4. L'ESPACE HYPERBOLIQUE ET SON BORD À L'INFINI

On considère l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ de dimension $n \geq 2$. Le but est de définir une compactification naturelle de $\mathbb{H}^n$ en lui associant un bord à l'infini $\partial\mathbb{H}^n$ naturellement conforme à $\mathbb{S}^n$. On étudie les quasi-isométries de $\mathbb{H}^n$ dans ce contexte.

4.1. Géométrie hyperbolique

On présente deux modèles conformes de l'espace hyperbolique et on montre que ses isométries correspondent aux transformations de Möbius de ces modèles.

4.1.1. *La boule conforme.* On note $|\cdot|_e$ la norme euclidienne. On définit sur la boule unité B de $\mathbb{R}^n$ la métrique riemannienne g_B comme suit. Si $x \in B$ et si $v, w \in T_xB$,

$$\langle v, w\rangle_B = \frac{4(v \cdot w)}{(1 - |x|_e^2)^2}\,.$$

L'espace (B, g_B) est un modèle de $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire ces espaces sont isométriques.

On note d_B la distance riemannienne associée. Il vient que, sur chaque espace tangent, les angles issus de la nouvelle structure riemannienne coïncident avec ceux de la métrique euclidienne sous-jacente : l'application identique entre (B, d_B) et (B, d_e) est conforme.

4.1.2. *Le demi-espace.* Notons $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$. On définit, pour $x \in U_n$, $v, w \in T_xU_n$,

$$\langle v, w\rangle_U = \frac{(v \cdot w)}{x_n^2}\,.$$

Il s'agit d'un autre modèle conforme.

Théorème 4.1. — *L'espace (U_n, d_U) est isométrique à $\mathbb{H}^n$.*

Démonstration. On considère la projection stéréographique p_σ, c'est-à-dire l'inversion par rapport à la sphère de centre $o = (0, -1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et de rayon $\sqrt{2}$. Elle transforme la boule unité en le demi-espace supérieur puisque la sphère unité passe par le centre de l'inversion, l'origine a une image dans U_n et que la trace de la sphère unité sur $\{x_n = 0\}$ reste fixe. Il reste à vérifier que la restriction $p_\sigma : B \to U$ est bien une isométrie.

En notant $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, on trouve $p_\sigma(x) = (2x'/|x - o|_e^2, (1 - |x|_e^2)/|x - o|_e^2)$. Rappelons $T_xp_\sigma(v) \cdot T_xp_\sigma(w) = 4(v \cdot w)/|x - o|^4$. Il vient

$$p_\sigma^* g_U(v, w) = \frac{4(v \cdot w)}{|x - o|^4} \times \frac{1}{(1 - |x|_e^2)^2/|x - o|_e^4} = \frac{4(v \cdot w)}{(1 - |x|_e^2)^2} = g_B(v, w)\,.$$

Donc p_σ est bien une isométrie. ■

4.1.3. *Le groupe d'isométries.*

Théorème 4.2. — *Le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n$ dans le modèle de la boule coïncide avec le groupe des transformations de Möbius qui préservent B : on a* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq \mathrm{Möb}(B)$.

Démonstration. On montre d'abord que les transformations de Möbius qui préservent la boule unité sont des isométries. On observe que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ opère par isométries puisque la métrique g_B ne dépend que de la distance du point à l'origine. Par la proposition 3.18, il suffit de considérer les inversions par rapport aux sphères orthogonales à $\mathbb{S}^{n-1}$. Prenons I_S une telle inversion. Quitte à conjuguer par un élément de $O_n(\mathbb{R})$, on peut supposer $o = (0_{n-1}, -1) \in S$. Du coup, par la proposition 3.12, $p_\sigma \circ I_S \circ p_\sigma$ est une réflexion par rapport à un hyperplan orthogonal à $\mathbb{R}^{n-1}$. Or, dans U_n, la métrique hyperbolique ne dépend que de la hauteur x_n, invariante par ces réflexions. Donc $\mathrm{Möb}(B) < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Pour montrer la réciproque, on observe également que les similitudes qui préservent U_n sont aussi des isométries puisqu'elles préservent les hyperplans parallèles à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Soit $f : B \to B$ une isométrie hyperbolique. L'application $p_\sigma \circ f \circ p_\sigma$ est une isométrie dans le modèle de U_n, donc on peut trouver une similitude g préservant U_n telle que $g[(p_\sigma \circ f)(0)] = p_\sigma(0)$ de sorte que $(p_\sigma g p_\sigma) \circ f$ est une isométrie qui fixe $0 \in B$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ opère transitivement sur les bases orthonormées, on peut trouver $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A \circ T_0((p_\sigma g p_\sigma) \circ f) = \mathrm{Id}$ sur $T_0 B$. Les rayons géodésiques issus de 0 sont donc invariants, et on conlut $A \circ (p_\sigma g p_\sigma) \circ f = \mathrm{Id}$. Par conséquent, f est une transformation de Möbius.■

