UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE — **Licence 3, Mathématiques**
Calcul différentiel et optimisation — **2017-18**

Corrigé du partiel du 24 novembre 2017

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Question de cours.

1. *Énoncer le théorème de Schwarz.*

   Soitent E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, a un point de U et $f : U \to F$ une application deux fois différentiable au point a. Alors la différentielle seconde $D_a^2 f$ est symétrique: pour tous vecteurs $h, k \in E$, on a $D_a^2 f(h,k) = D_a^2 f(k,h)$.

2. *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Énoncer et démontrer la formule qui donne la différentielle en $x \in E$ du produit de ces deux fonctions.*

   On a $D_x(fg) = f(x)D_x g + g(x)D_x f$. En effet, par définition de la différentiabilité de f et g au point x, on a, pour $h \in E$ assez petit,

   $$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + D_x f(h) + o(h) \\ g(x+h) = g(x) + D_x g(h) + o(h) \end{cases}$$

   donc

   $$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) &= [f(x) + D_x f(h) + o(h)][g(x) + D_x g(h) + o(h)] \\ &= f(x)g(x) + [f(x)D_x g(h) + g(x)D_x f(h)] + D_x f(h) D_x g(h) + o(h)\,. \end{aligned}$$

   Comme $|D_x f(h) D_x g(h)| \leq \|D_x f\| \times \|D_x g\| \times \|h\|^2$, on obtient

   $$f(x+h)g(x+h) = f(x)g(x) + [f(x)D_x g(h) + g(x)D_x f(h)] + o(h)$$

   On conclut en observant que $h \mapsto f(x)D_x g(h) + g(x)D_x f(h)$ est linéaire.

Exercice 1 *Trouver et étudier les points critiques de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 3x$.

La fonction f est polynomiale, donc bien définie sur tout $\mathbb{R}^3$, et de classe C^∞. Cherchons ses points critiques. Pour cela, on calcule la matrice jacobienne de f en un point $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On trouve

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 & 4y - 2z & 4z - 2y \end{pmatrix}$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} x^2 - 1 &= 0 \\ 2y - z &= 0 \\ 2z - y &= 0 \end{cases}$$

On trouve $x = \pm 1$, $y = z = 0$. Du coup, nous avons deux points critiques

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer leur nature, on s'intéresse à la hessienne, et au signe de ses valeurs propres. On trouve

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que $6x$ est une valeur propre de vecteur propre le premier vecteur de la base canonique. Du coup, on s'intéresse aux valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Comme $\det A = 16 - 4 = 12 > 0$ et tr$A = 8 > 0$, on en déduit que les valeurs propres de A sont toutes deux strictement positives.

En conclusion, les valeurs propres de $H_f(c_1)$ sont toutes strictement positives, donc c_1 est un minimum local strict mais les valeurs propres de $H_f(c_2)$ n'ont pas toute le même signe, tout en étant non nulles, donc c_2 est un point selle.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) *Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

f est le quotient de deux applications polynomiales donc différentiables. Elle est donc définie et différentiable partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) *Montrer que les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.*

Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculons

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f((0,0)+tv) - f(0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{ta(tb)^2}{t\left((ta)^2+(tb)^2\right)} = f(a,b).$$

Donc $f'_v(0,0) = f(v)$. C'est trivialement vrai aussi pour $v = 0$, mais pas très intéressant. (Normalement on ne définit pas de telle dérivée directionnelle)

3) *f est elle continue en $(0,0)$?*

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$ donc

$$|f(x,y)| = |x| \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le |x|$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$.

4) *f est elle différentiable en $(0,0)$?*

Si la différentielle en $(0,0)$ existait, ce serait l'application qui à v associe $f'_v(0,0)$. Comme cette application n'est pas linéaire, la différentielle en $(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 3

On appelle affine une application entre espace vectoriels qui est la somme d'une application linéaire et d'une fonction constante.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable.

1. *Montrer que f est la restriction d'une application affine si et seulement si sa différentielle Df est constante sur U.*

   Dire que f est la restriction d'une application affine, c'est dire qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $c \in \mathbb{R}^p$ telle qu'on ait

$$\forall x \in U, f(x) = L(x) + c.$$

On a alors pour tout $x \in U$, $D_x f = D_x L + D_x c = L + 0 = L$, donc Df est constante.

Réciproquement, supposons Df constante. Cela siqnifie qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle qu'on ait

$$\forall x \in U, D_x f = L.$$

Posons alors $g = f - L$. L'application g est définie et différentiable sur U comme différence de 2 applications différentiables et on a

$$\forall x \in U, D_x g = D_x f - L = 0,$$

d'où, comme U est convexe, g est constante.

Finalement, f est bien la restriction à U de l'application affine $L + g(a)$ pour un $a^{\in} U$ quelconque.

2. *Montrer par un exemple que l'un des sens de l'équivalence est faux si U n'est pas convexe.*

   Il suffit de considérer $p = n = 1$, $U =]0, 1[\cup]1, 2[$ et l'application qui vaut0 sur $]0, 1[$ et,1 sur $]1, 2[$. Celle-ci n'est pas affine alors que sa différentielle est nulle en tout point.

3. *Écrire avec des coefficients la formule d'une application affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.*
   Un application affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. est une application qui vérifie

   $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 f(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

   pour un certain $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

4. *À quel type d'ouvert non nécessairement convexe peut-on étendre le résultat du 1.?*

   Le résultat s'étend à tout ouvert connexe par arc, et même connexe. En effet, sur de tels ouverts aussi les seules applications de différentielle nulle sont les constantes, donc la démonstration s'étend à l'identique.