2. ACTIONS GÉOMÉTRIQUES, QUASI-ISOMÉTRIES

Ce chapitre introduit les objets de base de la géométrie des groupes. Il s'agit d'étudier les groupes par des méthodes topologiques et géométriques, à travers ses actions sur différents espaces. En particulier, on montre qu'un groupe de type fini dénombrable porte une géométrie bien définie à quasi-isométries près. Un de ces aspects est de considérer un groupe comme un objet géométrique.

Suivant F. Klein, une géométrie est donnée par un ensemble X et un groupe de transformations G de X i.e., un sous-groupe G des bijections de X. On peut par exemple étudier un espace vectoriel E muni du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$, un espace affine euclidien muni du groupe de ses isométries, etc. On étudie alors les « êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe » [Kle]. Dans le premier exemple, il s'agit des sous-espaces vectoriels, des applications linéaires, etc. Dans le second, cela comprend aussi la notion d'orthogonalité, de distances à des sous-espaces affines, etc.

L'objet principal de la géométrie est donc de développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe. De manière générale, deux géométries (X_1, G_1) et (X_2, G_2) sont équivalentes s'il existe une bijection $b : X_1 \to X_2$ qui conjugue les groupes G_1 et G_2 :

$$G_2 = \{b \circ g \circ b^{-1},\ g \in G_1\}.$$

D'une certaine manière, le programme d'Erlangen de F. Klein défend la thèse selon laquelle la géométrie se ramène à l'étude des groupes qui préservent les structures ajoutées. La théorie géométrique des groupes adopte le point de vue inverse : on étudie un groupe en considérant les différentes actions qu'il admet sur des espaces géométriques, voire topologiques. On tire les propriétés algébriques du groupe en appliquant des méthodes géométriques. Cette méthode remonte aux travaux de M. Dehn, et a été systématiquement appliquée par M. Gromov, avec des résultats spectaculaires.

Rappelons qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X est donnée par un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{Bij}\,(X).$$

Le point de départ sont les graphes de Cayley associés à des systèmes de générateurs finis. Cela munit le groupe d'une géométrie. Puis on s'intéresse à ses actions sur des espaces métriques par isométries avec pour point d'orgue le lemme fondamental de la théorie géométrique des groupes qui relie un groupe à la géométrie de l'espace sur lequel il opère. On conclut ce chapitre par des propriétés des quasi-isométries. On fixe tout d'abord du vocabulaire pour la suite.

2.1. Notions de géométrie métrique

Dans tout ce paragraphe, (X, d) désigne un espace métrique.

On dit que X est *propre* si, pour tout $x_0 \in X$, la fonction $x \in X \mapsto d(x_0, x)$ est propre, autrement dit les boules fermées de rayon fini sont compactes, ou encore, les fermés bornés sont compacts.

Une courbe (paramétrée) ou un chemin dans X est une application continue $\gamma : I \to X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut, comme dans les espaces euclidiens et lorsque I est compact, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{0 \leq j < n} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de I telles que $[t_0, t_n] = I$. Si I n'est pas compact, alors on définit $\ell(\gamma) = \sup_{J \subset I} \ell(\gamma|_J)$, où le supremum est pris sur les intervalles compacts de I. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable.*

Un chemin $\gamma : I \to X$ est *géodésique* si, pour tous $s, t \in I$, on a $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$. On dit que γ, ou $\gamma(I)$, est une *géodésique* si $I = \mathbb{R}$, un *rayon (géodésique)* si $I = \mathbb{R}_+$ et un *segment (géodésique)* si I est un intervalle compact.

Un segment géodésique d'extrémités x et y sera noté $[x, y]$, même s'il n'est pas unique.