4.2. **Bord intrinsèque de l'espace hyperbolique**

On se place dans le modèle de la boule. On a vu que les isométries étaient données par des produits d'inversions par rapport à des sphères orthogonales à $\mathbb{S}^{n-1}$. Par conséquent, chaque isométrie opère sur $\mathbb{S}^{n-1}$ (sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tout entier, d'ailleurs) par transformations de Möbius.

Nous allons réinterpréter ces résultats de manière plus intrinsèque en s'appuyant sur [EO, Bou1, Bou2].

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des rayons de $\mathbb{H}^n$ sur lequel on met la relation d'équivalence $r \sim r'$ si $d_H(r, r') < \infty$. On désigne $\mathcal{R}/\sim$ par $\partial\mathbb{H}^n$. On a une bijection naturelle entre $\partial\mathbb{H}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$.

Si $w \in \mathbb{H}^n$ est fixé, on note $\mathcal{R}_w$ les rayons issus de w.

Exercice 4.3. — *On a une bijection naturelle entre $\mathcal{R}/\sim$ et $\mathcal{R}_w$ (utiliser le modèle de la boule, par exemple).*

On munit $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ de la topologie suivante. On identifie $\mathbb{H}^n$ aux segments issus de w en considérant $r_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{H}^n$ qui paramètre le segment $[w, x]$ sur $[0, d(w, x)]$ puis est constante à x au-delà. Un système de voisinages de $x \in \mathbb{H}^n$ est donné par les boules hyperboliques (de rayon fini). Si $r_0 \in \mathcal{R}$, on écrit $V_{r_0}(R, \varepsilon)$ l'ensemble des rayons r de

$\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ tels que $d(r_0(R), r(R)) \leq \varepsilon$. Une base de voisinages d'un point $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ est donnée par la famille $V_{r_0}(R, \varepsilon)$, où r_0 représente ξ et $R, \varepsilon > 0$.

On observe que si $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, alors, pour tout rayon $r \in \mathcal{R}$, son image $g(r)$ est un rayon et g préserve également les classes d'équivalence ainsi que leurs voisinages, donc g opère sur $\partial\mathbb{H}^n$ par homéomorphismes.

Exercice 4.4. — *Montrer qu'il existe un homéomorphisme entre $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ et $\{x \in \mathbb{R}^n,\ |x|_e \leq 1\}$.*

Si $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$, on dit que r aboutit en ξ si r représente ξ.

Exercice 4.5. — *Soit X un espace métrique. Rappelons que si $x, y, z \in X$, on pose*

$$(x|y)_z = \frac{1}{2}(|x - z| + |y - z| - |x - y|)\,.$$

Soit $w \in X$ un point base. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ tend vers l'infini si

$$\liminf_{m,n\to\infty}(x_n|x_m)_w = \infty$$

et on dit que deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers l'infini sont équivalentes si $\lim(x_n|y_n) = \infty$. On note $\partial_G X$ l'ensemble de ces classes d'équivalence. Si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont deux classes d'équivalence, on définit

$$(\underline{x}|\underline{y})_w = \sup_{(x_n)=\underline{x},(y_n)=\underline{y}} \liminf_{i,j\to\infty}(x_i|y_j)_w\,,$$

et on définit $V(\underline{x}, R)$ par l'ensemble des classes $\underline{y}$ telles que $(\underline{x}|\underline{y})_w > R$.

(1) Montrer que pour toute isométrie g de X et tous $x, y \in X \cup \partial_G X$ et $w \in X$, on a $(x|y)_w = (g(x)|g(y))_{g(w)}$.

(2) Montrer que $\{V(\cdot, R),\ R > 0\}$, définit une topologie sur $\partial_G X$.

(3) On prend $X = \mathbb{H}^n$, montrer que $\partial_G\mathbb{H}^n$ est homéomorphe à $\partial\mathbb{H}^n$.

