

3. GÉOMÉTRIE CONFORME

Une transformation conforme $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ entre deux variétés riemanniennes est un difféomorphisme dont les applications tangentes sont toutes des similitudes : pour $x \in M_1$, il existe $\lambda_x > 0$ tel que $g_2(T_x f(v), T_x f(w)) = \lambda_x g_1(v, w)$ pour tous $v, w \in T_x M_1$. Par géométrie conforme, on entend l'étude des propriétés des variétés qui sont invariantes par transformations conformes.

On peut consulter [Thu, Cox, Spi].

3.1. Similitudes euclidiennes

On considère \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, muni de sa structure euclidienne canonique. On note le produit scalaire de deux vecteurs $x \cdot y$ et la norme associée $|x|_e$. Par définition, une similitude est une transformation $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe $\lambda > 0$ qui vérifie $|f(x) - f(y)|_e = \lambda |x - y|_e$. Une isométrie est une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $|f(x) - f(y)|_e = |x - y|_e$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On note $\text{Sim}(\mathbb{R}^n)$ le groupe des similitudes et $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ son sous-groupe des isométries.

On montre qu'une similitude est une application linéaire :

THÉORÈME 3.1. — *Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une similitude de rapport $\lambda > 0$ si et seulement si il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \lambda A \cdot x + v$. En particulier, une isométrie s'écrit sous la forme $x \mapsto A \cdot x + v$*

DÉMONSTRATION. On laisse en exercice la vérification qu'une application de la forme $f(x) = \lambda A \cdot x + v$ avec $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ est une similitude.

Supposons que f est une similitude. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ 3 points alignés, on peut supposer par exemple $x \in [y, z]$, de sorte qu'on ait $|y - z|_e = |y - x|_e + |x - z|_e$. Du coup, on obtient $|f(y) - f(z)|_e = \lambda |y - z|_e = \lambda |y - x|_e + \lambda |x - z|_e = |f(y) - f(x)|_e + |f(x) - f(z)|_e$. Par suite, on a $f(x) \in [f(y), f(z)]$, c'est-à-dire que f transforme une droite en une droite. En outre, on en déduit aussi que si $k \in \mathbb{R}$, alors $f(k(x - y)) = k(f(x) - f(y))$. En particulier, l'image du milieu de $[y, z]$ s'envoie sur le milieu de $[f(y), f(z)]$.

De manière plus générale, l'image d'un triangle est un triangle semblable. Prenons trois points o, x, y et considérons $z = o + (x - o) + (y - o)$ de sorte que $oxzy$ est un parallélogramme. Par conséquent, les segments $[o, z]$ et $[x, y]$ se coupent en leur milieu. Il vient que $[f(o), f(z)]$ et $[f(x), f(y)]$ se coupent aussi en leur milieu, donc l'image de $oxzy$ est aussi un parallélogramme semblable impliquant que $f(z) = f(o) + (f(x) - f(o)) + (f(y) - f(o))$.

On en déduit que f est affine. Comme f/λ est une isométrie, une similitude est une application de la forme $x \mapsto \lambda Ax + v$, $\lambda > 0$, $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$. ■

EXERCICE 3.2. — *Montrer qu'on a $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sim}(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \times) \rtimes O_n(\mathbb{R})$.*

PROPOSITION 3.3. — *Un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui préserve l'ensemble des hyperplans et des sphères est une similitude.*

DÉMONSTRATION. Notons $g = f - f(0)$. Si f préserve les hyperplans de \mathbb{R}^n alors f préserve aussi leur parallélisme. Il en est de même de g . On en déduit que g préserve les sous-espaces affines et leur parallélisme aussi puisqu'on les obtient comme intersection d'hyperplans.

On se fixe deux vecteurs x et y indépendants et l'on considère la construction du parallélogramme de leur somme : on regarde donc les droites $\mathbb{R}x$, $\mathbb{R}y$, $x + \mathbb{R}y$ et $y + \mathbb{R}x$. Leurs images sont aussi parallèles deux à deux, donc $g(0, x, x + y, y)$ est aussi un parallélogramme et on en déduit que $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Par continuité, on a la même relation pour x et y colinéaires. On en déduit facilement que g est linéaire. Comme g préserve les sphères, c'est une similitude. ■

Réflexions. — Si p et p' sont fixés, le lieu des points q équidistants est l'hyperplan affine H qui coupe le segment $[p, p']$ orthogonalement en son milieu m . Si $|p - q|_e = |p' - q|_e$ alors $|(p - m) + (m - q)|_e^2 = |(p' - m) + (m - q)|_e^2$. On obtient en développant

$$2((p - m) \cdot (m - q)) = 2((p' - m) \cdot (m - q))$$

soit $(p - p') \cdot (m - q) = 0$. Réciproquement, si $q \in H$, alors le théorème de Pythagore implique $|p - q|_e^2 = |p - m|_e^2 + |m - q|_e^2 = |p' - m|_e^2 + |m - q|_e^2 = |p' - q|_e^2$.