DÉFINITION 2.1 (Espace de longueur). — *Un espace métrique (X, d) est un espace de longueur si, pour tous $x, y \in X$,*

$$d(x, y) = \inf \ell(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins $\gamma : [0, 1] \to X$ d'extrémités x et y i.e., tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

On dit que X est *géodésique* si toute paire de points $\{x, y\}$ est jointe par un segment géodésique (qui n'est pas forcément unique). Un espace géodésique est donc un espace de longueur. La réciproque est vraie si X est propre :

EXERCICE 2.2. — *Montrer que si X est un espace de longueur propre, alors X est géodésique.*

2.2. **Groupes de type fini, graphes de Cayley**

Un groupe G est *de type fini* s'il est finiment engendré. Autrement dit, il existe un ensemble fini $S \subset G$ tel que, pour tout $g \in G$, il existe $s_1, \ldots, s_k \in S$ tels que

$$g = s_1 s_2 \ldots s_k .$$

Dans ce paragraphe, on montre comment associer un espace métrique à un groupe de type fini muni d'une action de ce groupe. On présente d'abord une famille de groupes qui jouent un rôle particulier dans la théorie.

2.2.1. *Groupes libres.* Soit A un ensemble, que l'on appelle *alphabet* et ses éléments *lettres.* On définit formellement A^{-1} en écrivant a^{-1} pour $a \in A$. Un *mot* est un élément de $A^* = \cup_{n\geq 0}(A \cup A^{-1})^n$, où $A^0 = \{\emptyset\}$. En général, on écrit un mot $(a_1, \ldots, a_n)$ sous la forme $a_1 a_2 \ldots a_n$; p. ex. $a_1 a_2^2 a_1^{-1} a_3$ si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \geq 3$.

On munit A^* de la loi de composition interne définie par concaténation : si $m_1, m_2 \in A^*$, alors on construit $m_1 m_2 \in A^*$. On vérifie que cette loi est associative d'élément neutre le mot vide $\emptyset$.

On définit la relation d'équivalence sur les mots engendrée par les relations $m_1 a a^{-1} m_2 \sim m_1 m_2$ et $m_1 a^{-1} a m_2 \sim m_1 m_2$, où $m_1, m_2 \in A^*$ et $a \in A$. Un mot qui ne contient aucun sous-mot de la forme $m_1 a a^{-1} m_2$ ou $m_1 a^{-1} a m_2$ s'appelle un *mot réduit.*

EXERCICE 2.3. — *Soit A un ensemble. Montrer que tout mot de A^* admet un unique représentant réduit.*

Le *groupe libre* $\mathbb{F}(A)$ d'alphabet A est $A^*/\sim$ muni de la concaténation.

EXERCICE 2.4. — *Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{F}(A)$ et $\mathbb{F}(B)$ sont isomorphes si et seulement si A et B ont même cardinal.*

(1) Soit $N(A)$ le sous-groupe de $\mathbb{F}(A)$ engendré par les carrés g^2 de $\mathbb{F}(A)$. Montrer que $N(A)$ est distingué dans $\mathbb{F}(A)$.

(2) Montrer que $\mathbb{F}(A)/N(A)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^A$ et que ce quotient a une structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) En déduire que $\mathbb{F}(A)$ et $\mathbb{F}(B)$ sont isomorphes si et seulement si A et B ont même cardinal.

Si $n \geq 1$, on désigne par $\mathbb{F}_n$ le groupe libre sur n lettres. Si $n = 1$, alors $\mathbb{F}_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Plus généralement, $\mathbb{F}_n$ est isomorphe au groupe fondamental d'un bouquet de n cercles i.e, la réunion disjointe de n cercles marqués (S^1, a_j), $1 \leq j \leq n$, où on identifie les points a_j.

EXERCICE 2.5. — *Soiten G un groupe et S un système de générateurs fini. On définit l'application $\pi : \mathbb{F}(S) \to G$ qui à un mot $s_1 \ldots s_k \in S^*$ associe l'élément du groupe $g = s_1 \ldots s_k \in G$.*

(1) Montrer que π est un morphisme de groupes.

(2) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{F}(S)/\ker \pi$.