(4) On prend $X = \mathbb{R}^n$. Déterminer $\partial\mathbb{R}^n$ (obtenu par les classes des rayons) et $\partial_G\mathbb{R}^n$.

4.3. **Fonctions de Busemann**

Soit r un rayon. On considère

$$b_r(x) = \lim_{t\to\infty} d(r(t), x) - t\,.$$

Cette fonction est bien définie puisque, si $t \geq t'$, alors

$$d(r(t), x) - t - d(r(t'), x) + t' \leq d(r(t), r(t')) - |t' - t| \leq 0$$

donc $t \mapsto d(r(t), x) - t$ est décroissante, et minorée par $-d(r(0), x)$.

Exercice 4.6. — *On considère le modèle du demi-espace supérieur marqué du point ξ à l'infini.*

(1) Montrer que les rayons qui aboutissent en ξ sont des demi-droites verticales de $\mathbb{R}^n$.

(2) *Soient* $r, r' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{H}^n$ *deux rayons qui aboutissent en* ξ. *Montrer qu'il existe* $u \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim_{t\to\infty} d(r(t), r(u+t)) = 0$.

Définition 4.7 (Fonction de Busemann, horosphères). — *Si* $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ *et* $x, y \in \mathbb{H}^n$, *on définit*

$$\beta_\xi(x, y) = b_r(x) - b_r(y)$$

où r *aboutit en* ξ *(cette limite est indépendante du rayon car ils sont tous asymptotes). Les lignes de niveau* $\{b_r(x) = L\}$ *sont les horosphères et* $\{b_r < L\}$ *les horoboules.*

Exercice 4.8. — *On considère le modèle du demi-espace supérieur marqué du point* ξ *à l'infini et du point* $w = (0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1} \times]0, +\infty[$.

(1) *On considère* $x = (x', x_n)$ *et* (y', y_n) *dans* $\mathbb{R}^{n-1} \times]0, +\infty[$. *Montrer que* $\beta_\xi(x, y) = \ln(y_n/x_n)$.

(2) *En déduire que les horosphères centrées en* ξ *sont des hyperplans affines parallèles à* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et ses horoboules des demi-espaces. .*

(3) *Soit* $x_k = (0', y_k) \in \mathbb{R}^{n-1} \times]0, +\infty[$ *une suite qui tend vers l'infini et soit* $H = \{x \in \mathbb{H}^n,\ \beta_\xi(x, w) < R\}$ *une horoboule où* $R \in \mathbb{R}$. *On considère la boule hyperbolique* B_k *centrée en* x_k *de rayon* $d(w, x_k)$. *Montrer que si* $x \in H$, *alors* $x \in B_k$ *pour tout* k *assez grand et si* $x \notin \mathbb{H}^n \setminus \overline{H}$ *alors* $x \notin B_k$ *pour tout* k *assez grand.*

Fait 4.9. — *On a les propriétés suivantes :*

(1) *Pour toute isométrie* $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, $\xi \in \mathbb{H}^n$ *et* $x, y \in \mathbb{H}^n$, *on a* $\beta_\xi(x, y) = \beta_{g(\xi)}(g(x), g(y))$.

(2) $\beta_\xi(x, y) = -\beta_\xi(y, x)$.

(3) $\beta_\xi(x, y) = \beta_\xi(x, z) + \beta_\xi(z, y)$.

(4) $|\beta_\xi(x, y)| \leq d(x, y)$, *avec égalité si* x, y, ξ *sont alignés.*

On laisse la démonstration de ce fait en exercice.

Proposition 4.10. — *L'application* $(\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n) \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ *qui à* $(\xi, x, y) \mapsto \beta_\xi(x, y)$ *est continue, où* $\beta_\xi(x, y) \overset{def.}{=} d(x, \xi) - d(\xi, y)$ *pour* $\xi \in \mathbb{H}^n$.

On établit d'abord une autre expression de la fonction de Busemann.

Lemme 4.11. — Soient $x \in \partial\mathbb{H}^n$ et $x, y \in \mathbb{H}^n$. On a

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{z\to\xi} [d(x, z) - d(z, y)] .$$

Ce lemme est important en ce qu'il permet aussi d'identifier la compactification de Busemann et celle de Gromov.