Etant donné un hyperplan affine H et $m \in H$, on note $r_H : x \mapsto x - 2((x - m) \cdot u)u$ où u est un vecteur unitaire orthogonal à H . On vérifie que r_H ne dépend pas ni du choix de m ni celui de u . On appelle r_H la réflexion orthogonale par rapport à H .

FAIT 3.4. — *Une réflexion est une involution isométrique qui fixe exactement et ponctuellement H .*

DÉMONSTRATION. Si on conjugue par la translation de vecteur m , on arrive à $r_H(x) = x - 2(x \cdot u)u$. On a pour p et q dans \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} r_H(p) \cdot r_H(q) &= p \cdot q + 4(p \cdot u)(q \cdot u) - 2((p \cdot u) \cdot (u \cdot q) + (q \cdot u) \cdot (p \cdot u)) \\ &= p \cdot q \end{aligned}$$

donc r_H est une isométrie.

Si $p \in H$, alors $r_H(p) = p$. Réciproquement, si $r_H(p) = p$ alors $p \cdot u = 0$, donc $p \in H$. De plus, on a

$$\begin{aligned} (r_H \circ r_H)(p) &= r_H(p) - 2(r_H(p) \cdot u)u \\ &= p - 2(p \cdot u)u - 2((p \cdot u) - 2(p \cdot u))u \\ &= p. \end{aligned}$$

■

RIGIDITÉ DE MOSTOW-03

PROPOSITION 3.5. — *Les points fixes d'une isométrie non triviale sont contenus dans un hyperplan. Ils s'identifient à un hyperplan si et seulement si l'isométrie est une réflexion.*

DÉMONSTRATION. Soit g une isométrie non triviale. Si $g(p) \neq p$, et si q est un point fixe, alors $|p - q|_e = |g(p) - g(q)|_e = |g(p) - q|_e$. Donc q est dans l'hyperplan H médian défini par $\{p, g(p)\}$. Si tous les points de H sont fixes, alors $g \circ r_H$ admet $H \cup \{p\}$ comme points fixes. Donc $g \circ r_H$ est l'application identique et $g = g \circ r_H^2 = \text{Id} \circ r_H = r_H$. ■

EXERCICE 3.6. — *L'objet de cet exercice est de montrer que le groupe des isométries est engendré par les réflexions.*

- (1) Soient $k \geq 1$, et $(p_j, q_j)_{1 \leq j \leq k}$ des points tels que $|p_i - p_j|_e = |q_i - q_j|_e$ pour tous i, j . Montrer par récurrence sur k qu'il existe une isométrie g composée de réflexions telle que $g(p_j) = q_j$ pour tout j .
- (2) Soient g une isométrie et (p_j) , $0 \leq j \leq n$, $n + 1$ points en position générale (ils ne sont contenus dans aucun hyperplan). Montrer qu'il existe une isométrie h obtenue par composition de réflexions telle que $g(p_j) = h(p_j)$ pour tout j et en déduire que $g = h$.

3.2. Inversions

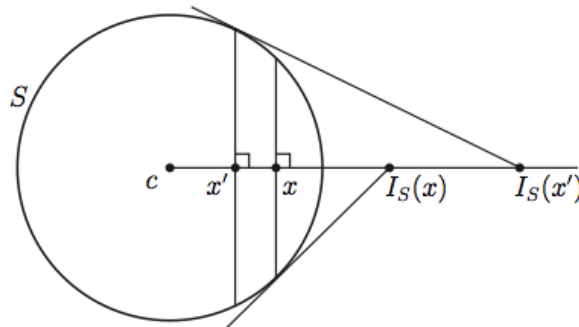
On se place dans \mathbb{R}^{n+1} muni de sa structure euclidienne.

DÉFINITION 3.7 (Inversion). — Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ une sphère de dimension n de centre c et de rayon $R > 0$. L'inversion par rapport à S est l'application $I_S : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{c\}$ définie par

$$I_S(x) = c + \frac{R^2}{|x - c|_e^2}(x - c)$$

Géométriquement, $I_S(x)$ se trouve sur la demi-droite $[c, x)$ tel que

$$|I_S(x) - c|_e |x - c|_e = (I_S(x) - c) \cdot (x - c) = R^2.$$



RIGIDITÉ DE MOSTOW-04

Prenons y un point de S . On a

$$\begin{aligned}
 (y - c) \cdot (y - I_S(x)) &= (y - c) \cdot ((y - c) + (c - I_S(x))) \\
 &= |y - c|_e^2 + ((y - x) + (x - c)) \cdot (c - I_S(x)) \\
 &= R^2 + (y - x) \cdot (c - I_S(x)) + (x - c) \cdot (c - I_S(x)) \\
 &= R^2 + (y - x) \cdot (c - I_S(x)) - R^2
 \end{aligned}$$

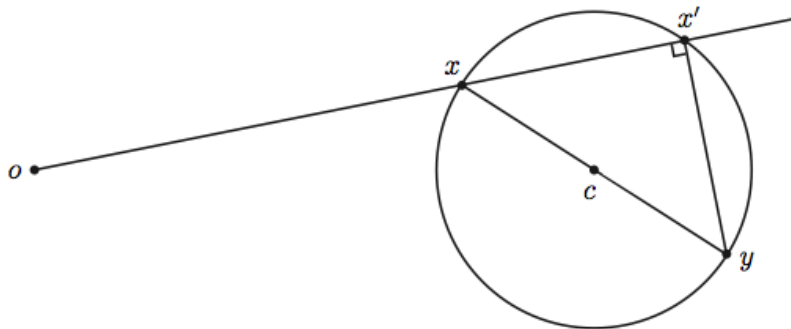
donc $(y - c) \cdot (y - I_S(x)) = (y - x) \cdot (c - I_S(x))$. En particulier, la droite $(y, I_S(x))$ est tangente à S en y si et seulement si x est la projection orthogonale de y sur (c, x) .

