5. LA RIGIDITÉ DE MOSTOW PAR LA GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

5.1. Structures conformes

On se réfère à [BH, Chap. II.10], [DK, Chap. 23] et [Tuk]. Une structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est donnée par un produit scalaire, c'est-à-dire une matrice symétrique définie positive M. Pour $v, w \in \mathbb{R}^n$, on écrit $\langle v, w\rangle_M = {}^t vMw$. On note $\mathcal{S}_+$ l'espace des matrices symétriques définies positives.

Exercice 5.1. — *Soit $M \in \mathcal{S}_+$, montrer que la sphère unité pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ est un ellipsoïde centré en 0 pour la structure euclidienne standard, dont on donnera les caractéristiques en fonction de M. Réciproquement, montrer qu'un ellipsoïde centré en 0 définit un unique produit scalaire dont c'est la sphère unité.*

Si $u : E \to F$ est un isomorphisme entre espaces vectoriels de dimension finie et q_F la forme quadratique associée à un produit scalaire sur F, on définit le *tiré en arrière de q* par $u^*q(x) = q(u(x))$, soit $u^*q = q \circ u$. On vérifie que la forme polaire de q est un produit scalaire. Si $E = F = \mathbb{R}^n$, u est donné par $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et q est induite par $M \in \mathcal{S}_+$, alors $P^*M = {}^tPMP$.

Exercice 5.2. — *Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

(1) En utilisant que ${}^tPP$ est symétrique et définie positive, montrer qu'il existe $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ telles que O_1PO_2 est diagonale.

(2) Comment les valeurs propres de ${}^tPP$ et O_1MO_2 sont-elles reliées ?

Les valeurs propres de O_1PO_2 s'appellent les valeurs singulières de P.

Définition 5.3 (Structure conforme). — *La proportionalité entre produits scalaires d'un espace vectoriel définit une relation d'équivalence dont les classes sont les* structures conformes. *Deux produits scalaires sont* conformément équivalents *s'ils sont proportionnels.*

Une structure conforme sur $\mathbb{R}^n$ est donc la donnée d'une matrice symétrique définie positive à un facteur strictement positif près, ou encore de la forme des sphères, autrement dit, d'un ellipsoïde à dilatation près. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces matrices normalisées par leur déterminant fixé égal à 1. On décrit donc les structures conformes comme une sous-variété de codimension 1 de l'espace des structures euclidiennes. L'espace tangent $T_M\mathcal{S}$ d'une structure conforme M est l'espace des matrices symétriques U telles que $\operatorname{tr} M^{-1}U = 0$.

Exercice 5.4. — *Montrer que deux produits scalaires sont conformément équivalents si et seulement si les angles des vecteurs sont préservés si $n \geq 2$. Que se passe-t-il en dimension 1 ?*

Si $M \in SL_n(\mathbb{R})$, l'application $\rho(M) = {}^tM \cdot M$ détermine une matrice de $\mathcal{S}$, et est surjective. On vérifie que $\rho(A) = \rho(B)$ si et seulement si il existe $O \in SO_n(\mathbb{R})$ telle que $A = OB$, donc $\mathcal{S}$ est isomorphe à $SL_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 5.5. — *Soit $M \in SL_n(\mathbb{R})$, montrer que $M^{-1}\mathbb{S}^{n-1}$ est la sphère unité de $\rho(M)$.*

Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ opère sur $\mathcal{S}$ *via* l'action suivante

$$(P, M) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S} \mapsto P[M] = (\det P)^{-2/n} \left({}^tPMP\right).$$

Cette action est transitive et correspond au tiré en arrière de la structure conforme définie par M par l'application P. On dit que $P : (\mathbb{R}^n, M_1) \to (\mathbb{R}^n, M_2)$ est *conforme* si $P[M_2] = M_1$.

L'espace des structures conformes.— On rappelle que $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}\ {}^tMN$ définit sur l'espace des matrices $M_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire standard lorsqu'on identifie les coefficients des matrices à $\mathbb{R}^{n^2}$. De plus, l'exponentielle des matrices définit un difféomorphisme des matrices symétriques sur les matrices symétriques définies positives dont on note log son inverse. Leurs valeurs propres se correspondent par exp / log.

On définit sur $\mathcal{S}$ la métrique riemannienne $g = g_{\mathcal{S}}$ par

$$g_M(V, W) = \frac{\sqrt{n}}{2} \mathrm{tr}\left(M^{-1} \cdot V \cdot M^{-1} \cdot W\right)$$

où $V, W \in T_M\mathcal{S}$. Il s'agit de la métrique induite de celle définie sur l'espace $\mathcal{S}_+$ des structures euclidiennes de $\mathbb{R}^n$ par la même formule. On désigne dans la suite la distance induite $d_{g_{\mathcal{S}}}$ par $d_{\mathcal{S}}$.

PROPOSITION 5.6. — *Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ opère par isométries sur $(\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}})$ et*

$$d_{\mathcal{S}}(I, M) = \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\sum_{\chi_M(\lambda)=0} (\log \lambda)^2 \right)^{1/2},$$

où χ_M désigne le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{S}$.