Démonstration du lemme 4.11. Soient $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$. On considère les rayons $r = [x, \xi)$ et $r' = [y, \xi)$. Prenons $u \in \mathbb{R}$ pour que $d(r(t), r'(t+u))$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. On se fixe R assez grand pour que $d(r(R), r'(R+u)) \leq \varepsilon/2$ et

$$|\beta_\xi(x, y) - [d(x, r(R)) - d(y, r(R))]| \leq \varepsilon .$$

Notons $U = V_r(R,\varepsilon) \cap V_{r'}(R+u,\varepsilon)$, un voisinage de ξ.

Soit $z_0 \in U \cap \mathbb{H}^n$ et prenons un point z de $[x, z_0]$ dans la boule $B(r(R),\varepsilon)$ et z' un point de $[y, z_0]$ dans la boule $B(r'(R+u),\varepsilon)$. On a

$$[d(x,z_0) - d(z_0,y)] = [d(x,z) - d(y,z')] + [d(z,z_0) - d(z',z_0)]\,.$$

Or $|d(y,z') - d(y,r(R))| \leq d(z',r'(R+u)) + d(r'(R+u),r(R)) \leq (3/2)\varepsilon$. En outre, $|d(x,z) - d(x,r(R))| \leq d(r(R),z) \leq \varepsilon$.

Par conséquent

$$|[d(x,z) - d(y,z')] - [d(x,r(R)) - d(y,r(R))]| \leq (5/2)\varepsilon$$

et

$$|[d(x,z) - d(y,z')] - \beta_\xi(x,y)] \leq (7/2)\varepsilon.$$

Par ailleurs,

$$|d(z,z_0) - d(z',z_0)| \leq d(z,z') \leq d(z,R(r)) + d(r(R),r'(R+u)) + d(r'(R+u),z') \leq (5/2)\varepsilon$$

donc

$$|\beta_\xi(x,y) - [d(x,z_0) - d(z_0,y)]| \leq 6\varepsilon\,.$$

■

Démonstration de la proposition 4.10. La continuité sur $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$ découle des définitions. On étudie donc la continuité en un triplet $(\xi,x,y) \in \partial\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n$. On écrit grâce au fait 4.9

$$\begin{aligned}
|\beta_\xi(x,y) - \beta_{\xi'}(x',y')| &\leq |\beta_\xi(x,y) - \beta_{\xi'}(x,y)| + |\beta_{\xi'}(x,y) - \beta_{\xi'}(x',y')| \\
&\leq |\beta_\xi(x,y) - \beta_{\xi'}(x,y)| + |\beta_{\xi'}(x,x')| + |\beta_{\xi'}(y,y')| \\
&\leq |\beta_\xi(x,y) - \beta_{\xi'}(x,y)| + d(x,x') + d(y,y')\,.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme 4.11 nous permet de considérer un voisinage U de ξ tel que $|\beta_\xi(x,y) - \beta_z(x,y)| \leq \varepsilon$ pour $z \in U \cap \mathbb{H}^n$. Prenons $\xi' \in U \cap \partial\mathbb{H}^n$, il existe aussi un voisinage $U' \subset U$ de ξ' tel que $|\beta_{\xi'}(x,y) - \beta_z(x,y)| \leq \varepsilon$ pour $z \in U' \cap \mathbb{H}^n$. Du coup, l'inégalité triangulaire appliquée à l'aide de $z \in U'$ montre $|\beta_\xi(x,y) - \beta_{\xi'}(x,y)| \leq 2\varepsilon$. La continuité en découle. ■

4.4. **Produit de Gromov à l'infini**

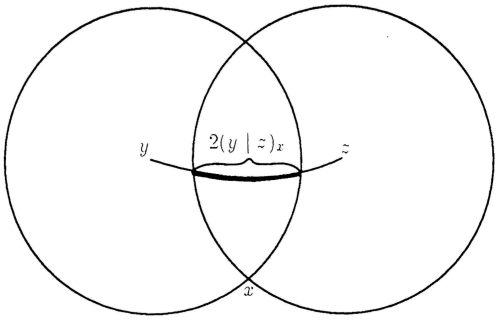
On montre que le produit de Gromov se prolonge continûment à l'infini et comment retrouver la métrique euclidienne de la sphère unité.