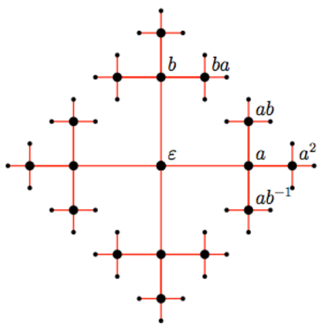
2.2.2. *Graphes de Cayley.* Soit (G, S) un groupe de type fini muni d'un système de générateurs S symétrique ($s \in S$ implique $s^{-1} \in S$). On définit $|g|_S$ comme le nombre minimal de lettres de S nécessaires pour écrire g en les générateurs de S. On définit la *métrique des mots* sur G associée à S en posant $d_S(g, g') = |g^{-1}g'|_S$. On vérifie facilement que $d_S(gx, gy) = d_S(x, y)$ pour tous $g, x, y \in G$.

On appelle *graphe* un espace topologique Γ obtenu à partir d'un ensemble $A = \Gamma^{(1)}$ de copies de l'intervalle $[0,1]$ en identifiant des extrémités. Le graphe Γ est fini si A est fini. On appelle *arête* chaque élément de A. Une arête a deux extrémités éventuellement confondues dans Γ, les éléments de l'ensemble $S = \Gamma^{(0)}$ de points du graphe ainsi obtenus sont appelés les *sommets* de Γ.

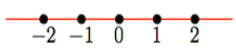
Si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G, on peut considérer le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et on joint une paire $(g, g') \in G \times G$ par une arête étiquetée par $s \in S$ si $g^{-1}g' = s$. On oriente l'arête dans le sens (g, gs), de sorte que si on lit un chemin orienté d'arêtes en partant de l'élément neutre e que l'on retranscrit de la gauche vers la droite, alors on obtient une écriture de l'autre extrémité g en les générateurs de S. En particulier, une boucle dans $\mathcal{G}$ issue de e est une écriture de l'élément neutre. Par conséquent, si A est fini et que l'on considère le graphe de Cayley de $\mathbb{F}(A)$ en prenant comme générateurs les a, a^{-1}, $a \in A$, on obtient un graphe sans boucle, donc un arbre, car les éléments de $\mathbb{F}(A)$ sont en bijection avec les mots réduits de A^*.

En munissant $\mathcal{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$, on obtient la métrique des mots associée à S sur les sommets. Elle fait de $\mathcal{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action libre sur $\mathcal{G}$.

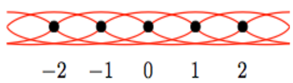
Exemple : le groupe libre.— Voici le graphe de Cayley du groupe libre à deux générateurs avec les générateurs standard.



Exemple.— Si $G = \mathbb{Z}$, on peut prendre le système de générateurs $\{1, -1\}$. On obtient ainsi une droite. Mais si on prend $\{2, 3, (-2), (-3)\}$, alors le graphe est différent.

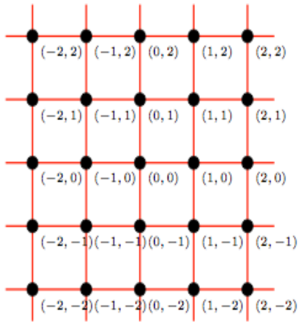


Cay$(\mathbb{Z}, \{1\})$



Cay$(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

Exemple.— Si $G = \mathbb{Z}^2$, on peut prendre le système de générateurs $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. On obtient ainsi un pavage par carré du plan.



On commence par une proposition qui montre que toutes les actions sur les graphes de Cayley localement finis sont semblables.

PROPOSITION 2.6. — *Soit G un groupe de type fini. Si S et S' sont deux systèmes de générateurs finis, alors* Id : $(G, d_S) \to (G, d_{S'})$ *est bilipschitzienne : il existe une constante $L \geq 1$ telle que, pour tous $g, g' \in G$,*