PROPOSITION 3.8. — *Soit I_S l'inversion par rapport à une sphère S . On a les propriétés suivantes.*

- (1) *Une inversion est une involution qui fixe S ponctuellement.*
- (2) *Les sphères invariantes différentes de S sont celles qui coupent S orthogonalement.*
- (3) *Les sphères et espaces affines sont préservés. Plus précisément,*
 - (a) *les sphères disjointes de c sont transformées en sphères ;*
 - (b) *les sphères passant par c sont transformées en espaces affines, et réciproquement ;*
 - (c) *les espaces affines passant par c sont invariants.*
- (4) *La transformation est conforme.*

On rappelle quelques propriétés élémentaires des cercles et des sphères qui permettent d'établir cette proposition.

LEMME 3.9. — Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ une sphère et $o \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Il existe une constante K telle que, pour toute droite passant par o qui coupe S en deux points (éventuellement confondus) x et x' , on a $(x - o) \cdot (x' - o) = K$.



La constante K s'appelle la *puissance du point o par rapport à la sphère S* et vaut $|o - c|^2 - R^2$.

Démonstration. — On note $\rho = |o - c|^2 - R^2$. Si $[p, p']$ est un diamètre, alors $(p - o) \cdot (p' - o) = \rho$. En effet,

$$\begin{aligned} (p - o) \cdot (p' - o) &= ((p - c) + (c - o)) \cdot ((p' - c) + (c - o)) \\ &= -|p - c|_e^2 + |c - o|_e^2 \\ &= \rho. \end{aligned}$$

On suppose qu'une droite passant par o coupe S en deux points x, x' . Alors, notons y le point diamétralement opposé de x . Le triangle (x, x', y) est donc rectangle en x' , ce qui implique $(x - o) \cdot (x' - y) = 0$.

$$\begin{aligned} (x - o) \cdot (x' - o) &= (x - o) \cdot ((x' - y) + (y - o)) \\ &= (x - o) \cdot (y - o) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

□

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.8. On vérifie sans mal le point (1). Afin d'étudier l'image des sphères, on commence par l'observation suivante. Si S' est une sphère de dimension quelconque dans \mathbb{R}^n , alors c'est l'intersection d'un sous-espace affine A passant par c avec une sphère de dimension n de même centre et même rayon que S' . Or, cet espace contenant c , il est clairement invariant par I_S ; de plus $S \cap A$ est aussi une sphère, de centre c et de rayon R . On se ramène ainsi à des sphères de même dimension.

SCHOLIE 3.10. — Soit $p \notin S \cup \{c\}$. Toute sphère S' qui contient p et $I_S(p) (\neq p)$ est invariante par I_S et coupe S orthogonalement.

Démonstration. — Soit $q \in S'$ et notons $q' \in S'$ le second point d'intersection de la droite (c, q) avec S' (éventuellement confondu à q). On note c' le centre de S' . Par le lemme 3.9, on obtient

$$(c - q) \cdot (c - q') = (c - p) \cdot (c - I_S(p)) = R^2$$

donc $I_S(q) = q'$ (si $p \in S \cap S'$, alors $I_S(p) = p$, mais cela n'implique pas que p est le seul point de $S' \cap [c, p]$ donc on n'aurait pas pu appliquer le lemme 3.9). De plus, si (c, q) est tangente à S' , alors $q' = q$ et $I_S(q) = q$, donc $q \in S$ et (c, q) est orthogonale à (c', q) , montrant que les sphères se coupent orthogonalement (ce sont des vecteurs normaux aux sphères). □

Prenons maintenant une sphère S' invariante par I_S (donc disjointe de c car I_S est définie sur tout S) et différente de S . Du coup, il existe un point $p \in S' \setminus S$. Cette sphère vérifie les hypothèses de la scholie et on en déduit que S et S' se coupent orthogonalement. Si S et S' se coupent orthogonalement, prenons un point d'intersection $q \in S \cap S'$ et considérons

deux points d'intersection p et p' d'une droite passant par c et coupant S' . On en déduit par le lemme 3.9 $(c-p) \cdot (c-p') = |c-q|_e^2 = R^2$, donc $I_S(p) = p'$. Cela signifie que S' est invariante. Cela conclut la démonstration de (2).