DÉMONSTRATION. Comme $M \mapsto P[M]$ est linéaire, c'est aussi son application linéaire tangente. Du coup, pour $V, W \in T_M\mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned}
(P^* g_{P[M]})(V, W) &\stackrel{\text{def.}}{=} g_{P[M]}(P[V], P[W]) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2} \mathrm{tr}\left[({}^tPMP)^{-1}\, {}^tPVP({}^tPMP)^{-1}\, {}^tPWP\right] \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2} \mathrm{tr}\left[P^{-1}(M^{-1}VM^{-1}W)P\right] \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2} \mathrm{tr}\left[M^{-1}VM^{-1}W\right] \\
&= g_P(V, W)
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'action est isométrique.

D'après [BH, Cor. II.10.42], les géodésiques issues d'une matrice $\rho(A)$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, définissant une structure euclidienne sont de la forme

$$c : s \mapsto {}^tA(\exp sX)A \text{ où } X \text{ est symétrique, } \mathrm{tr}\, X = 0 \text{ et } (\sqrt{n}/2)\mathrm{tr}\, X^2 = 1\,.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $c(s)^{-1}c'(s) = A^{-1}\exp(-sX){}^tA^{-1}\,{}^tAX\exp sXA = A^{-1}XA$. On vérifie ainsi que c est à vitesse 1 :

$$g_{c(s)}(c'(s), c'(s)) = \frac{\sqrt{n}}{2}\mathrm{tr}\,[c(s)^{-1}c'(s)c(s)^{-1}c'(s)] = \frac{\sqrt{n}}{2}\mathrm{tr}\,[A^{-1}X^2A] = 1\,.$$

Si $A \in SL_n(\mathbb{R})$ alors $\det c(s) = \det\exp sX = \exp s\mathrm{tr}\, X = 1$ donc c est contenue dans $\mathcal{S}$. En particulier, si $M \in \mathcal{S}$, on considère son logarithme $\log M$ —de trace nulle— que l'on normalise en posant $X = (\sqrt{2}/(n^{1/4}\mathrm{tr}\,\log M))\log M$ de sorte que $(\sqrt{n}/2)\mathrm{tr}\, X^2 = 1$. La géodésique issue de I dirigée par X passe par $c((n^{1/4}/\sqrt{2})\mathrm{tr}\,(\log M)) = \exp\log M = M$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est totalement géodésique. Par conséquent, un calcul montre que

$$d_{\mathcal{S}}(I, M) = \ell(c|_{[0,(\log M)^2)]}) = \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\sum_{\chi_M(\lambda)=0}(\log\lambda)^2\right)^{1/2}.$$

■

Si $M \in \mathcal{S}$, on note $k(M) = (n/2)\max\{|\log\lambda|,\ \chi_M(\lambda) = 0\}$, qui induit une métrique $GL_n(\mathbb{R})$-invariante k bi-Lipschitz à g telle que $k(I, M) = k(M)$.

Du coup, ces distances mesurent le défaut de deux produits scalaires à être conformément équivalents. Elles mesurent également le défaut d'un isomorphisme P à être conforme en considérant $d_{\mathcal{S}}(M_1, P[M_2])$ ou $k(M_1, P[M_2])$.

Le résultat qui nous intéresse pour la suite est le suivant.

Théorème 5.7 (Theorem II.10.39 [BH]). — *La variété riemannienne $(\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}})$ est un espace complet simplement connexe CAT(0).*

Cela vient du fait que $(\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}})$ est une variété symétrique de type non compact, donc de courbure sectionnelle négative. Ceci signifie que les triangles de $(\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}})$ sont plus fins que les triangles euclidiens.

Le cas de la dimension 2.— Il y a plusieurs raisons pour s'intéresser plus spécifiquement à la dimension 2. La première est historique puisque les structures conformes ont d'abord été étudiées dans ce contexte. Ensuite, la dimension 2 concentre un certain nombre de particularités. Par exemple, le spectre d'une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est déterminée par une seule valeur propre. Sans doute plus crucial, on peut travailler en notation complexe qui apporte un éclairage très pertinent comme nous allons le voir, puisque les applications holomorphes sont conformes en dehors de l'ensemble discret de leurs points critiques.

Proposition 5.8. — *En dimension 2, $(\mathcal{S}, g_{\mathcal{S}})$ est de courbure constante strictement négative.*

On établit cette proposition en construisant une dilatation $f : \mathbb{H}^2 \to \mathcal{S}$. L'application en question consiste à associer à tout complexe du disque unité μ (modèle de la boule de $\mathbb{H}^2$) la structure conforme associée au produit scalaire donné par $u \mapsto |u+\mu\bar{u}|^2$, où l'on voit u à la fois comme un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et comme un nombre complexe. On pourrait calculer $f^* g_{\mathcal{S}}$ pour conclure. On procède autrement afin de limiter les calculs et développer le formalisme complexe.