$$\frac{1}{L} d_S(g, g') \leq d_{S'}(g, g') \leq L d_S(g, g') \,.$$

DÉMONSTRATION. On considère l'application Id : $(G, d_S) \to (G, d_{S'})$. Si $g_1, g_2 \in G$ alors on a $d_S(g_1, g_2) = |g_1^{-1} g_2|_S$ et $d_{S'}(g_1, g_2) = |g_1^{-1} g_2|_{S'}$. Si $|g_1^{-1} g_2|_S = m$ alors $|g_1^{-1} g_2|_{S'} \leq \ell \cdot m$ où $\ell = \max\{|s|_{S'}, s \in S\}$, impliquant ainsi $d_{S'}(g_1, g_2) \leq \ell d_S(g_1, g_2)$. Par symétrie, on obtient $d_S(g_1, g_2) \leq \ell' d_{S'}(g_1, g_2)$, avec $\ell' = \max\{|s'|_S, s' \in S'\}$. On conclut avec $L = \max\{\ell, \ell'\}$. ■

2.3. Le lemme fondamental de la théorie géométrique des groupes

Soit (X, d) un espace métrique propre. On suppose maintenant que G opère par homéomorphismes sur X, autrement dit, on a un morphisme $\rho : G \to \text{Homéo}(X)$.

DÉFINITION 2.7 (Action géométrique). — *Un groupe G* opère géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie : pour tous $x, y \in X$ et tout $g \in G$,*

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y) \,;$$

(2) *l'action est proprement discontinue : pour tous compacts K et L de X,*

$$\{g \in G, \; g(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini ;

(3) *l'action est cocompacte : il existe un compact K tel que $X = \cup_{g \in G} g(K)$.*

EXERCICE 2.8. — *Soit M une variété riemannienne compacte. Montrer que l'action de $\pi_1(M)$ sur son revêtement universel est géométrique.*

Le lemme suivant généralise la proposition 2.6. Il illustre notamment le fait que l'existence d'une « bonne » action permet d'obtenir une propriété algébrique du groupe — ici le fait d'être de type fini.

LEMME 2.9 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors G est de type fini. De plus, si S est un système de générateurs fini et $x \in X$, alors l'application $f : g \in G \mapsto g(x)$ vérifie les propriétés suivantes. Il existe deux constantes $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ telles que

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g, g') - c \leq d_X(g(x), g'(x)) \leq \lambda d_S(g, g') + c.$$

et $X \subset \cup_{g \in G} B_X(g(x), c)$.

Ce lemme montre qu'un groupe qui opère géométriquement sur un espace géodésique X « ressemble », à grande échelle, à X. Cette observation est une clef de la théorie géométrique des groupes et motive la définition suivante introduite sous cette forme par G. Margulis [Mar].

DÉFINITION 2.10 (Quasi-isométrie). — *Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un* plongement (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c.$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi (1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$ et, pour tout $y \in Y$, $d_Y(f(g(y)), y) \leq c$.*

EXERCICE 2.11. — *Montrer que $f : X \to Y$ est une quasi-isométrie si et seulement si f est un plongement quasi-isométrique et si $f(X)$ est coborné, c.à.d. s'il existe une constante $c > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq c$.*

COROLLAIRE 2.12. — *Soit M une variété riemannienne connexe et compacte. Son groupe fondamental $\pi_1(M)$ est quasi-isométrique à son revêtement universel $\widetilde{M}$.*

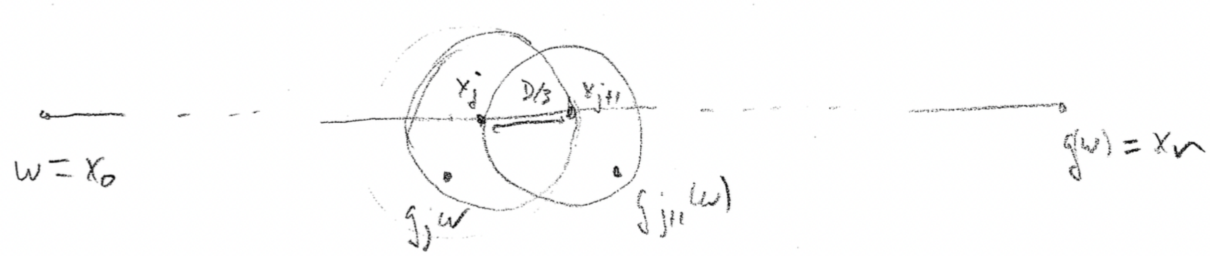
DÉMONSTRATION. L'action de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ est géométrique donc le lemme de Švarc-Milnor s'applique. ■

