, avec égalité si et seulement si* x, y, ξ *sont alignés.*

(4) L'application $(X \cup \partial X) \times X \times X \to \mathbb{R}$ *qui à* $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x,y)$ *est continue.*

Produit de Gromov à l'infini.— On montre que le produit de Gromov se prolonge continûment à l'infini dans le cadre CAT(-1) aussi.

PROPOSITION 6.16. — *Soit* $w \in X$, $\xi, \zeta \in \partial X$ *et* γ *la géodésique entre* ξ *et* ζ*, cf. l'exercice 6.14. On a*
$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\zeta)} (x|y)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w,p) + \beta_\zeta(w,p))$$
où $p \in \gamma$*. La limite est indépendante de* p *et on la note* $(\xi|\zeta)_w$*. De plus, si* x*,* y *sont dans* X*, alors*

$$(\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y = \frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y) + \beta_\zeta(x,y))\,. \tag{4}$$

Angle de comparaison à l'infini.— On se donne $\xi, \zeta \in \partial X$ et $w \in X$. On considère deux rayons r et r' issus de w qui tendent vers ξ et ζ respectivement. Soit r_0 un rayon de $\mathbb{H}^2$. Pour tout $t > 0$, on considère le triangle de comparaison de $\{w, r(t), r'(t)\}$, où r est représenté par r_0. Puisqu'il vérifie le théorème de comparaison, on a $\angle_w(r(t), r'(t)) \ge \angle_w(r(t'), r'(t'))$ pour tout $t' \le t$. Donc
$$\angle_w(\xi,\zeta) = \lim_{t\to\infty} \angle_w(r(t), r'(t))$$
existe et définit *l'angle de comparaison à l'infini* de $\{w, \xi, \zeta\}$.

PROPOSITION 6.17 (Distance visuelle). — *Pour tous* $x \in X$, $\xi, \zeta \in \partial X$*, on a*
$$\sin \frac{1}{2}\angle_x(\xi,\zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$
et cela définit une distance d_x *sur* ∂X*. Les angles de comparaison définissent aussi une distance. De plus, si* $x, y \in X$ *et* $\xi, \zeta \in \partial X$*, alors*
$$d_y(\xi,\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y)+\beta_\zeta(x,y))} d_x(\xi,\zeta)\,.$$

Nous aurons besoin du fait suivant :

LEMME 6.18. — Si $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ et $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 < 1$, alors $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$.

Démonstration. — À θ_1 fixé, l'application $\theta_2 \mapsto \sin\theta_1 + \sin\theta_2$ est strictement croissante de $\sin\theta_1$ à $\sin\theta_1 + 1$; donc il existe $m \leq \pi/2$, tel que $\theta_2 < m$ équivaut à $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 < 1$; or

$$\sin\theta_1 + \sin(\pi/2 - \theta_1) = \sin\theta_1 + \cos\theta_1 \geq \sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 = 1$$

donc $m \leq \pi/2 - \theta_1$. □

Si $x \in X$ et $a, b \in (X \cup \partial X)$, on pose

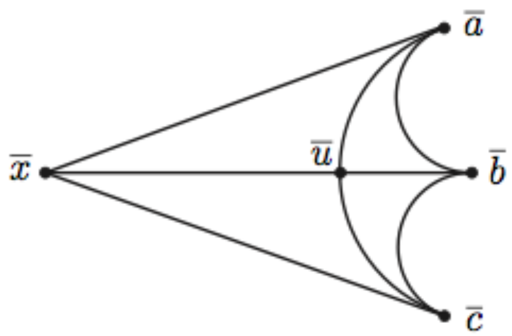
$$s_x(a,b) = \sin \frac{1}{2} \angle_x(a,b)\,.$$

LEMME 6.19. — Les fonctions s_x et $\angle_x(\cdot,\cdot)$ définissent une distance sur $\{a \in X,\ |a-x| = t\}$ pour tout $t > 0$.