Démonstration. Si on écrit $\mu = a + ib$, on a donc

$$f(\mu) = \frac{1}{(1-|\mu|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $\det f(\mu) = 1$. On calcule $d_{\mathcal{S}}(f(0), f(\mu))$; il suffit de calculer le spectre de $f(\mu)$, qui vérifie

$$\lambda^2 - \frac{2}{(1-|\mu|^2)^{1/2}}\lambda + 1 = 0\,.$$

On trouve ainsi

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm |\mu|}{(1-|\mu|^2)^{1/2}} = \left(\frac{(1\pm|\mu|)^2}{1-|\mu|^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1\pm|\mu|}{1\mp|\mu|}\right)^{1/2}\,.$$

Du coup

$$d_{\mathcal{S}}(f(0), f(\mu)) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\log\lambda_+)^2 + (\log 1/\lambda_+)^2\right]^{1/2} = |\log\lambda_+| = \frac{1}{2}\log\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}\,.$$

On a donc $d_{\mathcal{S}}(f(0), f(\mu)) = (1/2)d_{\mathbb{H}}(0,\mu)$.

Pour propager cette identité, on étudie la manière dont les applications linéaires opèrent sur les structures conformes $u \mapsto |u+\mu\bar{u}|^2$. En notation complexe, une application linéaire s'exprime sous la forme $A(z) = \lambda(z + \nu\bar{z})$, avec $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$. Cette application est inversible si, et seulement si, $\lambda \neq 0$ et $|\nu| \neq 1$. On peut supposer $\lambda = 1$ puisqu'on s'intéresse aux structures conformes. On a, au niveau des produits scalaires,

$$|A(u) + \mu\overline{A(u)}|^2 = |(u+\nu\bar{u}) + \mu(\bar{u}+\bar{\nu}u)|^2 = |(1+\mu\bar{\nu})u + (\nu+\mu)\bar{u}|^2$$

est qui conformément équivalent à

$$\left|u + \frac{\nu+\mu}{1+\mu\bar{\nu}}\bar{u}\right|^2$$

donc on déduit la formule

$$A^*\mu = \frac{\mu+\nu}{1+\bar{\nu}\mu}$$

et on reconnaît la formule d'un automorphisme du disque unité. Son action est donc isométrique sur $\mathbb{H}^2$. Par ailleurs, A et sa représentation linéaire $P \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifient $f(A^*\mu) = P[f(\mu)]$ pour tout $\mu \in \mathbb{H}^2$.

Pour conclure, prenons $\mu, \nu \in \mathbb{H}^2$. Il existe $P \in SL_2(\mathbb{R})$ tel que $P[f(\mu)] = I$ et soit A sa représentation complexe de sorte que $A^*\mu = 0$. On a

$$d_{\mathcal{S}}(f(\mu), f(\nu)) = d_{\mathcal{S}}(P[f(\mu)], P[f(\nu)]) = d_{\mathcal{S}}(f(0), f(A^*\nu)) = (1/2)d_{\mathbb{H}}(A^*\mu, A^*\nu) = (1/2)d_{\mathbb{H}}(\mu,\nu)\,.$$

5.2. **Homéomorphismes quasiconformes**

On renvoie à [Väi1, Väi2, IM, Hei, HK] pour les notions abordées ici.

Une application $f : X \to X'$ est η-quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous $a, b, c, d \in X$ deux à deux distincts, on a

$$[f(a) : f(b) : f(c) : f(d)] \leq \eta\left([a : b : c : d]\right) .$$

Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Notons

$$\begin{aligned} L_f(x,r) &= \sup_{|x-y|\leq r} |f(x) - f(y)| , \\ \ell_f(x,r) &= \inf_{|x-y|\geq r} |f(x) - f(y)| . \end{aligned}$$

On dit que f est *quasiconforme* s'il existe une constante H telle que, pour tout $x \in X$,

$$H_f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \limsup_{r\to 0} \frac{L_f(x,r)}{\ell_f(x,r)} \leq H .$$

THÉORÈME 5.9. — *Un homéomorphisme $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ est quasimöbius si et seulement si il est quasiconforme où H ne dépend que de η et réciproquement. On a aussi les propriétés suivantes.*

(i) f est différentiable de différentielle inversible presque partout et $|D_x f|^n \leq K_O Jac\, f(x)$ pour une constante $K_O \leq H^{n-1}$, où $Jac\, f(x) \stackrel{def.}{=} |\det D_x f|$.

(ii) f préserve les ensembles de mesure de Lebesgue nulle. On a, pour tout ensemble mesurable $A \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$,

$$|f(A)| = \int_A Jac\, f .$$

(iii) f est 1-quasiconforme, au sens où $K_O = 1$, si et seulement si f est une transformation de Möbius.

On note $K_O(f)$ la meilleure constante qui apparaît dans (ii). D'après ce théorème, f^{-1} est aussi quasiconforme (puisque les transformations quasimöbius forment un groupe). On note $K_I(f) = K_O(f^{-1})$.