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.9. Soit $K \subset X$ un compact tel que $G(K) = X$, et prenons $w \in X$ et $D > 0$ pour que $K \subset B(w, D/3)$. On note

$$S = \{g \in G,\ g(B(w, D)) \cap B(w, D) \neq \emptyset\}.$$

Puisque X est propre et l'action est proprement discontinue, S est fini (et non vide, puisque $e \in S$). Nous allons montrer que S engendre G.

Soit $g \in G$, et considérons un segment $\gamma : [0,1] \to X$ avec $\gamma([0,1]) = [w, g(w)]$. On se donne une subdivision $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de $[0,1]$ telle que $t_0 = 0$, $t_n = 1$ et $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = D/3$, pour $j < n-1$. Pour chaque $0 < j < n$, il existe $g_j \in G$ tel que $d(\gamma(t_j), g_j(w)) \leq D/3$; on pose $g_0 = \mathrm{Id}$ et $g_n = g$.



Du coup,

$$d(g_j(w), g_{j+1}(w)) \leq d(g_j(w), \gamma(t_j)) + d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) + d(\gamma(t_{j+1}), g_{j+1}(w)) < D\,.$$

Par conséquent $d((g_j^{-1} \circ g_{j+1})(w), w) < D$ et $(g_j^{-1} \circ g_{j+1}) \in S$. En particulier,

$$g = g_0 \circ (g_0^{-1} \circ g_1) \dots (g_{n-1}^{-1} \circ g_n)$$

donc G est engendré par S. De plus, $|g|_S \leq n$ et

$$\begin{aligned} d(w, g(w)) &= \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\ &\geq \sum_{j=0}^{n-2} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \\ &\geq \frac{D}{3}(n-1) \\ &\geq \frac{D}{3}|g|_S - \frac{D}{3}. \end{aligned}$$

Si on note $M = \max\{d(g(w), w),\ g \in S\}$, alors, pour tout $g \in G$, on a

$$d(g(w), w) \leq |g|_S \cdot M$$

donc

$$g \mapsto g(w)$$

est une quasi-isométrie de $(G, |\cdot|_S)$ sur $G(w)$. Par définition de D, on a $X \subset G(B(w, D))$, donc on a bien une quasi-isométrie sur X. ∎

On présente quelques énoncés dans l'environnement du lemme 2.9.

EXERCICE 2.13. — *Montrer que* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{R}$ *sont quasi-isométriques.*

EXERCICE 2.14. — *On suppose que* G *opère sur un espace connexe* X*, et qu'il existe un ouvert* $U \subset X$ *tel que* $G(U) = X$*. Montrer que*

$$S = \{g \in G,\ g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

engendre G*.*

EXERCICE 2.15. — *Soit* G *un groupe qui opère proprement discontinûment par isométries sur un espace métrique géodésique propre* (X, d) *(l'action n'est pas supposée cocompacte).*

Pour $x_0 \in X$ *et tout* $R > 0$*, on pose*

$$D(x_0, R) = \{x \in X,\ \textit{il existe } g \in G \textit{ tel que } d(x, gx_0) \leq R\}\,.$$

Montrer que G *est de type fini si et seulement si, pour tout* $x_0 \in X$*, il existe* $R > 0$ *tel que* $D(x_0, R)$ *est connexe.*

EXERCICE 2.16. — *Soit* G *un groupe qui opère géométriquement sur un espace métrique géodésique propre* (X, d)*.*

(1) Soit $\alpha \in (0, 1)$*.*
  (a) Montrer que $d_\alpha(x, y) \overset{def.}{=} d(x, y)^\alpha$ *définit une distance sur* X*.*
  (b) Montrer que (X, d_α) *est un espace métrique propre et que l'application* Id : $(X, d) \to (X, d_\alpha)$ *n'est pas une quasi-isométrie.*