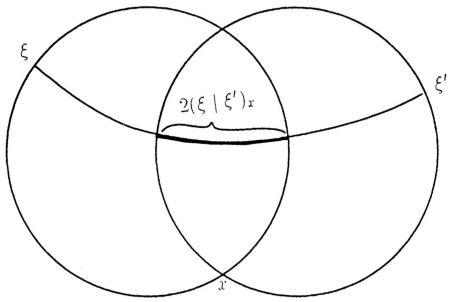
Proposition 4.12. — *Soit $w \in \mathbb{H}^n$, $\xi,\zeta \in \partial\mathbb{H}^n$ et γ la géodésique entre ξ et ζ. On a*

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,\zeta)} (x|y)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w,p) + \beta_\zeta(w,p))$$

où $p \in \gamma$. La limite est indépendante de p et on la note $(\xi|\zeta)_w$. De plus, si x, y sont dans $\mathbb{H}^n$, alors

$$(\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y = \frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y) + \beta_\zeta(x,y))\,. \tag{2}$$





Démonstration. On considère deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers ξ et ζ. On considère $p_n \in [x_n, y_n]$ qui réalise la distance à w. On note que p_n reste dans un ensemble borné. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que p_n tend vers $p \in \gamma$.

On a

$$\begin{aligned}
(x_n|y_n)_w &= \frac{1}{2}(d(w,x_n) + d(w,y_n) - d(x_n,y_n)) \\
&= \frac{1}{2}(d(w,x_n) + d(w,y_n) - (d(x_n,p_n) + d(p_n,y_n))) \\
&= \frac{1}{2}(d(w,x_n) - d(x_n,p_n)) + \frac{1}{2}(d(w,y_n) - d(p_n,y_n))
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on a bien

$$\lim_n (x_n|y_n)_w = \frac{1}{2}(\beta_\xi(w,p) + \beta_\zeta(w,p))\,.$$

Soit q un autre point de γ, $\beta_\xi(w,p) = \beta_\xi(w,q) + \beta_\xi(q,p)$ et $\beta_\zeta(w,p) = \beta_\zeta(w,q) + \beta_\zeta(q,p)$. Prenons $x_n, y_n \in \gamma$ qui tendent vers ξ et ζ, et supposons que les points sont alignés sur γ dans l'ordre x_n, p, q, y_n. En écrivant

$$\begin{cases} d(q,x_n) = d(p,x_n) + d(p,q) \\ d(p,y_n) = d(p,q) + d(q,y_n) \end{cases}$$

on obtient

$$d(q,x_n) - d(p,x_n) + d(q,y_n) - d(p,y_n) = 0\,.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(\xi|\zeta)_x - (\xi|\zeta)_y &= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x,p) + \beta_\zeta(x,p)) - \frac{1}{2}(\beta_\xi(y,p) + \beta_\zeta(y,p)) \\
&= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x,p) - \beta_\xi(y,p)) + \frac{1}{2}(\beta_\zeta(x,p)) - \beta_\zeta(y,p)) \\
&= \frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y) + \beta_\zeta(x,y))
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.13. — *On choisit w comme étant l'origine de la boule et a, b deux points distincts de la sphère. On a*

$$\lim_{x\to a, y\to b} 2e^{-(x|y)_w} = |a-b|_e\,.$$

Démonstration. D'une part, on a $|a-b|_e = 2\sin\theta/2$, où θ est l'angle du triangle (euclidien) (w,a,b) en w.

Par ailleurs, prenons maintenant $x \in [w,a[$ et $y \in [w,b[$ et supposons que $d(w,x) = d(w,y) = t$. La loi hyperbolique du cosinus affirme que

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}\, d(x,y)}{\mathrm{sh}^2 t}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\theta}{2} &= \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}\, d(x,y)}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{\mathrm{ch}\, d(x,y)}{2\mathrm{sh}^2 t} - \frac{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{\mathrm{ch}\, d(x,y)}{2\mathrm{sh}^2 t} - \frac{1}{2\mathrm{sh}^2 t}\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{\mathrm{ch}\, d(x,y)}{2\mathrm{sh}\, d(w,x)\mathrm{sh}\, d(w,y)} + o(1)\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{\exp\, d(x,y)}{\exp\, d(w,x)\exp\, d(w,y)} + o(1)\right)^{1/2}\\
&= \exp -(x|y)_w + o(1)\,.
\end{aligned}$$

■

Il vient des deux propositions précédentes le résultat suivant :

Corollaire 4.14. — *Pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, la formule*

$$d_x(\xi,\zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x}$$

définit une distance sur $\partial\mathbb{H}^n$ qui le rend compact. De plus, si $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $\xi, \zeta \in \partial\mathbb{H}^n$, alors

$$d_y(\xi,\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y)+\beta_\zeta(x,y))} d_x(\xi,\zeta)\,.$$

Démonstration. Dans le modèle de la boule, si w correspond à l'origine et g est une isométrie telle que $g^{-1}(w) = x$, alors $(g(\xi)|g(\zeta))_w = (\xi|\zeta)_x$ donc

$$d_x(\xi,\zeta) = e^{-(\xi|\zeta)_x} = e^{-(g(\xi)|g(\zeta))_w} = d_w(g(\xi), g(\zeta))\,.$$

Donc d_x est bien une distance.