EXERCICE 5.10. — *On se donne $f = P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer H_P, $k(P)$, $K_O(P)$, $K_I(P)$, $K(P) \stackrel{def.}{=} \exp k(P)$ en fonction des caractéristiques de P et relier ces quantités. Que peut-on dire si $n = 2$?*

Ces homéomorphismes sont donc caractérisés par une propriété infinitésimale —être quasiconforme, ce qui permet d'utiliser le calcul différentiel, et par une propriété globale —être quasimöbius, ce qui permet de contrôler leurs modules de continuité comme le montre l'exercice suivant.

EXERCICE 5.11. — *Soit $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de distorsion.*

(1) Montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ d'homéomorphismes η-quasimöbius de $\mathbb{S}^n$ telle qu'il existe trois points distincts $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{S}^n$ et $m > 0$ tels que $d(g(x_i), g(x_j)) \geq m$ pour $i \neq j$ est relativement compacte.

(2) Montrer qu'un groupe de transformations η-quasimöbius est de convergence.

On analyse maintenant le comportement des homéomorphismes quasiconformes sur les structures conformes.

DÉFINITION 5.12 (structure conforme mesurable). — *Une* structure conforme mesurable *est une application mesurable μ à valeurs dans $\mathcal{S}$ telle que $k(\mu(x))$ est essentiellement bornée.*

Si f est un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{S}^n$, alors f opère sur les structures conformes en posant

$$f^*\mu(x) = D_x f[\mu(f(x))].$$

On a $k(f^*\mu) = k(I, f^*\mu) \leq k(I, f^*I) + k(f^*I, f^*\mu) = k(I, f^*I) + k(I, \mu)$ donc $f^*\mu$ est bien essentiellement borné. On remarque que f agit par isométrie sur l'ensemble des structures conformes.

On définit alors $\mu_f = f^*I$. En dimension 2, chaque structure conforme mesurable est de la forme f^*I comme le montre le théorème de Riemann mesurable : il montre que l'équation aux dérivées partielles $\partial_{\bar{z}} f = \mu \partial_z f$, où $\mu \in L^\infty$ de norme $\|\mu\|_\infty < 1$, admet une solution qui est un homéomorphisme quasiconforme tel que $\mu_f = \mu$ presque partout. Cependant, ce n'est pas vrai en général en dimension plus grande. Une application quasiconforme f est une transformation de Möbius si et seulement si $\mu_f = I$ pp. d'après le théorème 5.9.

Soient μ et ν deux structures conformes sur $\mathbb{S}^n$; une application quasiconforme $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ munie de la structure conforme standard est aussi quasiconforme en tant qu'homéomorphisme $f : (\mathbb{S}^n, \mu) \to (\mathbb{S}^n, \nu)$ au sens où $k(\mu, f^*\nu)$ est essentiellement bornée. Cela découle du fait que $k(\cdot, \cdot)$ est une distance invariante et du contrôle qui s'en suit :

$$k(\mu, f^*\nu) \leq k(\mu, I) + k(I, f^*I) + k(I, \nu)\,.$$

On dit que f est K-quasiconforme si $\sup \operatorname{ess} \exp k(\mu, f^*\nu) \leq K$; on pose donc $K(f, \mu, \nu)(x) = K(f^*\nu, \mu)(x) = \exp k(f^*\nu, \mu)(x)$ là où k est bien définie, de sorte que f est K-quasiconforme si $K(f^*\nu, \mu) \leq K$ presque partout. Une application conforme $f : (\mathbb{S}^n, \mu) \to (\mathbb{S}^n, \nu)$ vérifie par définition $f^*\nu = \mu$.

EXERCICE 5.13. — *Soient μ_1, μ_2, μ_3 trois structures conformes mesurables et $f : (\mathbb{S}^n, \mu_1) \to (\mathbb{S}^n, \mu_2)$ et $g : (\mathbb{S}^n, \mu_2) \to (\mathbb{S}^n, \mu_3)$ deux applications quasiconformes. Montrer que $(g \circ f) : (\mathbb{S}^n, \mu_1) \to (\mathbb{S}^n, \mu_3)$ est $K(f^*\mu_2, \mu_1) K(g^*\mu_3, \mu_2)$-quasiconforme.*

On conclut par des propriétés héritées par les limites non constantes de transformations quasiconformes. Le résultat le plus abouti est sans doute le suivant.

THÉORÈME 5.14 (Tukia [Tuk, Th. D]). — *Soient μ, ν deux structures conformes mesurables et $((\mathbb{S}^n, \mu) \xrightarrow{f_k} (\mathbb{S}^n, \nu))_k$ une suite d'homéomorphismes K-quasiconformes qui tend vers un homéomorphisme $f : (\mathbb{S}^n, \mu) \to (\mathbb{S}^n, \nu)$. Si, pour $K' \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{k\to\infty} |\{x \in \mathbb{S}^n,\ K(f_k^*\nu, \mu)(x) \geq K' + \varepsilon\}| = 0$$

alors f est K'-quasiconforme. En particulier, f est K-quasiconforme.

Il n'est pas vrai en général que l'on aura convergence de $(f_k^*\nu)_n$ vers $f^*\nu$. Cependant, le théorème ci-dessus donne un résultat intéressant lorsque l'on peut choisir $K' = 1$.