(2) (a) Montrer que G *opère géométriquement sur* (X, d_α)*.*
  (b) Peut-on appliquer le lemme de Schwartz-Milnor à l'action de G *sur* (X, d_α) *?*

(3) Montrer que (X, d_α) *n'est pas géodésique (on pourra montrer que les courbes non triviales ont une longueur infinie).*

EXERCICE 2.17. — *Soit* G *un groupe qui opère géométriquement sur un espace métrique propre quasi-géodésique* (X, d)*. Le groupe* G *est-il quasi-isométrique à* X *?*

2.4. Objets de la géométrie des groupes

Un des principaux objectifs de la théorie géométrique des groupes est d'apporter des réponses aux questions générales suivantes :

QUESTION 2.18 (fondamentale). —
- *Quels groupes opèrent par isométries sur quels espaces ?*
- *Si un groupe opère sur un espace, que peut-on en déduire sur ce groupe ? et sur l'espace ?*
- *Si on pense à un groupe comme à un espace métrique, à quoi ressemble-t-il ?*

Le lemme de Švarc-Milnor montre qu'un groupe de type fini n'a qu'une action géométrique sur un espace géodésique propre à quasi-isométries près. En particulier, tous ses graphes de Cayley localement finis sont quasi-isométriques. On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

EXERCICE 2.19. — *Soit G un groupe de type fini.*

(1) Soit H un sous-groupe d'indice fini. Montrer que H est quasi-isométrique à G et que H est aussi de type fini. On pourra faire opérer H sur un graphe de Cayley localement fini de G.

(2) Montrer que si N est un sous-groupe fini et distingué de G, alors G et G/N sont quasi-isométriques.

On cherche donc à classer les groupes de type fini à quasi-isométries près (en éludant les cas « élémentaires » donnés par l'exercice précédent). Rappelons que deux groupes G_1 et G_2 sont *virtuellement isomorphes* s'il existe des sous-groupes d'indice fini $H_i < G_i$ et des sous-groupes normaux finis $F_i \triangleleft H_i$ tels que H_1/F_1 et H_2/F_2 sont isomorphes. Deux groupes de type fini virtuellement isomorphes sont toujours quasi-isométriques, mais la réciproque est fausse en général. Lorsque tous les groupes d'une classe de quasi-isométrie sont tous virtuellement isomorphes, on parle de *rigidité quasi-isométrique*, cf. le théorème 2.22. Les théorèmes de l'introduction en sont aussi des illustrations.

La classification à quasi-isométries près comprend aussi la question suivante :

QUESTION 2.20. — *Si deux groupes sont quasi-isométriques, dans quelle mesure jouissent-ils des mêmes propriétés algébriques ?*

Cela revient en particulier à établir les propriétés des groupes qui sont invariantes par quasi-isométries. On dit alors qu'elles sont *géométriques*. Toute propriété géométrique sera donc une propriété du groupe. Par exemple, le fait d'être de présentation finie est géométrique. Voici un autre exemple.

EXERCICE 2.21. — *(1) Soient $f, g : X \to Y$ deux applications telles que $\sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \leq M$ où $M \geq 0$ est une constante. Montrer que f est une quasi-isométrie si et seulement si g l'est.*

(2) Soit X un espace métrique et considérons l'ensemble $QI(X)$ des quasi-isométries de X. Montrer qu'il est stable par composition.

(3) Pour $f, g \in QI(X)$, on écrit $f \sim g$ si $\sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x)) \leq M$ pour une constante $M \geq 0$. Montrer que cela définit une relation d'équivalence.

(4) Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence $[f]$ de quasi-isométries $f : X \to X$ forme un groupe pour la composition (induite par celle de ses représentants). Ce groupe est le groupe de quasi-isométries *de X.*

(5) *Montrer que deux espaces quasi-isométriques ont des groupes de quasi-isométries isomorphes.*

Les classes de quasi-isométrie et d'isomorphisme virtuel des groupes libres abéliens ou non coïncident —elles sont quasi-isométriquement rigides.