DÉMONSTRATION. Seule l'inégalité triangulaire requiert une démonstration. On considère a, b, c sur la sphère centrée en x et de rayon $t > 0$.

On peut supposer que $s_x(a,b) + s_x(b,c) < 1$. Cela implique que $\angle_x(a,b) + \angle_x(b,c) < \pi$.

Prenons des triangles de comparaison $\{\overline{x}, \overline{a}, \overline{b}\}$ et $\{\overline{x}, \overline{b}, \overline{c}\}$ de sorte que la géodésique $(\overline{x}, \overline{b})$ sépare $\overline{a}$ de $\overline{c}$.



Par hypothèses, on a

$$\angle_{\overline{x}}(\overline{a}, \overline{b}) + \angle_{\overline{x}}(\overline{b}, \overline{c}) < \pi$$

et $|\overline{x} - \overline{a}| = |\overline{x} - \overline{b}| = |\overline{x} - \overline{c}| = t$. Donc le segment $[\overline{a}, \overline{c}]$ coupe $[\overline{x}, \overline{b}]$ en un unique point $\overline{u}$. On note $u \in [x, b]$ le point correspondant. L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent

$$\begin{aligned} |a - c| &\leq |a - u| + |u - c| \\ &\leq |\overline{a} - \overline{u}| + |\overline{u} - \overline{c}| \\ &= |\overline{a} - \overline{c}|\,. \end{aligned}$$

En utilisant la loi hyperbolique du cosinus dans $\mathbb{H}^2$, il vient

$$\begin{aligned} s_x(a,c) &= \left(\frac{1-\cos\angle_x(a,c)}{2}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}\,|a-c|}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\mathrm{ch}\,|a-c| - 1}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{ch}\,|\overline{a}-\overline{c}| - 1}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2} \\ &= \sin\frac{1}{2}\angle_{\overline{x}}(\overline{a},\overline{c})\,. \end{aligned}$$

Mais puisque $\angle_{\overline{x}}(\overline{a},\overline{c}) = \angle_{\overline{x}}(\overline{a},\overline{b}) + \angle_{\overline{x}}(\overline{b},\overline{c})$ et $\sin(\alpha+\beta) \leq \sin\alpha + \sin\beta$ pour $\alpha,\beta\in[0,\pi/2]$, on obtient

$$s_x(a,c) \leq \sin\frac{1}{2}\angle_{\overline{x}}(\overline{a},\overline{b}) + \sin\frac{1}{2}\angle_{\overline{x}}(\overline{b},\overline{c})$$

soit

$$s_x(a,c) \leq s_x(a,b) + s_x(b,c)\,.$$

■

Démonstration de la proposition 6.17. Les mêmes calculs que pour la proposition 4.13 montrent

$$\sin\frac{1}{2}\angle_x(\xi,\zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$

et la dépendance au point base provient de (4). L'inégalité triangulaire découle du lemme. ■

Vue hyperbolique du birapport.— Si $k \geq 1$, on désigne par $\partial^k X$ l'ensemble des k-uplets ordonnés de points deux à deux distincts de ∂X.

On définit $p : \partial^3 X \to X$ comme suit. Étant donnés (ξ,ξ',ζ), on considère l'unique point p de (ξ,ξ') tel que $(\xi|\zeta)_p = (\xi'|\zeta)_p$.

Exercice 6.20. — *Montrer que p est bien définie.*

Proposition 6.21. — *Si $(\xi,\xi',\zeta,\zeta')\in\partial^4 X$, l'expression*

$$\frac{d_x(\xi,\xi')d_x(\zeta,\zeta')}{d_x(\xi,\zeta')d_x(\xi',\zeta)}$$

ne dépend pas de $x\in\mathbb{H}^n$ et on la note $[\xi,\xi',\zeta',\zeta]$. De plus,

$$\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta] = \frac{1}{2}(\beta_\zeta(p(\zeta,\xi,\zeta'),p(\xi,\zeta,\xi')) - \beta_\xi(p(\zeta,\xi,\zeta'),p(\xi,\zeta,\xi')))$$

et

$$|\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta]| = d_X(p(\xi,\zeta,\xi'),p(\zeta,\xi,\zeta'))\,.$$

Action des isométries.— Le groupe des isométries préserve la relation d'équivalence $\sim$, donc opère sur ∂X.