COROLLAIRE 5.15. — *Soient μ et ν deux structures conformes mesurables et $((\mathbb{S}^n, \mu) \xrightarrow{f_k} (\mathbb{S}^n, \nu))_k$ une suite d'homéomorphismes K-quasiconformes qui tend vers un homéomorphisme $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Si $(f_k^*\nu)_k$ tend en mesure vers μ, alors $f : (\mathbb{S}^n, \mu) \to (\mathbb{S}^n, \nu)$ est conforme.*

En particulier, si $(\mu_{f_k})_k$ tend en mesure vers μ, alors on a $\mu_f = \mu$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 5.15. Si $(f_k^*\nu)_k$ tend en mesure vers μ, alors on a aussi convergence en mesure de $(K(f_k^*\nu, \mu))_k$ vers 1. Donc le théorème 5.14 affirme que f est 1-quasiconforme, donc conforme. Pour le second point, on applique ce qui précède à la suite $((\mathbb{S}^n, \mu) \xrightarrow{f_k} (\mathbb{S}^n, I))_k$. ■

5.3. **La rigidité de Mostow**

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour montrer le théorème de Mostow.

THÉORÈME 5.16 (G. D. Mostow [Mos]). — *Soient M_1 et M_2 deux variétés compactes hyperboliques et supposons que la dimension de M_1 est au moins 3. Si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes, alors les variétés sont isométriques.*

DÉMONSTRATION. Pour $j = 1, 2$, notons d_j la dimension de M_j. Par hypothèses, il existe un sous-groupe d'isométries G_j de $\mathbb{H}^{d_j}$ tels que $\mathbb{H}^{d_j}/G_j \simeq M_j$ et un isomorphisme $\rho : G_1 \to G_2$. Le groupe G_j opère géométriquement sur $\mathbb{H}^{d_j}$. D'après le lemme de Švarc-Milnor, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{d_j}$ est quasi-isométrique à l'orbite d'un point $G_j(w_j)$, $w_j \in \mathbb{H}^{n_j}$. On définit $\phi : G_1(w_1) \to G_2(w_2)$ par $\phi(g(w_1)) = \rho(g)(w_2)$. On obtient ainsi une quasi-isométrie équivariante $\Phi : \mathbb{H}^{d_1} \to \mathbb{H}^{d_2}$.

Les propositions 4.17 et 4.19 impliquent que l'action de G_j sur $\mathbb{H}^{d_j}$, $j = 1, 2$, se prolonge en une action de convergence uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^{d_j-1}$ par transformations de Möbius.

Par le théorème 4.22, Φ se prolonge en un homéomorphisme quasimöbius $\varphi : \mathbb{S}^{d_1-1} \to \mathbb{S}^{d_2-1}$, équivariant par continuité. Cela implique notamment que $d_1 = d_2$ et on notera d cette dimension commune.

Si φ est une transformation de Möbius, alors φ se prolonge en une isométrie de $\mathbb{H}^d$ — équivariante par unicité de l'extension, cf. la proposition 3.18 et le théorème 4.2. Montrons que c'est bien le cas. Si non, comme $(d - 1) \geq 2$, φ est quasiconforme et différentiable presque partout d'après le théorème 5.9, donc μ_φ définit une structure conforme mesurable invariante par l'action de G_1 car

$$g_1^*\mu_\phi = g_1^*\varphi^* I = \varphi^*(\varphi g_1 \varphi^{-1})^* I = \varphi^* \rho(g_1)^* I = \varphi^* I = \mu_\phi\,,$$

qui est différente de I sur un ensemble de mesure strictement positive.

Comme μ_ϕ est mesurable et bornée, elle est presque continue presque partout au sens que

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\{|\mu - \mu(x)| \geq \varepsilon\} \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et presque tout $x \in \partial\mathbb{H}^d$.

On se place dans le modèle du demi-espace. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point de presque continuité tel que $\mu_\phi(a) \neq I$, et considérons une suite de similitudes $h_k : x \mapsto \lambda_k(x-a) + a$ où $\lim \lambda_k = 0$. Pour tout $R > 0$, on a sur $B(0,R)$,

$$\frac{|\{h_k^*\mu_\phi - \mu_\phi(a)| \geq \varepsilon\} \cap B(0,R)|}{|B(0,R)|} \to 0\,.$$

Donc, $(h_k^*\mu_\phi)$ tend en mesure vers $\mu_\phi(a)$ sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

On se fixe un triplet (a,b,c) de points distincts de $\mathbb{R}^n$. Puisque l'action de convergence de G_1 est uniforme, il existe une suite $(g_k)_k$ de G_1 telle que $(g_k h_k(a,b,c))_k$ est relativement compacte dans l'espace des triplets de points distincts. On en déduit que $(g_k h_k)_k$ est une suite de transformations de Möbius relativement compacte. Quitte à extraire une sous-suite, elle est convergente vers une transformation de Möbius h.