Théorème 2.22. — *On a les propriétés suivantes.*
- *Un groupe de type fini quasi-isométrique à un groupe libre contient un sous-groupe libre d'indice fini (J. Stallings* [Sta]*).*
- *Un groupe de type fini quasi-isométrique à un groupe abélien contient un sous-groupe libre abélien d'indice fini (P. Pansu* [Pan]*).*

2.5. Quasi-isométries

On donne quelques exercices sur les quasi-isométries qui devraient permettre de se familiariser avec la notion.

Exercice 2.23. — *Montrer que la relation « être quasi-isométrique » définit une relation d'équivalence sur les espaces métriques.*

Exercice 2.24. — *Montrer que pour que deux espaces métriques X et Y soient quasi-isométriques, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$ cobornés et une quasi-isométrie entre X' et Y'.*

Exercice 2.25. — *Soient X et Y deux espaces métriques. Une correspondance quasi-isométrique est donnée par deux constantes $\lambda \geq 1$ et $c > 0$ et une relation binaire $\mathcal{R} \subset X \times Y$ telles que*

(1) *les projections canonique sur chaque facteur sont surjectives : pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $x\mathcal{R}y$; pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $x\mathcal{R}y$;*

(2) *si $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$, alors*

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x,x') - c \leq d_Y(y,y') \leq \lambda d_X(x,x') + c.$$

Montrer que X et Y sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe une correspondance quasi-isométrique entre X et Y.

Exercice 2.26. — *Le but de cet exercice est de montrer que, quelle que soit $\varepsilon > 0$, un espace de longueur X est $(1+\varepsilon, 2)$-quasi-isométrique à un graphe G dont chaque arête est isométrique au segment $[0,1]$. Soit $\delta > 0$.*

(1) *Montrer qu'il existe une famille maximale de boules $\mathcal{B}_\delta$ de rayon δ deux à deux disjointes dans X. Montrer que si $x \in X$, il existe $B = B(c,\delta) \in \mathcal{B}_\delta$ telle que $d(x,c) < 2\delta$.*

(2) On définit le graphe $\Gamma = (S, A)$*, où* $S = \mathcal{B}_\delta$ *et* $(B, B') \in A$*,* $B = B(c, \delta)$*,* $B' = B(c', \delta)$*, si* $d(c, c') \leq 1$*. Montrer que l'application* $B = B(c, \delta) \in \Gamma \mapsto c \in X$ *définit une* $(1 + \varepsilon, 2)$*-quasi-isométrie, où* $\varepsilon = O(\delta)$*.*

EXERCICE 2.27. — *Soit* T_n *l'arbre régulier infini, où chaque sommet est l'extrémité de* n *arêtes,* $n \geq 3$*. On munit* T_n *de la distance de longueur qui rend chaque arête isométrique à* $[0, 1]$*.*

(1) On colorie les arêtes de T_3 *de trois couleurs* a*,* b *et* c *de sorte que chaque sommet est l'extrémité d'une arête de chaque couleur, et on considère la relation d'équivalence* $x \sim x'$ *si* $\{x, x'\}$ *est inclus dans la fermeture d'une arête de couleur* a*.*

(a) Montrer que $T_3/\sim$ *est isomorphe à* T_4*.*

(b) En déduire que T_3 *et* T_4 *sont quasi-isométriques.*

(2) Montrer que T_m *et* T_n *sont quasi-isométriques si* $m, n \geq 3$*.*

(3) En déduire que $\mathbb{F}_m$ *et* $\mathbb{F}_n$ *sont quasi-isométriques si* $m, n \geq 2$*.*

RÉFÉRENCES

[Kle] Felix Klein. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **8**(1891), 87–102 et 173–199.

[Mar] Gregory A. Margulis. The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group. *Soviet Math. Dokl.* **11**(1970), 722–723.

[Pan] Pierre Pansu. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3**(1983), 415–445.

[Sta] John Stallings. *Group theory and three-dimensional manifolds.* Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1969, Yale Mathematical Monographs, 4.