PROPOSITION 6.22. — *Si g est une isométrie alors*

(1) g préserve les birapports.

(2) g est conforme au sens que

$$|g'(\xi)|_x \overset{def.}{=} \lim_{\zeta\to\xi} \frac{d_x(g(\xi),g(\zeta))}{d_x(\xi,\zeta)} = e^{\beta_\xi(x,g^{-1}(x))}\,.$$

(3)

$$|g'(\xi)|_x |g'(\zeta)|_x = \left(\frac{d_x(g(\xi),g(\zeta))}{d_x(\xi,\zeta)}\right)^2\,.$$

Le bord comme un espace métrique mesuré.— Muni d'une action géométrique, le bord d'un espace CAT(-1) admet un analogue de la mesure de Lebesgue de la sphère.

THÉORÈME 6.23. — *Soit (X,w) un espace géodésique propre CAT(-1) pointé, et soit G un groupe qui agit géométriquement sur X. On suppose que G est non élémentaire i.e., ∂X contient au moins 3 points. L'entropie volumique vérifie*

$$v \overset{def.}{=} \limsup \frac{1}{R} \log |\{G(w)\cap B(w,R)\}| = \dim(\partial X, d_w)\,.$$

Soit ρ la mesure de Hausdorff dans la dimension v.

(i) ρ est Ahlfors-régulière de dimension v : il existe $C\geq 1$ telle que

$$(1/C)r^v \leq \rho(B(\xi,r)) \leq Cr^v$$

pour tout $x\in\partial X$ et $r\in[0,\operatorname{diam}\partial X]$.

(ii) ρ est une mesure G-conforme i.e., pour tout $g\in G$, $\rho \ll g^*\rho \ll \rho$ et

$$\frac{dg^*\rho}{d\rho}(\xi) = |g'(\xi)|_w^v \;\rho - pp.\,;$$

(iii) L'action de G est ergodique pour ρ.

De plus, deux mesures G-conformes sont proportionnelles.

On déduit du point (ii) la formule de changement de variables

$$\rho(g(A)) = \int_A |g'|_w^v d\rho\,,$$

pour tout borélien $A\subset\partial X$.

6.5. **Espaces hyperboliques et espaces CAT(-1)**

Le but de ce paragraphe est de montrer la généralisation suivante du théorème de Mostow.

THÉORÈME 6.24 (M. Bourdon). — *On suppose que G est un groupe qui opère géométriquement sur $\mathbb{H}^n$, $n\geq 3$, et sur un espace X de type CAT(-1) propre, géodésiquement complet et d'entropie volumique $(n-1)$. Alors X et $\mathbb{H}^n$ sont isométriques.*

6.5.1. *Flot géodésique et transformations de Möbius.* Soit X un espace CAT(-1). Notons GX l'ensemble des géodésiques paramétrées $g : \mathbb{R} \to X$ que l'on munit de la distance

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_{GX} = \int_{\mathbb{R}} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \frac{e^{-|t|}}{2} dt\,.$$

On définit le flot géodésique sur GX par $\Phi_s(\gamma(t)) = \gamma(t+s)$.

EXERCICE 6.25. — *Soit X un espace CAT(-1).*

(1) Montrer que le groupe d'isométries opère sur GX par isométries, et que son action commute avec celle du flot géodésique.

(2) Montrer que si G opère proprement discontinûment par isométries sur X, il en est de même de son action sur GX.

(3) Montrer que l'application $\gamma \in GX \mapsto \gamma(0) \in X$ est une quasi-isométrie.