On se fixe à nouveau $R > 0$. On remarque que $\phi_k \stackrel{\text{def.}}{=} \phi \circ (g_k \circ h_k)$ est convergente et $\mu_{\phi_k} = h_k^*\mu_\phi$ tend en mesure vers $\mu_\phi(a)$. D'après le corollaire 5.15, on a donc $h^*\mu_\phi = \mu_\phi(a)$ sur $B(0,R)$, donc sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$ presque partout. Le groupe $G = h^{-1}G_1 h$ est un groupe de Möbius qui préserve un champ d'ellipsoïdes constant presque partout sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Cela implique que le point à l'infini est fixe par G, ce qui est absurde (la moindre transformation qui ne fixe pas l'infini envoie un champ constant au voisinage de l'infini sur un champ non constant).

■

5.4. Rigidité quasi-isométrique des groupes fondamentaux des variétés hyperboliques compactes de dimension au moins 3

On utilise la même stratégie pour montrer la rigidité quasi-isométrique des réseaux uniformes de l'espace hyperbolique.

THÉORÈME 5.17 (Cannon-Cooper [CC]). — *Un groupe de type fini quasi-isométrique à $\mathbb{H}^d$ est virtuellement isomorphe au groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension d.*

Le cas de la dimension 2 utilise d'autres méthodes, cf. [Gab, CJ]. On suppose $d \geq 3$. On procède en différentes étapes. On montre tout d'abord qu'un tel groupe admet une action par homéomorphismes uniformément quasiconformes sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Un tel groupe préserve une structure conforme mesurable. On s'appuie sur cette structure pour construire une conjugaison de l'action de G à une action par transformations de Möbius.

PROPOSITION 5.18. — *Soit G un groupe quasi-isométrique à $\mathbb{H}^d$, $d \geq 2$. Le groupe G admet une action de convergence uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$ par homéomorphismes uniformément quasiconformes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\phi : G \to \mathbb{H}^d$ et $\psi : \mathbb{H}^d \to G$ deux (λ, c)-quasi-isométries quasi-inverses l'une de l'autre. On définit $\rho : G \to \mathrm{QI}(\mathbb{H}^d)$ par $\rho(g) = \psi \circ g\phi$. On vérifie que ρ est une quasi-action au sens où il existe $C \geq 0$ telle que $d(\rho(g)\rho(h), \rho(gh) \leq C$ pour tous $g, h \in G$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} d(\rho(g)\rho(h)(x), \rho(gh)(x) & = & d(\psi g\phi\psi h\phi(x), \psi gh\phi(x)) \\ & \leq & \lambda d(g\phi\psi h\phi(x), gh\phi(x)) + c \\ & \leq & \lambda d(\phi\psi h\phi(x), h\phi(x)) + c \\ & \leq & \lambda c + c\,. \end{array}$$

Le théorème 4.22 implique que chaque $\rho(g)$ est une transformation quasi-möbius. De plus, comme $d(\rho(g)\rho(h), \rho(gh) \leq C$, les extensions coïncident sur $\mathbb{S}^{d-1}$, c'est-à-dire $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$. On obtient donc une action de groupe.

Comme G opère par transtormations uniformément quasimöbius, il s'agit d'un groupe de convergence, cf. l'exercice 5.11. On montre maintenant que l'action est uniforme. Pour cela, rappelons que l'application $p : \partial^3\mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^d$ qui associe à (a, b, c) la projection de c sur (a, b) est propre. Il suffit donc de montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que $p^{-1}(B(\phi(e), R))$ contient un domaine fondamental de l'action diagonale de G sur $\partial^3\mathbb{H}^d$.

Soit donc (a, b, c) un triplet de points distincts sur $\partial\mathbb{H}^d$ et notons $p = p(a, b, c) \in \mathbb{H}^d$. Comme $\phi : G \to \mathbb{H}^d$ est une quasi-isométrie, il existe $g \in G$ tel que $d(\phi(g), p) \leq c$. On a

$$\begin{array}{rclcl} d(\rho(g^{-1})(\phi g), \phi(e)) & = & d(\phi g^{-1}(\psi\phi g), \phi(e)) & \leq & \lambda d(g^{-1}(\psi\phi)g, e) + c \\ & \leq & \lambda d(\psi\phi(g), g) + c & \leq & \lambda c + c\,. \end{array}$$

On écrit $q = p(\rho(g^{-1})(a), \rho(g^{-1})(b), \rho(g^{-1})(c))$. Du coup,

$$d(q, \phi(e)) \leq d(q, \rho(g^{-1})(p)) + d(\rho(g^{-1})(p), \rho(g^{-1})(\phi g)) + d(\rho(g^{-1})(\phi g), \phi(e)) \leq R$$

par la scholie 4.23, où $R = R(\lambda, c) \geq 0$. On a donc montré que $p^{-1}(B(\phi(e), R))$ contient un domaine fondamental de l'action diagonale de G sur $\partial\mathbb{H}^d$. ■

Groupes uniformément quasiconformes.— On se fixe $n \geq 2$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 5.19 (D. Sullivan, P. Tukia). — *Un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius de $\mathbb{S}^n$ est conjugué à un groupe discret de transformations de Möbius cocompact.*

La démonstration résulte de deux étapes. Dans la première, on montre qu'il existe une structure conforme sur $\mathbb{S}^n$ invariante par l'action du groupe. Dans la seconde, on montre que cette structure est équivalente à la structure standard, ce qui permet de conclure. La démonstration originale se trouve dans [Tuk].