En prenant l'exponentielle dans (2), on obtient

$$d_y(\xi,\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,y)+\beta_\zeta(x,y))} d_x(\xi,\zeta)\,.$$

■

4.5. **Vue hyperbolique du birapport**

Si $p \geq 1$, on désigne par $\partial^p\mathbb{H}^n$ l'ensemble des p-uplets ordonnés de points deux à deux distincts de $\partial\mathbb{H}^n$.

On définit $p : \partial^3\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ comme suit. Étant donné (ξ,ξ',ζ), on considère l'unique point de (ξ,ξ') tel que le rayon $[p,\zeta)$ et la géodésique (ξ,ξ') soient orthogonaux en p. On remarque alors que $(\xi|\zeta)_p = (\xi'|\zeta)_p$ par symétrie.

Proposition 4.15. — *Si $(\xi,\xi',\zeta,\zeta') \in \partial^4\mathbb{H}^n$, on a*

$$[\xi,\xi',\zeta',\zeta]_e = \frac{d_x(\xi,\xi')d_x(\zeta,\zeta')}{d_x(\xi,\zeta')d_x(\xi',\zeta)}$$

pour tout $x \in \mathbb{H}^n$, et

$$\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta]_e = \frac{1}{2}(\beta_\zeta(p(\zeta,\xi,\zeta'),p(\xi,\zeta,\xi')) - \beta_\xi(p(\zeta,\xi,\zeta'),p(\xi,\zeta,\xi')))\,.$$

En particulier,

$$|\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta]_e| = d(p(\xi,\zeta,\xi'),p(\zeta,\xi,\zeta'))\,.$$

Démonstration. Pour x le centre de la boule, cela correspond à la proposition précédente. Pour un autre point, on utilise le fait qu'une isométrie est conforme dans ce même modèle. Notons $p = p(\xi,\zeta,\xi')$ et $q = p(\zeta,\xi,\zeta')$. On a

$$\begin{aligned}
\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta]_e &= \log\frac{d_p(\xi,\xi')d_p(\zeta,\zeta')}{d_p(\xi,\zeta')d_p(\xi',\zeta)} \\
&= \log\frac{d_p(\zeta,\zeta')}{d_p(\xi,\zeta')} \text{ par définition de la métrique visuelle en } p, \\
&= \frac{1}{2}(\beta_{\zeta'}(q,p)+\beta_\zeta(q,p)-(\beta_\xi(q,p)+\beta_{\zeta'}(q,p))) + \log\frac{d_q(\zeta,\zeta')}{d_q(\xi,\zeta')} \\
&\qquad \text{par le corollaire 4.14,} \\
&= \frac{1}{2}(\beta_\zeta(q,p)-\beta_\xi(q,p)) \text{ par définition de la métrique visuelle en } q.
\end{aligned}$$

Comme les points ξ, ζ, p et q sont alignés, on trouve

$$|\log[\xi,\xi',\zeta,\zeta']| = d(p,q)\,.$$

■

Exercice 4.16. — *Montrer qu'il existe une constante C telle que*

$$d((\xi,\xi'),(\zeta,\zeta')) - C \leq \max\{0,\log[\xi,\xi',\zeta',\zeta]\} \leq d((\xi,\xi'),(\zeta,\zeta')) + C\,.$$

4.6. **Action des isométries**

Le groupe des isométries préserve la relation d'équivalence $\sim$, donc opère sur $\partial\mathbb{H}^n$.

Proposition 4.17. — *Si g est une isométrie alors*

(1) g préserve les birapports.

