Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

DEVOIR MAISON

Devoir à rendre au plus tard le 24 octobre 2017

LA CLARTÉ ET LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION SERONT PRISES EN COMPTE DANS L'ÉVALUATION.

Exercice 1 On considère les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y, x\exp(xy)), \quad g(u,v,w) = uv^2w.$$

1) Justifiez soigneusement que f, g et $g \circ f$ sont dérivables sur leur ensemble de départ.

2) Calculez explicitement $g \circ f$.

3) En utilisant l'expression trouvée en 2), calculez les dérivées partielles de $g \circ f$.

4) Déterminez les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.

5) Retrouvez le résultat du 3) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{3/2}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrez que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) Montrez que les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

3) f est-elle continue en $(0,0)$?

4) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 3 Soit $r > 0$, on note $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < r\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = r\}$ les boules et la sphère de rayon r de $\mathbb{R}^d$. $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ et la norme induite sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$f : \bar{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\bar{B}$ et différentiable sur B. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ait

$$\forall x \in S, |f(x)| \leq \epsilon. \tag{0.1}$$

On veut en déduire qu'il existe $x_0 \in B$ tel qu'on ait

$$\|D_{x_0} f\| \leq \frac{\epsilon}{r}. \tag{0.2}$$

1. Si $\epsilon = 0$ et $d = 1$, quel résultat bien connu retrouve t'on ? Peut-on le déduire du cas $\epsilon > 0$? Sinon, vérifiez que la démonstration classique s'étend à un $d > 1$.
2. Montrez que le résultat est optimal, au sens où on ne peut pas donner de meilleure majoration de $\|D_{x_0} f\|$ que ϵ/r. (On pourra chercher un exemple en dimension 1.)

   On introduit la fonction $g : \bar{B} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\|x\|^2}{r^2} - \frac{f(x)^2}{\epsilon^2} \tag{0.3}$$

3. Montrez que g est différentiable sur B.
4. Montrez que g est bornée et atteint ses bornes. On pose $m = \min_{x \in \bar{B}} g(x)$.
5. Vérifiez que $m \leq 0$.
6. Dans cette question, on suppose que $m = 0$. En déduire que $f(0) = 0$ et une majoration sur $|f(x)|$ d'où on déduira que $x_0 = 0$ vérifie (0.2).
7. Dans cette question, on suppose que $m < 0$. Montrez que tout point x_0 tel que $g(x_0) = m$ est dans B et vérifie (0.2).