On définit $\pi = \pi_X : \partial^3 X \to GX$ par $\pi(\xi, \xi', \zeta) = \gamma$ où $\gamma(-\infty) = \xi$, $\gamma(+\infty) = \xi'$ et $\gamma(0) = p(\xi, \xi', \zeta)$.

EXERCICE 6.26. — *Soient X, Y deux espaces CAT(-1) et $\varphi : \partial X \to \partial Y$ une transformation de Möbius. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\Psi : GX \to GY$ tel que $\Psi \circ \pi_X = \pi_Y \circ \varphi$ qui conjugue les flots géodésiques, où $\varphi(\xi, \xi', \zeta) = (\varphi\xi, \varphi\xi', \varphi\zeta)$.*

Paramétrage de Hopf.— Chaque géodésique γ dans X a deux points limites à l'infini que l'on note $\gamma(-\infty)$ et $\gamma(+\infty)$. On se fixe un point base $w \in X$, et on définit

$$H : GX \to \partial^2 X \times \mathbb{R}$$

par

$$H(\gamma) = (\gamma(-\infty), \gamma(+\infty), \beta_{\gamma(+\infty)}(w, \gamma(0)))\,.$$

Comme dans le cas hyperbolique, H est un homéomorphisme. Dans cet espace, le flot géodésique devient

$$\Phi_t(\xi, \xi', s) = (\xi, \xi', s+t)\,.$$

Soit ρ la mesure de construite au paragraphe précédent. Si g est une transformation de Möbius et E est borélien, alors la formule de changement de variables donne

$$\rho(g(E)) = \int_E |g'|_x^v d\rho(x)\,.$$

On définit la mesure μ sur $\partial^2 X$ ainsi : si $E \subset \partial^2 X$ est borélien, on pose

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\rho(x) \otimes d\rho(y)}{|x-y|^{2v}}\,.$$

On constate que μ est une mesure de Radon sur $\partial^2 X$.

LEMME 6.27. — La mesure μ est invariante sous l'action du groupe de Möbius. Réciproquement, si $f : \partial X \to \partial X$ est un homéomorphisme tel que $f^*\mu = c \cdot \mu$, où $c > 0$ est une constante, alors f est une transformation de Möbius.

Sur l'espace du flot géodésique GX, on considère la mesure $m = H^*(d\mu \otimes dt)$ *via* le paramétrage de Hopf. Cette mesure est une mesure de Radon invariante par le flot géodésique (car la mesure de Lebesgue est invariante par translations) et par l'action des isométries de X (car μ l'est).

On se donne un groupe G qui opère géométriquement sur X. La restriction de la mesure m à GX/G (considéré comme domaine fondamental de G sur GX) définit une mesure m_G sur GX/G, invariante par l'action du flot géodésique et de masse finie.

Le théorème de Hopf reste valable dans ce contexte et on obtient :

COROLLAIRE 6.28. — *L'action de G sur $(\partial^2 X, \mu)$ est ergodique.*

Le théorème 6.24 nécessite la condition sur l'entropie volumique de X pour appliquer le résultat suivant :

THÉORÈME 6.29 (Pansu [Pan, Cor. 7.2]). — *Un homéomorphisme quasimöbius $\varphi : \mathbb{S}^n \to Z$, où Z est n-Ahlfors régulier et $n \geq 2$, est absolument continu.*

Ce type de résultats est étendu dans le cadre des espaces métriques dans [HK]. Cela implique que la conjugaison quasimöbius préserve les mesures ergodiques induites sur les paires de points.

6.5.2. *Extension des transformations de Möbius.* Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6.30 (M. Bourdon). — *Soit X un espace CAT(-1) propre et géodésiquement complet. S'il existe une transformation de Möbius $f : \partial\mathbb{H}^n \to \partial X$ alors X et $\mathbb{H}^n$ sont isométriques.*

Nous aurons ainsi tous les ingrédients pour montrer le théorème 6.24 dont la démonstration est mot pour mot la même que celle du théorème de Mostow présentée au paragraphe 6.3.

