1. INTRODUCTION

L'objet principal de ce cours est de présenter une démonstration du théorème de rigidité de Mostow. Outre son énoncé très frappant qui contraste avec la dimension 2, c'est un résultat profond qui est une source d'inspiration très importante dans la recherche contemporaine. Non seulement cela a ouvert la voie vers d'autres phénomènes de rigidité, mais cela a aussi contribué à développer une théorie fructueuse des bords géométriques d'espaces de courbure négative.

Théorème 1.1 (G. D. Mostow [Mos]). — *Soient M_1 et M_2 deux variétés compactes hyperboliques et supposons que la dimension de M_1 est au moins 3. Si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes, alors les variétés sont isométriques.*

Voici une esquisse de démonstration qui fera l'objet de développements dans la suite du cours.

(1) Pour $j = 1, 2$, notons d_j la dimension de M_j. Par hypothèses, il existe un sous-groupe d'isométries G_j de $\mathbb{H}^{d_j}$ tels que $\mathbb{H}^{d_j}/G_j \simeq M_j$. Le groupe G_j opère géométriquement sur $\mathbb{H}^{d_j}$.

(2) D'après le lemme de Švarc-Milnor, l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{d_j}$ est quasi-isométrique à l'orbite d'un point $G_j(w_j)$, $w_j \in \mathbb{H}^{n_j}$.

(3) Notons $\rho : G_1 \to G_2$ un isomorphisme. On définit $\phi : G_1(w_1) \to G_2(w_2)$ par $\phi(g(w_1)) = \rho(g)(w_2)$. On obtient ainsi une quasi-isométrie équivariante $\Phi : \mathbb{H}^{d_1} \to \mathbb{H}^{d_2}$.

(4) En utilisant le modèle de la boule, l'action de G_j sur $\mathbb{H}^{d_j}$, $j = 1, 2$, se prolonge en une action sur la sphère $\mathbb{S}^{d_j - 1}$ par transformations de Möbius (préservation des birapports).

(5) On montre aussi que Φ se prolonge en un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{S}^{d_1-1} \to \mathbb{S}^{d_2-1}$ équivariant. Cela implique notamment que $d_1 = d_2$ et on notera d cette dimension commune.

(6) L'étape suivante consiste à montrer que φ est une transformation de Möbius. C'est là que l'hypothèse sur la dimension est utilisée.

   (a) Tout d'abord, un fait général montre que $\varphi : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ est une transformation quasimöbius (les birapports sont contrôlés).

   (b) Comme $(d-1) \geq 2$, cela implique que $\varphi : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ jouit de bonnes propriétés analytiques.

   (c) Ces propriétés combinées aux propriétés dynamiques de G_1 et G_2 sur $\mathbb{S}^d$ et au fait que φ est équivariant sont utilisées pour montrer que φ est également une transformation de Möbius.

(7) Il vient que φ s'étend (de manière unique) en une isométrie équivariante $h : \mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^d$, induisant une isométrie entre les quotients respectifs.

Voici quelques énoncés inspirés par la rigidité de Mostow et ses méthodes. On dira que deux groupes G_1 et G_2 sont *virtuellement isomorphes* s'il existe des sous-groupes d'indice fini $H_i < G_i$ et des sous-groupes normaux finis $F_i \lhd H_i$ tels que H_1/F_1 et H_2/F_2 sont isomorphes.

THÉORÈME 1.2 (Cannon-Cooper [CC]). — *Un groupe quasi-isométrique à $\mathbb{H}^n$ est virtuellement isomorphe au groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension n.*

THÉORÈME 1.3 (Frigerio [Fri]). — *Soit M une variété hyperbolique compacte à bord totalement géodésique Un groupe G quasi-isométrique à $\pi_1(M)$ est virtuellement isomorphe à $\pi_1(M)$.*

THÉORÈME 1.4 (M. Bourdon [Bou]). — *Soit X un espace CAT(-1) propre et géodésiquement complet. On suppose que G est un groupe qui opère géométriquement sur $\mathbb{H}^n$, $n \geq 3$, et sur un espace X de type CAT(-1) propre, géodésiquement complet et d'entropie volumique $(n-1)$. Alors X et $\mathbb{H}^n$ sont isométriques.*

THÉORÈME 1.5 (J. Lelong-Ferrand [Fer]). — *Soit M une variété riemannienne compacte. Si son groupe de transformations conformes n'est pas compacte, alors M est conforme à la sphère.*

RÉFÉRENCES

[Bou] Marc Bourdon. Sur le birapport au bord des CAT(-1)-espaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83**(1996), 95–104.

[CC] James W. Cannon and Daryl Cooper. A characterization of cocompact hyperbolic and finite-volume hyperbolic groups in dimension three. *Trans. Amer. Math. Soc.* **330**(1992), 419–431.

[Fer] Jacqueline Ferrand. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Math. Ann.* **304**(1996), 277–291.

[Fri] Roberto Frigerio. Commensurability of hyperbolic manifolds with geodesic boundary. *Geom. Dedicata* **118**(2006), 105–131.

[Mos] George D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **34**(1968), 53–104.