Un sous-espace affine contenant c est clairement invariant. Soit H un espace affine ne contenant pas c . Quitte à se restreindre au plus petit sous-espace affine contenant H et c , on peut supposer que H est un hyperplan. On se fixe $p \in H$ qui réalise la distance de c à H . Nous allons montrer que l'image de toute droite de H passant par p se transforme en un cercle de diamètre $[c, I_S(p)]$. Soit p' un autre point. Puisque $|c-p|_e |c-I_S(p)|_e = |c-p'|_e |c-I_S(p')|_e$ et les angles des triangles (c, p, p') et $(c, I_S(p'), I_S(p))$ sont identiques en c , ces triangles sont semblables. En particulier, le second triangle a un angle droit en $I_S(p')$ ce qui signifie qu'il est sur la sphère de diamètre $[c, I_S(p)]$. Cet argument en sens inverse montre qu'une sphère passant par c s'inverse en un hyperplan l'évitant.

Soit maintenant S' une sphère disjointe de c . On note K' la puissance de c par rapport à S' . On considère l'homothétie D de centre c et de rapport R^2/K' . Soient p, p' deux points de S' sur la même droite passant par c , et posons $q = D(p')$.

Le lemme 3.9 affirme

$$(q-c) \cdot (p-c) = \frac{R^2}{K'} (p'-c) \cdot (p-c) = R^2.$$

Donc $q = I_S(p)$. De même, $I_S(p') = D(p)$. On en déduit que $I_S(S') = D(S')$.

Montrons qu'une inversion est conforme. On peut se ramener en conjuguant notre inversion par une similitude à la réflexion par rapport à la sphère unité. On considère donc $f(x) = x/|x|_e^2$. Du coup, on a

$$T_x f(v) = \frac{v}{|x|_e^2} - \frac{2(x \cdot v)x}{|x|_e^4}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} T_x f(v) \cdot T_x f(v) &= \frac{|v|_e^2}{|x|_e^4} - \frac{4(x \cdot v)^2}{|x|_e^6} + \frac{4(x \cdot v)^2 |x|_e^2}{|x|_e^8} \\ &= \frac{|v|_e^2}{|x|_e^4}. \end{aligned}$$

Par suite, f transforme la métrique euclidienne en une métrique qui lui est conforme. ■

EXERCICE 3.11. — *Montrer que la composée de deux inversions par rapport à des sphères concentriques est une similitude. Etudier la réciproque.*

PROPOSITION 3.12. — *Soit S une sphère de \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 1$.*

(1) *Soit S' une autre sphère.*

(a) *Si S' ne contient pas le centre de S , alors $I_S \circ I_{S'} \circ I_S$ est l'inversion par rapport à $I_S(S')$.*

(b) *Si S' contient le centre de S , alors $I_S \circ I_{S'} \circ I_S$ est la réflexion par rapport à l'hyperplan affine $I_S(S')$.*

(2) Soit H un hyperplan affine.

(a) Si H ne contient pas le centre de S , alors $I_S \circ r_H \circ I_S$ est l'inversion par rapport à $I_S(H)$.

(b) Si H contient le centre de S , alors $I_S \circ r_H \circ I_S = r_H$.

DÉMONSTRATION. On note c et R le centre et rayon de S , c' et R' ceux de S' .

Si $c = c'$, alors, pour tout $p \neq c$, les points $c, p, I_S(p), I_{S'}I_S(p)$ et $I_S I_{S'} I_S(p)$ sont alignés donc la loi d'addition entre vecteurs et leurs produits scalaires s'identifient à des sommes et multiplications de réels positifs, donnés par leur distance à c . Avec cette identification, on a

$$\begin{aligned} (p - c) \cdot (I_S I_{S'} I_S(p) - c) &= \frac{[(p - c) \cdot (I_S(p) - c)][(I_{S'} I_S(p) - c) \cdot (I_S I_{S'} I_S(p) - c)]}{(I_S(p) - c) \cdot (I_{S'} I_S(p) - c)} \\ &= \frac{R^2}{R'}. \end{aligned}$$

On en déduit une inversion de centre c et de rayon R^2/R' .

On suppose maintenant $c \neq c'$. On vérifie sans mal que $I_S I_{S'} I_S$ est une involution conforme qui fixe ponctuellement $I_S(S' \setminus \{c\})$. Supposons aussi que c n'est pas sur S' . Du coup, $S'' = I_S(S')$ est une sphère de centre un point c'' sur la droite (c, c') . On montre $I_S I_{S'} I_S = I_{S''}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{c, I_S(c'), I_S I_{S'}(c), c''\}$. Soit $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{c, I_S(c'), I_S I_{S'}(c), c''\}$. On suppose aussi $p \notin S''$ puisqu'on sait $I_S I_{S'} I_S|_{S''} = \text{Id}|_{S''} = I_{S''}|_{S''}$. Soit T la sphère de diamètre $[p, I_{S''}(p)]$ qui intersecte donc S'' et la droite (c'', p) orthogonalement. On a donc $(c'', p) \cap T = \{p, I_{S''}(p)\}$. Pour p générique, le point c n'est pas sur T ni sur (c'', p) . Du coup, $I_S(T)$ est une sphère qui coupe S' orthogonalement et $\overline{I_S((c'', p))}$ est un cercle qui coupe également S' orthogonalement. Par suite, $I_S(T)$ et $I_S((c'', p))$ sont invariants par $I_{S'}$. On en déduit que $I_S I_{S'} I_S$ laisse T et (c'', p) invariants, donc leur intersection $\{p, I_{S''}(p)\}$. Comme cette transformation ne fixe pas p , on a $I_S I_{S'} I_S(p) = I_{S''}(p)$. Comme p est générique et $I_{S''}$ est continue en dehors de $\{c''\}$, on a $I_S I_{S'} I_S = I_{S''}$ sur leur ensemble de définition.