Nous suivons [Bou2] de près en établissant d'abord quelques lemmes.

LEMME 6.31. — Soit $f : \partial\mathbb{H}^2 \to X$ un plongement de Möbius. On considère $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2) \in \partial^4\mathbb{H}^2$ tel que les géodésiques (ξ_1, ξ_2) et (ζ_1, ζ_2) soient sécantes en un point w. Notons $(\xi_1', \xi_2', \zeta_1', \zeta_2') \in \partial^4 X$ l'image de $(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2)$ par f. Alors les géodésiques (ξ_1', ξ_2') et (ζ_1', ζ_2') sont sécantes en un point x. De plus, on a pour tous $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\angle_x(\xi_i', \zeta_j') = \angle_w(\xi_i, \zeta_j)\,.$$

Démonstration. Soit $x \in (\xi'_1, \xi'_2)$ tel que $\angle_x(\xi'_1, \zeta'_1) = \angle_x(\xi'_2, \zeta'_2)$. On note β cette valeur commune et on pose $\alpha = \angle_w(\xi_1, \zeta_1)$. On a, d'après la proposition 6.17,

$$
\begin{aligned}
\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= [\xi_1, \zeta_1, \xi_2, \zeta_2] \\
&= [\xi'_1, \zeta'_1, \xi'_2, \zeta'_2] \\
&= \frac{d_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_2)}{d_x(\xi'_1, \xi'_2) \cdot d_x(\zeta'_1, \zeta'_2)} \\
&\geq d_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_2) \\
&= \sin^2 \frac{\beta}{2} \;=\; \sin \frac{1}{2}\angle_x(\xi'_1, \zeta'_1) \cdot \sin \frac{1}{2}\angle_x(\xi'_2, \zeta'_2)\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Par ailleurs, on a aussi

$$
\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \sin^2 \frac{\pi - \alpha}{2} \\
&= [\xi_1, \zeta_2, \xi_2, \zeta_1] \\
&= [\xi'_1, \zeta'_2, \xi'_2, \zeta'_1] \\
&= \frac{d_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_1)}{d_x(\xi'_1, \xi'_2) \cdot d_x(\zeta'_1, \zeta'_2)} \\
&\geq d_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot d_x(\xi'_2, \zeta'_1) \\
&= \sin \frac{1}{2}\angle_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot \sin \frac{1}{2}\angle_x(\zeta'_1, \xi'_2).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Puisque $\angle_x(\cdot, \cdot)$ est une distance, il vient

$$
\begin{cases}
\angle_x(\xi'_1, \zeta'_2) \geq \pi - \beta\,, \\
\angle_x(\xi'_2, \zeta'_1) \geq \pi - \beta\,.
\end{cases}
\tag{7}
$$

On obtient de (6), (7) puis (5)

$$
\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\alpha}{2} &\geq \sin \frac{1}{2}\angle_x(\xi'_1, \zeta'_2) \cdot \sin \frac{1}{2}\angle_x(\zeta'_1, \xi'_2) \\
&\geq \sin^2 \frac{\pi - \beta}{2} \;\geq\; \cos^2 \frac{\beta}{2} \\
&\geq \cos^2 \frac{\alpha}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Toutes ces inégalités deviennent donc des égalités. On déduit par exemple de (5) le fait que $d_x(\zeta'_1, \zeta'_2) = 1$, ce qui montre que x est un point de (ζ'_1, ζ'_2). En permutant les indices, il vient, pour tous $i, j \in \{1, 2\}$,