On utilise ici que l'espace des structures conformes est CAT(0). Un espace métrique CAT(0) X est un espace géodésique qui vérifie la propriété suivante. Un triangle $\Delta = \Delta(x_1, x_2, x_3)$ est la donnée de trois points distincts $x_1, x_2, x_3 \in X$ et de trois segments géodésiques deux à deux. On lui associe un triangle de comparaison $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne standard tels que $d(x_i, x_j) = |\bar{x}_i - \bar{x}_j|_e$ pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$. On définit ainsi une application $f_\Delta : \Delta \to \bar{\Delta}$ qui envoie x_j sur $\bar{x}_j$ et qui est une isométrie restreinte à chaque côté de Δ. L'espace X est CAT(0) si les triangles Δ de X sont plus fins que leurs triangles de comparaison, c'est-à-dire si l'application f_Δ dilate les distances : $d(x, y) \leq |f_\Delta(x) - f_\Delta(y)|_e$ pour tous $x, y \in \Delta$.

Cette propriété nous servira sous la forme suivante : deux points sont liés par une unique géodésique, et si D_1 et D_2 sont deux rayons issus d'une même origine o qui font un angle riemannien $\theta \in [0, \pi]$, alors, pour tous $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$, on a

$$d(x_1, x_2)^2 \geq d(o, x_1)^2 + d(o, x_2)^2 - 2d(o, x_1)d(o, x_2)\cos\theta\,.$$

EXERCICE 5.20. — *Soient X un espace métrique CAT(0) et D_1 et D_2 deux rayons issus d'une même origine o.*

(1) On considère quatre points $x_1, x_1' \in D_1$ et $x_2, x_2' \in D_2$, on suppose $d(o, x_1) > d(o, x_1') > 0$ et $d(o, x_2) > d(o, x_2') > 0$ et on note θ et θ' les angles au point $\bar{o}$ des triangles de comparaison $(\bar{o}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $(\bar{o}, \bar{x}_1', \bar{x}_2')$. Montrer que $\theta' \leq \theta$. En déduire que

$$\widehat{x_1 o x_2} \overset{def.}{=} \lim_{x_1 \in D_1 \to o, x_2 \in D_2 \to o} \widehat{\bar{x}_1 \bar{o} \bar{x}_2}$$

existe et minore tous les angles des triangles de comparaison correspondant. On appelle cette limite l'angle des rayons D_1 et D_2.

(2) Montrer que pour tous $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$, on a

$$d(x_1, x_2)^2 \geq d(o, x_1)^2 + d(o, x_2)^2 - 2d(o, x_1)d(o, x_2)\cos\theta$$

où $\theta = \widehat{x_1 o x_2}$ désigne l'angle des rayons.

(3) Si X est de plus riemannien, montrer que l'angle des rayons coïncide avec l'angle riemannien des vecteurs tangents aux rayons en o.

On montre

PROPOSITION 5.21. — *Si $X \subset \mathcal{S}$ est un ensemble borné, alors il existe un unique couple (p, r) tel que $X \subset \overline{B(p, r)}$, et où r est le plus petit rayon d'une boule qui contient X. De plus, l'application $X \mapsto (p, r)$ est continue pour la topologie de Hausdorff.*

Démonstration. L'existence d'un tel couple provient d'un argument de compacité. Supposons que l'on ait deux points p_1 et p_2 tels que $X \subset \overline{B(p_1,r) \cap B(p_2,r)}$. Soit w le point au milieu du segment $[p_1,p_2]$.

Si $x \in \overline{B(p_1,r) \cap B(p_2,r)}$, alors l'un des angles $\theta_1 = (\widehat{x,w,p_1})$ ou $\theta_2 = (\widehat{x,w,p_2})$ est plus grand que $\pi/2$ car la somme des angles riemanniens vaut au moins π. Dans le premier cas, on obtient en utilisant la condition CAT(0)

$$r^2 \geq d(x,p_1)^2 \geq d(w,p_1)^2 + d(w,x)^2 - 2d(w,p_1)d(w,x)\cos\theta_1 > d(x,w)^2$$

et par compacité de $\overline{B(p_1,r) \cap B(p_2,r)}$, on trouve $r' < r$ tel que $X \subset \overline{B(w,r')}$, ce qui contredit la définition de r.

La continuité de (p,r) est laissée en exercice. ∎

On en déduit

Proposition 5.22. — *Soit G un groupe de convergence quasimöbius qui opère sur $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$. Alors il existe une structure conforme invariante par G sur $\mathbb{S}^n$.*

Démonstration. Il existe un ensemble de mesure pleine sur $\mathbb{S}^n$ invariant par G tel que toutes les applications $g \in G$ soient différentiables en chacun de ces points et que le jacobien est strictement positif, puisque G est un groupe dénombrable d'homéomorphismes quasiconformes.