(2) g est conforme au sens que

$$\lim_{\zeta\to\xi}\frac{d_x(g(\xi),g(\zeta))}{d_x(\xi,\zeta)}=e^{\beta_\xi(x,g^{-1}(x))}\,.$$

On pose alors $|g'(\xi)|_x=e^{\beta_\xi(x,g^{-1}(x))}$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que si g une isométrie et $(\xi,\xi',\zeta)\in\partial^3\mathbb{H}^n$, alors

$$p(g(\xi),g(\xi'),g(\zeta))=g(p(\xi,\xi',\zeta))\,.$$

D'après la proposition 4.15, on a

$$\begin{aligned}[g(\xi),g(\xi'),g(\zeta'),g(\zeta)] &= \exp\pm d(g(p(\xi,\zeta,\xi')),g(p(\zeta,\xi,\zeta')))\\ &= \exp\pm d(p(\xi,\zeta,\xi'),p(\zeta,\xi,\zeta'))\\ &= [\xi,\xi',\zeta',\zeta]\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{d_x(g(\xi),g(\zeta))}{d_x(\xi,\zeta)} &= \frac{e^{-(g(\xi)|g(\zeta))_x}}{d_x(\xi,\zeta)}\\ &= \frac{e^{-(\xi|\zeta)_{g^{-1}(x)}}}{d_x(\xi,\zeta)}\\ &= \frac{d_{g^{-1}(x)}(\xi,\zeta)}{d_x(\xi,\zeta)}\\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta_\xi(x,g^{-1}(x))+\beta_\zeta(x,g^{-1}(x)))}\end{aligned}$$

On obtient le résultat en faisant tendre ζ vers ξ et en utilisant la continuité de $\xi\mapsto\beta_\xi(x,g^{-1}(x))$. ■

Exercice 4.18. — *Montrer que si g est une isométrie, alors*

$$|g'(\xi)|_x|g'(\zeta)|_x=\left(\frac{d_x(g(\xi),g(\zeta))}{d_x(\xi,\zeta)}\right)^2\,.$$

Groupe de convergence.— Un groupe de convergence est un groupe d'homéomorphismes G d'un compact X dont l'action diagonale sur les triplets de points distincts est propre, c'est-à-dire, pour tous compacts K et L de triplets de points, $\{g\in\ G,\ g(K)\cap L\neq\emptyset\}$ est compact. Un groupe de convergence est *uniforme* si de plus l'action est cocompacte sur les triplets de points.

Proposition 4.19. — *L'action du groupe d'isométries de l'espace hyperbolique sur son bord est un groupe de convergence uniforme. Il est en de même du groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte.*

Le lemme suivant nous donnera une démonstration directe.

Lemme 4.20. — Soit G un groupe qui opère par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et soit $p : X \to Y$ une application continue surjective propre et G-équivariante.

- G agit proprement (discontinûment) sur X si et seulement si G agit proprement (discontinûment) sur Y.
- L'action de G est cocompacte sur X si et seulement si l'action de G est cocompacte sur Y.

Démonstration du lemme 4.20. Soit K un ensemble de Y. Comme $p : X \to Y$ est propre et surjective, si l'ensemble K est compact alors $p(K)$ est compact et $p(K)$ est compact si et seulement si $p^{-1}(p(K))$ est compact. En particulier, si $K \subset X$ est compact, alors $p^{-1}(p(K))$ est un compact saturé de X contenant K. On peut donc supposer que les compacts de X considérés sont saturés.

Pour deux compacts K et L saturés de X, on a

$$\{g \in G,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\} = \{g \in G,\ g(p(K)) \cap p(L) \neq \emptyset\}\,.$$

On en déduit l'assertion sur la propreté.

Par équivariance, un ensemble D (saturé) contient un domaine fondamental de G sur X si et seulement si $p(D)$ contient un domaine fondamental de G sur Y. En outre, D est compact si et seulement si $p(D)$ l'est aussi, on a établi la seconde assertion. ■

Démonstration de la proposition 4.19. On note $G = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ou $G = \pi_1(M)$ où M est une variété hyperbolique compacte. On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{H}^n \times \partial^3\mathbb{H}^n$ des points $(a, \{x_1, x_2, x_3\})$ tels que le point a est le centre du cercle inscrit au triangle géodésique idéal $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$.

On vérifie que cet ensemble X est non vide et fermé et que l'action diagonale de G préserve X. Soit $p : X \to \mathbb{H}^n$ et $q : X \to \partial^3\mathbb{H}^n$ les projections canoniques. Ces projections sont continues, propres, surjectives et G-équivariantes.