On suppose maintenant $c \in S'$. Par conséquent, $H = I_S(S' \setminus \{c\})$ est un hyperplan affine. Comme ci-dessus, on montre $I_S I_{S'} I_S = r_H$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{c, I_S(c'), I_S I_{S'}(c)\}$. Soit $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{c, I_S(c'), I_S I_{S'}(c)\}$. Soit T la sphère de diamètre $[p, r_H(p)]$ qui intersecte donc H et la droite $(p, r_H(p))$ orthogonalement. On a $(p, r_H(p)) \cap T = \{p, r_H(p)\}$. Pour p générique, le point c n'est pas sur T ni sur $(p, r_H(p))$. Du coup, $I_S(T)$ est une sphère qui coupe S' orthogonalement et $\overline{I_S((p, r_H(p)))}$ est un cercle qui coupe également S' orthogonalement. Par suite, $I_S(T)$ et $\overline{I_S((p, r_H(p)))}$ sont invariants par $I_{S'}$. On en déduit que $I_S I_{S'} I_S$ laisse T et $(p, r_H(p))$ invariants. Comme cette transformation ne fixe pas p , on a $I_S I_{S'} I_S(p) = r_H(p)$. Comme p est générique et r_H est continue, on a $I_S I_{S'} I_S = r_H$ sur leur ensemble de définition. On a ainsi analysé la conjugaison d'une inversion par une autre.

On se donne maintenant un hyperplan affine H et on veut déterminer $I_S \circ r_H \circ I_S$. On vérifie comme ci-dessus que cette transformation fixe $I_S(H)$. On suppose dans un premier

temps que $c \in H$ de sorte que $I_S(H \setminus \{c\}) = H \setminus \{c\}$. Soit $p \notin H$, comme r_H est une isométrie, on a

$$(p - c) \cdot (r_H I_S r_H(p) - c) = (r_H(p) - c) \cdot (I_S r_H(p) - c) = R^2.$$

De plus, comme I_S préserve les demi-droites issues de c , on a (modulo le point c)

$$r_H(I_S r_H([c, p))) = r_H(r_H([c, p))) = [c, p)$$

donc $r_H \circ I_S \circ r_H = I_S$ et $I_S \circ r_H \circ I_S = r_H$.

On suppose finalement $c \notin H$ de sorte que $S' = I_S(H) \cup \{c\}$ est une sphère contenant c , invariante par $I_S r_H I_S$. On note c' son centre. Soit $p \notin S'$. On considère la sphère T de diamètre $[p, I_{S'}(p)]$ qui coupe donc orthogonalement S' et la droite $(p, I_{S'}(p)) = (c', p)$. On a aussi $(c', p) \cap T = \{p, I_{S'}(p)\}$. Pour p générique, le point c n'est pas sur T ni sur (c', p) . Du coup, $I_S(T)$ est une sphère qui coupe H orthogonalement et $\overline{I_S((c', p))}$ est un cercle qui coupe également H orthogonalement. Par suite, $I_S(T)$ et $I_S((c', p))$ sont invariants par r_H . On en déduit que $I_S r_H I_S$ laisse T et (c', p) invariants. Comme cette transformation ne fixe pas p , on a $I_S r_H I_S(p) = I_{S'}(p)$. Comme p est générique et $I_{S'}$ est continue en dehors de $\{c'\}$, on a $I_S r_H I_S = I_{S'}$ sur leur ensemble de définition. ■

EXERCICE 3.13. — Déterminer l'élément conjugué d'une réflexion ou d'une inversion par une similitude.

3.3. Espace étendu

Soit $n \geq 1$. On considère la compactification d'Alexandroff $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ munie de la topologie telle que l'injection canonique $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ est continue et un système de voisinage du point à l'infini est donné par les complémentaires des compacts de \mathbb{R}^n .

Toute réflexion r_H de \mathbb{R}^n se prolonge en homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en posant $r_H(\infty) = \infty$ et toute inversion I_S par rapport à une sphère de centre c se prolonge aussi en homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en posant $I_S(c) = \infty$ et $I_S(\infty) = c$.

La projection stéréographique nous permettra de munir $\widehat{\mathbb{R}}^n$ d'une structure riemannienne conformément équivalente à la sphère unité \mathbb{S}^n .

3.3.1. *Projection stéréographique.* On identifie \mathbb{R}^n à $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et on considère la sphère S de centre $o = (0_n, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. La projection stéréographique de \mathbb{S}^n sur \mathbb{R}^n est la restriction de I_S . Puisque \mathbb{S}^n contient le centre de S , son image est un hyperplan affine. Il contient les points de $S \cap \mathbb{S}^n$, soit $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$. On a bien $I_S : \mathbb{S}^n \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note $p_\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{o, \} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique.