Notons $M_x = \{\mu_g(x),\ g \in G\}$. C'est un ensemble borné par définition. Donc la proposition 5.21 s'applique et nous fournit un unique couple (p_x, r_x) tel que $M_x \subset B(p_x, r_x)$.

Puisque G opère par isométries sur les structures conformes, on en déduit que $g^*(M_{g(x)}) = M_x$, donc $g^*(p_{g(x)}) = p_x$ et $r_{g(x)} = r_x = r$. Du coup, si on note $\mu(x) = p_x$, alors μ définit une structure conforme invariante. La mesurabilité s'obtient en considérant une suite croissante de $\mu_g(x)$, g parcourant un ensemble fini, ainsi que la continuité du centre. ∎

Les méthodes de groupes de convergence uniforme sont maintenant utilisées pour redresser cette structure conforme.

Proposition 5.23. — *Si G est un groupe de convergence uniforme, conforme pour une structure μ, alors G est conjugué à un groupe de transformation de Möbius.*

Démonstration. On se place dans $\widehat{\mathbb{R}}^n$. On peut supposer que $a \in \mathbb{R}^n$ est un point de presque continuité de μ au sens que

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\{|\mu - \mu(a)| \geq \varepsilon\} \cap B(a,r)|}{|B(a,r)|} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Prenons $h_k(x) = a + \lambda_k(x-a)$ avec $\lim \lambda_k = 0$. Comme dans la démonstration du théorème de Mostow, on a convergence en mesure de $h_k^*\mu$ vers la structure constante $\mu(a)$. Prenons $P \in SL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^*\mu(a) = I$.

Comme l'action de G est cocompacte sur les triplets de points distincts, on peut trouver $m > 0$, deux points distincts b et c différents de a et $(g_k) \in G$ telle que $g_k h_k(a,b,c)$ soit m-séparé pour tout $k \geq 0$. Du coup, l'exercice 5.11 nous permet de supposer que cette suite est convergente vers un homéomorphisme quasimöbius. Par conséquent, $\phi_k \overset{\text{def.}}{=} g_k h_k P$ définit une suite d'homéomorphismes quasimöbius qui converge vers un homéomorphisme ϕ.

On a $\phi_k^*\mu = (g_k h_k P)^*\mu = P^*(h_k^*\mu)$ qui tend donc en mesure vers la structure standard I. D'après le corollaire 5.15, on obtient en considérant la suite $((\mathbb{S}^n, I) \xrightarrow{\phi_k} (\mathbb{S}^n, \mu))_k$ la conformité de $\phi : (\mathbb{S}^n, I) \to (\mathbb{S}^n, \mu)$.

Considérons $G' = \phi^{-1}G\phi$. Observons que, pour $g \in G$ et $g' = \phi^{-1}g\phi$, on a

$$(g')^*I = (g')^*[\phi^*\mu] = \phi^*[g^*\mu] = \phi^*\mu = I\,.$$

Par conséquent G' est un groupe de transformations 1-quasiconformes donc de Möbius par le théorème 5.9. ■

REMARQUE 5.24. — Lorsque $n = 2$, le théorème de Riemann mesurable nous donne directement l'existence d'un homéomorphisme quasiconforme tel que $\phi^*I = \mu$. Il s'agit du résultat de D. Sullivan, pour lequel la notion de groupe de convergence uniforme n'est pas utile. Néanmoins, les résultats de P. Tukia sont en fait aussi plus généraux (essentiellement, il suffit que les points coniques forment un ensemble de mesure positive).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.17. Soit G un groupe quasi-isométrique à $\mathbb{H}^d$, $d \geq 3$. D'après la proposition 5.18, G admet une action de convergence uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1}$ par homéomorphismes uniformément quasiconformes. Par conséquent, le théorème 5.19 montre que l'action de G est conjuguée à celle d'un groupe de Möbius. Quitte à quotienter par le noyau de l'action (qui est fini puisque l'action est propre sur les triplets de points), on obtient un groupe de Möbius virtuellement isomorphe à G. Comme l'action est de convergence uniforme, on en déduit que l'action du groupe de Möbius est cocompacte. ■

RÉFÉRENCES

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[CJ] Andrew Casson and Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.* **118**(1994), 441–456.

[DK] Cornelia Druţu and Michael Kapovich. *Geometric group theory*, volume 63 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. With an appendix by Bogdan Nica.

[Gab] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Ann. of Math. (2)* **136**(1992), 447–510.

[Hei] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[HK] Juha Heinonen and Pekka Koskela. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.* **181**(1998), 1–61.

[IM] Tadeusz Iwaniec and Gaven J. Martin. *Geometric function theory and non-linear analysis.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2001.

[Tuk] Pekka Tukia. On quasiconformal groups. *J. Analyse Math.* **46**(1986), 318–346.

[Väi1] Jussi Väisälä. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229.

[Väi2] Jussi Väisälä. Quasi-Möbius maps. *J. Analyse Math.* **44**(1984/85), 218–234.