$$\angle_x(\xi'_i, \zeta'_j) = \angle_w(\xi_i, \zeta_j)\,.$$

■

Lemme 6.32. — Soient $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ six points sur $\partial\mathbb{H}^2$ deux à deux distincts et dans cet ordre, et désignons par des primes leurs images par f. Les géodésiques (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) et (ζ_1, ζ_2) sont concourantes si et seulement si les géodésiques (ξ'_1, ξ'_2), (η'_1, η'_2) et (ζ'_1, ζ'_2) sont concourantes.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que les géodésiques (ξ_1', ξ_2'), (η_1', η_2') et (ζ_1', ζ_2') sont concourantes en x. Si les géodésiques (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) et (ζ_1, ζ_2) ne le sont pas, leurs points d'intersection sont les sommets d'un triangle. Par conséquent, le lemme 6.31 nous dit que la somme de ses angles intérieurs est

$$\angle_x(\xi_1', \eta_1') + \angle_x(\eta_1', \zeta_1') + \angle_x(\zeta_1', \xi_2') \geq \pi,$$

puisque $\angle_x(\cdot, \cdot)$ est une distance. Ceci contredit la formule de Gauss-Bonnet.

Réciproquement, si on fait courir η_1 de ξ_1 à ξ_2, le point d'intersection de (η_1', η_2') avec (ξ_1', ξ_2') parcourt toute la géodésique (ξ_1', ξ_2'). Il existe donc un point η_1'' tel que (η_1'', η_2') la coupe au même point que (ζ_1', ζ_2'). Mais alors leurs images réciproques sont concourantes dans $\mathbb{H}^2$, ce qui implique $\eta_1'' = \eta_1'$. ∎

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.30. On montre d'abord qu'un plongement de Möbius $f : \partial\mathbb{H}^2 \to \partial X$ s'étend en un plongement isométrique. soit $x \in \mathbb{H}^2$; les lemmes 6.31 et 6.32 impliquent que le faisceau des géodésiques qui passent par x s'envoient sur un faisceau de géodésiques concourantes, ce qui nous permet de définir une transformation $F : \mathbb{H}^2 \to X$. La proposition 6.21 et le lemme 6.31 montrent alors que F est un plongement isométrique.

Pour en déduire le théorème, on considère les fibrations $p_{\mathbb{H}^n} : \partial^3\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ et $p_X : \partial^3 X \to X$ dont les fibres sont les triplets qui s'envoient sur un point donné. Il suffit de montrer que la transformation $f : \partial^3\mathbb{H}^n \to \partial^3 X$ préserve les fibres, ce qui impliquera l'existence d'une transformation $F : \mathbb{H}^n \to X$. De plus, les restrictions de F aux copies de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^n$ étant isométriques d'après ci-dessus, on aura F isométrique. Enfin, l'hypothèse que X est géodésiquement complet impliquera la surjectivité de F.

Si deux triplets sont dans une même fibre, alors ils définissent deux, trois ou quatre géodésiques concourantes. Chaque paire définit un plan, et donc leurs images sont aussi concourantes. Par conséquent, $f : \partial^3\mathbb{H}^n \to \partial^3 X$ préserve les fibrations.

RÉFÉRENCES

[BKR] Zoltán M. Balogh, Pekka Koskela, and Sari Rogovin. Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves. *Geom. Funct. Anal.* **17**(2007), 645–664.

[Bou1] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace. *Enseign. Math. (2)* **41**(1995), 63–102.

[Bou2] Marc Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83**(1996), 95–104.

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[dC] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[GdlH] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[HK] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* **181**(1998), 1–61.

[Hop] Eberhard Hopf. Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77**(1971), 863–877.

[Kai] Vadim A. Kaimanovich. Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **455**(1994), 57–103.

[Pan] Pierre Pansu. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. of Math. (2)* **129**(1989), 1–60.

[Sul] Dennis Sullivan. Discrete conformal groups and measurable dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6**(1982), 57–73.

[TF] V. V. Trofimov and A. T. Fomenko. Riemannian geometry. *J. Math. Sci. (New York)* **109**(2002), 1345–1501. Geometry, 8.