La projection stéréographique se prolonge à $p_\sigma : (\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \rightarrow (\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}, \widehat{\mathbb{R}}^n)$, ce qui permet de munir $\widehat{\mathbb{R}}^n$ d'une structure conforme héritée de \mathbb{S}^n .

FAIT 3.14. — Toute réflexion ou inversion de \mathbb{R}^n se prolonge en une transformation conforme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

DÉMONSTRATION. Avec l'identification de \mathbb{R}^n à $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, toute réflexion de \mathbb{R}^n est la restriction d'une réflexion de \mathbb{R}^{n+1} par rapport à un hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} orthogonal à \mathbb{R}^n et toute inversion est la restriction d'une inversion de \mathbb{R}^{n+1} par rapport à une sphère de même centre et de même rayon. L'image de cet hyperplan ou de cette sphère de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ par p_σ est un hyperplan ou une sphère qui coupe \mathbb{S}^n orthogonalement d'après la proposition 3.8. Observons que le centre de cette sphère est disjoint de \mathbb{S}^n . La proposition 3.12 implique que la transformation conjuguée sur \mathbb{S}^n par p_σ est donc la restriction d'une réflexion ou inversion qui laisse invariante \mathbb{S}^n , bien définie en tout point. Cela montre que ces transformations sont conformes sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$. ■

Par extension, on appelle *sphère de Möbius* de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ une sphère de \mathbb{R}^n , ou un hyperplan affine $H \cup \{\infty\}$. Du coup, l'inversion ou la réflexion par rapport à une sphère (de Möbius) donnée préserve les sphères (de Möbius).

3.3.2. *Groupe de Möbius.* On définit le birapport de quatre points distincts x_1, x_2, x_3, x_4 de \mathbb{R}^n par

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{|x_1 - x_2|_e |x_3 - x_4|_e}{|x_1 - x_3|_e |x_2 - x_4|_e}.$$

On le prolonge à $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en passant à la limite quand un point va vers l'infini. Supposons par exemple que l'on fait tendre x_4 vers l'infini. On a

$$|x_2 - x_4|_e \leq |x_3 - x_4|_e + |x_2 - x_3|_e = |x_3 - x_4|_e \left(1 + \frac{|x_2 - x_3|_e}{|x_3 - x_4|_e}\right)$$

et

$$|x_2 - x_4|_e \geq |x_3 - x_4|_e - |x_2 - x_3|_e = |x_3 - x_4|_e \left(1 - \frac{|x_2 - x_3|_e}{|x_3 - x_4|_e}\right).$$

Par conséquent

$$\lim_{x_4 \rightarrow \infty} [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{|x_1 - x_2|_e}{|x_1 - x_3|_e}.$$

THÉORÈME 3.15. — Soit $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ un homéomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1) L'homéomorphisme f est un produit de réflexions.
- (2) L'homéomorphisme f préserve les sphères.
- (3) L'homéomorphisme f préserve le birapport.

Si f vérifie l'une de ces propriétés, alors f est conforme.

Un homéomorphisme qui vérifie les conditions de ce théorème est une *transformation de Möbius*. Ces transformations forment le groupe de Möbius $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Ce sont en fait les seules transformations conformes dès la dimension 3.

THÉORÈME 3.16 (Liouville). — Un homéomorphisme conforme $f : U \rightarrow f(U) (\subset \widehat{\mathbb{R}}^n)$ d'un ouvert U de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 3$, est la restriction d'une transformation de Möbius.

DÉMONSTRATION DU THÉOREME 3.15. On remarque que le groupe engendré par les inversions vérifie toutes ces propriétés. La préservation des sphères est donnée par la proposition 3.8 et parce que les réflexions sont des isométries euclidiennes. La seule propriété non triviale est la préservation du birapport par une inversion. Il suffit de traiter le cas de $I(x) = x/|x|_e^2$. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $|T_x I(v)|_e = |v|_e/|x|_e^2$, donc $T_x f$ est une similitude de rapport $1/|x|_e$; on pose $|I'(x)| = 1/|x|_e^2$ de sorte que $|T_x I(v)|_e = |I'(x)| \cdot |v|_e$. On montre que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|I'(x)| \cdot |I'(y)| \cdot |x - y|_e^2 = |I(x) - I(y)|_e^2.$$

Par le calcul,

$$\begin{aligned} |I(x) - I(y)|_e^2 &= ((I(x) - I(y)) \cdot (I(x) - I(y))) \\ &= (I(x) \cdot I(x)) + (I(y) \cdot I(y)) - 2(I(x) \cdot I(y)) \\ &= \frac{1}{|x|_e^2} + \frac{1}{|y|_e^2} - \frac{2(x \cdot y)}{|x|_e^2 \cdot |y|_e^2} \\ &= \frac{(x \cdot x) - 2(x \cdot y) + (y \cdot y)}{|x|_e^2 \cdot |y|_e^2} \\ &= |I'(x)| \cdot |I'(y)| \cdot |x - y|_e^2 \end{aligned}$$

On en déduit maintenant la préservation du birapport.