Comme l'action de G sur $\mathbb{H}^n$ est propre et cocompact, le lemme 4.20 montre que c'est aussi son cas sur X, donc sur $\partial^3 X$. ■

4.7. **Quasi-isométries de l'espace hyperbolique**

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un plongement quasi-isométrique. Une propriété fondamentale des espaces hyperboliques est la suivante, attribuée à M. Morse :

Théorème 4.21 (lemme de poursuite). — *Pour tout (λ, c), il existe une constante $H = H(\lambda, c)$ telle que toute (λ, c)-quasigéodésique est à distance au plus H d'une géodésique.*

Il permet d'étendre les quasi-isométries à l'infini.

Théorème 4.22 (Margulis). — *Une quasi-isométrie $\Phi : \mathbb{H}^{n_1} \to \mathbb{H}^{n_2}$ se prolonge en transformation quasimöbius $\phi : \mathbb{S}^{n_1-1} \to \mathbb{S}^{n_2-1}$. Autrement dit, il existe un homéomorphisme croissant $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(a, b, c, d) \in \partial^4\mathbb{H}^n$, on ait*

$$[\phi(a) : \phi(b) : \phi(c) : \phi(d)] \leq \eta\left([a : b : c : d]\right).$$

En particulier, on a $n_1 = n_2$.

Démonstration. Tout d'abord, le lemme de Morse nous définit une extension bijective ϕ de Φ comme suit : si r est un rayon géodésique, alors $\Phi(r)$ est un quasirayon, qui est à distance bornée d'un véritable rayon r'. La classe de r' ne dépend que de la classe de r, et on obtient ainsi $\phi : \partial\mathbb{H}^{n_1} \to \partial\mathbb{H}^{n_2}$.

Scholie 4.23. — *Il existe une constante C telle que, si $\xi, \xi', \zeta \in \partial\mathbb{H}^{n_1}$ alors*

$$d_{\mathbb{H}^{n_2}}(p(\phi(\xi), \phi(\xi'), \phi(\zeta)), \Phi(p(\xi, \xi', \zeta))) \leq C\,.$$

Démonstration. — Le point p est à distance au plus $\delta = \log(1 + \sqrt{2})$ des géodésiques (ξ, ζ) et (ξ', ζ). Par conséquent, $\Phi(p)$ est à distance au plus $\lambda\delta + c + H$ des géodésiques $(\phi(\xi), \phi(\zeta))$ et $(\phi(\xi'), \phi(\zeta))$, et à distance H de $(\phi(\xi), \phi(\xi'))$. Du coup, si $q \in (\phi(\xi), \phi(\xi'))$ est le point le plus proche de $\phi(p)$, il ne peut être trop loin de $p(\phi(\xi), \phi(\xi'), \phi(\zeta))$. □

Soit $(a, b, c, d) \in \partial^4\mathbb{H}^n$; on note $p = p(a, d, b)$, $q = p(a, d, c)$, $p_\phi = p(\phi(a), \phi(d), \phi(b))$ et $q_\phi = p(\phi(a), \phi(d), \phi(c))$.

On a $|d(\Phi(p), \Phi(q)) - d(p_\phi, q_\phi)| \leq d(\Phi(p), p_\phi) + d(q_\phi, \Phi(q)) \leq 2C$. Par conséquent

$$d(\Phi(p), \Phi(q)) - 2C \leq d(p_\phi, q_\phi) \leq d(\Phi(p), \Phi(q)) + 2C$$

$$(1/\lambda)d(p, q) - c - 2C \leq d(p_\phi, q_\phi) \leq \lambda d(p, q) + c + 2C$$

La proposition 4.15 nous fournit

$$(1/\lambda)|\log[a : b : c : d]| - c - 2C \leq |\log[\phi(a) : \phi(b) : \phi(c) : \phi(d)]| \leq \lambda|\log[a : b : c : d]| + c + 2C\,.$$

Cette double inégalité permet d'avoir la majoration recherchée quel que soit le signe du logarithme. ■

On a aussi une réciproque :

Théorème 4.24 (P. Tukia, [Tuk]). — *Une transformation quasimöbius de $\mathbb{S}^{n-1}$ se prolonge en une quasi-isométrie de $\mathbb{H}^n$.*

RÉFÉRENCES

[Bou1] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace. *Enseign. Math. (2)* **41**(1995), 63–102.

[Bou2] Marc Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83**(1996), 95–104.

[EO] Patrick Eberlein and Barrett O'Neill. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* **46**(1973), 45–109.

[Tuk] Pekka Tukia. Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group. *Acta Math.* **154**(1985), 153–193.