Soit f un homéomorphisme de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Si $f(\infty) \neq \infty$, on note $a = f^{-1}(\infty)$, et on considère l'inversion I par rapport à une sphère centrée en a , sinon, on appelle I l'application identique. On définit enfin la transformation $g : x \mapsto I \circ f(x) - I \circ f(0)$. Cette transformation vérifie $g(0) = 0$ et $g(\infty) = \infty$.

Supposons que f préserve les birapports de quatre points. On traduit cette condition en considérant $0, x, y, \infty$:

$$\frac{|g(x)|_e}{|g(y)|_e} = \frac{|x|_e}{|y|_e}.$$

Notons $\lambda = |g(x)|_e/|x|_e$ de sorte que $|g(y)|_e = \lambda|y|_e$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, en prenant $(x, y, 0, \infty)$, on trouve

$$\frac{|g(x) - g(y)|_e}{|g(x)|_e} = \frac{|x - y|_e}{|x|_e}$$

donc $|g(x) - g(y)|_e = \lambda|x - y|_e$. Par suite, l'application g est une similitude, donc f est un produit d'inversions de Möbius.

Si f préserve les sphères de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, alors g préserve les hyperplans de \mathbb{R}^n et les sphères. Du coup, la proposition 3.3 implique que g est une similitude. ■

EXERCICE 3.17. — Montrer que le stabilisateur d'un point de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ dans le groupe de Möbius est conjugué au groupe des similitudes de \mathbb{R}^n .

3.3.3. *Extension des transformations de Möbius.* Soit $n \geq 1$ fixé. Toute réflexion $I_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ par rapport à une sphère $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ se prolonge de manière canonique en une réflexion $I_{\widehat{S}} : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ par rapport à la sphère $\widehat{S} \subset \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ de même centre et même rayon que S . Du coup, toute transformation de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ est la restriction d'une transformation de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Si f et g coïncident sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$ alors $h = f \circ g^{-1}$ est une transformation de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ qui vaut l'identité sur $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Par conséquent, h fixe le point à l'infini donc h est une isométrie de \mathbb{R}^{n+1} qui fixe un hyperplan. D'après la proposition 3.5, h est ou bien l'application identique ou bien la réflexion par rapport à \mathbb{R}^n . En notant $\text{stab Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ le sous-groupe de $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ qui laisse invariant $\widehat{\mathbb{R}}^n$, on obtient la suite exacte courte

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{stab Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \rightarrow \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \rightarrow 1$$

où l'involution est donnée par la réflexion ρ par rapport à $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Comme $\rho|_{\widehat{\mathbb{R}}^n} = \text{Id}$, ρ est dans le centralisateur de $\text{stab Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. La suite est scindée puisque toute inversion de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ est la restriction d'une inversion de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ qui préserve le demi-espace supérieur. Cette extension induit une section $s : \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \rightarrow \text{stab Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ dont l'image commute avec ρ . On a ainsi montré $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \text{stab Möb}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

En conjuguant par la projection stéréographique et en notant $\text{Möb}(B)$ le sous-groupe des transformations de Möbius qui préserve la boule unité de \mathbb{R}^{n+1} , on obtient

PROPOSITION 3.18. — *La restriction de l'action de $\text{Möb}(B)$ à \mathbb{S}^n induit un isomorphisme entre $\text{Möb}(B)$ et $\text{Möb}(\mathbb{S}^n)$. Ils sont engendrés par les inversions par rapport à des sphères de Möbius qui coupent \mathbb{S}^n orthogonalement. En outre, prenons des transformations de Möbius $f, g, h : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ qui préservent B . Si $h \circ f \circ h^{-1}|_{\mathbb{S}^n} = g|_{\mathbb{S}^n}$ alors $h \circ f \circ h^{-1} = g$.*

DÉMONSTRATION. La transformation de Möbius $h \circ f \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ vaut l'identité sur \mathbb{S}^n et fixe la boule unité. Par conséquent, $h \circ f \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ est l'application identique. ■

3.4. Propriétés de convergence

On étudie dans ce paragraphe le comportement des suites de transformations de Möbius. On commence par le cas des similitudes. On considère une suite $(f_n)_n$ de similitudes de \mathbb{R}^n définies par $f_n(x) = \lambda_n A_n + v_n$, avec $\lambda_n > 0$, $A_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $v_n \in \mathbb{R}^n$. On considère plusieurs cas qui peuvent être obtenus par extraction de sous-suites.

On suppose dans un premier temps que $(\lambda_n)_n$ est bornée par Λ . Du coup, $(f_n)_n$ est équicontinue. Si (v_n) n'est pas bornée, quitte à extraire une sous-suite, la suite tend vers l'infini et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $|f_n(x)|_e \geq |v_n|_e - \Lambda|x|_e$ donc (f_n) tend uniformément sur les compacts vers l'infini.

Si $(v_n)_n$ est bornée par $B \geq 0$, alors on a deux cas : ou bien $(\lambda_n)_n$ tend vers 0 — à une sous-suite près — et on a convergence vers une constante — à une sous-suite près

également ; ou bien on a $\lambda_n \geq \mu > 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on a donc convergence de $(\lambda_n)_n$ vers $\lambda > 0$, de $(A_n)_n$ vers A et $(v_n)_n$ vers v . Dans ce cas, on a convergence sur les compacts vers $f : x \mapsto \lambda Ax + v$. De plus, si $|x|_e \geq R$ alors $|f_n(x)|_e \geq \mu R - B$. Donc la suite est aussi équicontinue à l'infini, donc sur tout $\widehat{\mathbb{R}}^n$, et on a convergence vers f dans $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Dans ce second temps, on suppose que $(\lambda_n)_n$ tend vers l'infini. On regarde également deux cas. Dans le premier, on suppose que $(|v_n|_e/\lambda_n)_n$ tend vers l'infini. Dans ce cas, on a $|f_n(x)|_e \geq |v_n|_e - \lambda_n|x|_e \geq |v_n|_e(1 - (\lambda_n/|v_n|_e)|x|_e)$ donc on a convergence uniforme sur les compacts vers ∞ .

On suppose maintenant que $(|v_n|_e/\lambda_n)_n$ est bornée par M . On note $p_n = f_n^{-1}(0) = (-1/\lambda_n)A_n^{-1}v_n$. On a $|p_n|_e = |v_n|_e/\lambda_n \leq M$. Du coup, à une sous-suite près, $(p_n)_n$ est convergente vers un point $p \in \mathbb{R}^n$. On a

$$|f_n(x)|_e = |f_n(x) - f_n(p_n)|_e = \lambda_n|x - p_n|_e \geq \lambda_n(|x - p|_e - |p - p_n|_e).$$

Du coup, si $|x - p|_e \geq R > 0$ et $|p_n - p|_e \leq R/2$, alors $|f_n(x)|_e \geq \lambda_n R/2$, donc on a convergence uniforme sur les compacts de $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{p\}$ vers l'infini.

On a montré

PROPOSITION 3.19. — *Soit \mathcal{F} une famille de similitudes. Ou bien \mathcal{F} est relativement compacte en tant qu'homéomorphismes de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, ou bien il existe une suite $(f_n)_n$ de \mathcal{F} et deux points $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ incluant le point à l'infini tels qu'on ait convergence uniforme sur les compacts de $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{a\}$ vers b .*

Normalisation des transformations de Möbius. — On associe à toute transformation de Möbius une similitude qui nous permettra d'exploiter la proposition 3.19. On se place dans \mathbb{S}^n et on marque un point $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Soit $f \in \text{Möb}(\mathbb{S}^n)$. On considère tout d'abord une isométrie $\rho_0 \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\rho_0(x_0) = o = (0_n, -1)$. On considère aussi une isométrie $\rho_f \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\rho_f(f(x_0)) = o$. Le choix des isométries reste dans un compact, et cela nous suffira.

On pose $Nf = p_\sigma \rho_f f \rho_0^{-1} p_\sigma$, où $p_\sigma : \mathbb{S}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ est la projection stéréographique. On a $Nf(\infty) = \infty$ donc Nf se restreint à une similitude de \mathbb{R}^n .

THÉORÈME 3.20. — *Soit \mathcal{F} une famille de transformations de Möbius de \mathbb{S}^n . Ou bien \mathcal{F} est relativement compacte ou bien il existe une suite $(f_n)_n$ de \mathcal{F} et deux points $a, b \in \mathbb{S}^n$ tels qu'on ait convergence uniforme sur les compacts de $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{a\}$ vers b .*

DÉMONSTRATION. On considère $N\mathcal{F}$ qui est une famille de similitudes de \mathbb{R}^n . On applique alors la proposition 3.19. Si $N\mathcal{F}$ est relativement compacte, alors, pour toute suite $(f_n)_n$ de \mathcal{F} , il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $(Nf_{n_k})_k$ tend vers une similitude g . Du coup, si on extrait une sous-suite pour que $(\rho_{f_{n_k}})_k$ soit convergente vers $\rho \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ alors $(f_{n_k})_k$ tend vers $\rho^{-1}p_\sigma g p_\sigma \rho_0$. Donc \mathcal{F} est relativement compacte.

Sinon, il existe une suite $(f_n)_n$ de \mathcal{F} et deux points $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ incluant le point à l'infini tels qu'on ait convergence uniforme sur les compacts de $\widehat{\mathbb{R}}^n \setminus \{a\}$ de $(Nf_n)_n$ vers b . Comme ci-dessus, on suppose que $(\rho_{f_n})_n$ tend vers ρ . On a convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur les compacts de $\mathbb{S}^n \setminus \{\rho_0 p_\sigma(a)\}$ vers $\rho^{-1} p_\sigma(b)$. ■

EXERCICE 3.21. — Soit \mathcal{F} une famille de transformation de Möbius de \mathbb{S}^n . On suppose qu'il existe trois points distincts x_1, x_2 et x_3 de \mathbb{S}^n et $m > 0$ tels que toutes paires de points de $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$ sont à distance au moins m pour toute $f \in \mathcal{F}$. Alors \mathcal{F} est relativement compacte.

RÉFÉRENCES

- [Cox] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1969 edition.
- [Spi] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [Thu] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy, accessible sur <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.