Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

DEVOIR MAISON

Correction du Devoir

LA CLARTÉ ET LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION SERONT PRISES EN COMPTE DANS L'ÉVALUATION.

Exercice 1 *On considère les fonctions* $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *et* $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définies par*

$$f(x,y) = (\sin(xy), y, x\exp(xy)), \quad g(u,v,w) = uv^2w.$$

1) *Justifiez soigneusement que* f, g *et* $g \circ f$ *sont dérivables sur leur ensemble de départ.*

   On vérifie tout d'abord que f est bien définie sur tout $\mathbb{R}^2$. Pour montrer que la fonction f est différentiable, il suffit de vérifier que c'est le cas de chacune de ses composantes.

   La première composante est la composée de la fonction sinus qui est connue comme étant différentiable et de la fonction bilinéaire $(x,y) \mapsto xy$ qui est donc aussi différentiable. On en déduit donc que $(x,y) \mapsto \sin(xy)$ est différentiable.

   La seconde composante est linéaire, donc différentiable aussi.

   La troisième composante s'obtient en composant l'exponentielle, différentiable, avec l'application bilinéaire $(x,y) \mapsto xy$, diffférentiable aussi et en multipliant le tout par l'application linéaire $(x,y) \mapsto x$. Donc la troisième composante est aussi différentiable.

   Du coup, les trois composantes sont différentiables, donc f est différentiable.

   La fonction g est polynomiale, donc bien définie et différentiable sur tout $\mathbb{R}^3$.

   Enfin, la fonction $(g \circ f)$ est bien déifinie car $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, et différentiable comme composée de deux fonctions différentiables.

2) *Calculez explicitement* $g \circ f$.

On a, par définition de la composition,

$$(g \circ f)(x,y) = g[f(x,y)] = g(\sin(xy), y, x\exp(xy)) = xy^2 \sin(xy)e^{xy} \, .$$

3) *En utilisant l'expression trouvée en 2), calculez les dérivées partielles de $g \circ f$.*

L'application $g \circ f$ étant différentiable, on peut calculer ses dérivées partielles en utilisant les formules de dérivation. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(g \circ f)(x,y) &= y^2 \sin(xy)e^{xy} + xy^3 \cos(xy)e^{xy} + xy^3 \sin(xy)e^{xy} \\ &= y^2 e^{xy}(\sin(xy) + xy\cos(xy) + xy\sin(xy)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(g \circ f)(x,y) &= 2xy \sin(xy)e^{xy} + x^2y^2 \cos(xy)e^{xy} + x^2y^2 \sin(xy)e^{xy} \\ &= xye^{xy}(2\sin(xy) + xy\cos(xy) + xy\sin(xy)) \end{aligned}$$

4) *Déterminez les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.*

Les matrices jacobiennes sont les matrices des différentielles dans les bases canoniques : on obtient

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ 0 & 1 \\ (1+xy)e^{xy} & x^2e^{xy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} v^2w & 2uvw & uv^2 \end{pmatrix}$$

5) *Retrouvez le résultat du 3) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.*

On doit avoir $J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y)) \times J_f(x,y)$. Or

$$J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} xy^2e^{xy} & 2xy\sin(xy)e^{xy} & y^2\sin(xy) \end{pmatrix}$$

et, d'après la question 3)

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy}(\sin(xy) + xy\cos(xy) + xy\sin(xy)) & xye^{xy}(2\sin(xy) + xy\cos(xy) + xy\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

Or, on trouve

$$\begin{aligned} J_g(f(x,y))J_f(x,y) &= (xy^2e^{xy}y\cos(xy) + y^2\sin(xy)(1+xy)e^{xy} \quad xy^2e^{xy}x\cos(xy) \\ &\qquad\qquad +2xy\sin(xy)e^{xy} + \ y^2\sin(xy)x^2e^{xy}) \\ &= J_{g\circ f}(x,y) \, . \end{aligned}$$

Exercice 2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{3/2}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) *Montrez que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.*

Tout d'abord, l'application $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale et ne s'annule qu'en $(0,0)$, donc $(x,y) \mapsto 1/(x^2+y^2)$ est bien différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.

L'application $(x,y) \mapsto |xy|^{3/2}$ est la composée de l'application bilinéaire $(x,y) \mapsto xy$ qui est différentiable et de l'application d'une variable réelle $t \mapsto |t|^{3/2}$. Rappelons que si α est un réel non entier (et non nul), alors la fonction $t \mapsto t^\alpha$ n'est définie que sur $[0,\infty[$, et différentiable sur $]0,+\infty[$.

Reprenons l'étude la dérivabilité de $u : t \mapsto |t|^{3/2}$. La valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Reste à étudier la dérivabilité en 0 :

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(t)-u(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{3/2}}{t} = \lim_{t\to 0} |t|^{1/2} \frac{|t|}{t} = 0\,.$$

Donc u dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et f est le produit de deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc différentiable.

2) *Montrez que les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.*

Si $v \in \mathbb{R}^2$, on s'intéresse au taux d'accroissement

$$T_t f = \frac{f(tv)-f(0)}{t}\,.$$

Si $v = 0$, alors $T_t f = 0$ pour tout t, donc $f'_0(0,0) = 0$. C'est un fait général. Ecrivons maintenant $v = (a,b)$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. On a

$$T_t f = \frac{1}{t} \frac{|tatb|^{3/2}}{(ta)^2+(tb)^2} = \frac{(t^2)^{3/2}}{t^3} \frac{|ab|^{3/2}}{a^2+b^2}\,.$$

Or, $(t^2)^{1/2} = |t|$ donc

$$T_t f = \frac{|t|}{t} \frac{|ab|^{3/2}}{a^2+b^2}\,.$$

Notons que $t(\neq 0) \mapsto |t|/t$ n'a pas de limite en 0 puisque cette fonction change de signe avec t. Du coup, la limite de $T_t f$ quand t tend vers 0 n'existe que si l'autre facteur est nul, soit si a ou b est nul : on a donc l'existence des dérivées partielles qui valent toutes deux 0. Les autres dérivées directionnelles ne sont pas définies.

Si jamais on s'intéresse aux dérivées directionnelles *au sens de Dini*, c'est-à-dire à la limite suivante, quand elle existe,

$$f_v^{Dini}(0,0) = \lim_{t \to 0^+} T_t f$$

alors on trouve

$$f_v^{Dini}(0,0) = \frac{|ab|^{3/2}}{a^2+b^2} = f(v)\,.$$

3) *f est-elle continue en $(0,0)$?*

En partant de $(|x|-|y|)^2 \geq 0$, on obtient $|xy| \leq 2|xy| \leq x^2+y^2$ donc

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|^{3/2}}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2)^{1/2}$$

donc $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en 0.

Une autre méthode consiste à passer en polaire. Dans ce cas, il ne faut pas oublier de montrer que les facteurs trigonométriques sont bornés : si on écrit $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$, alors

$$|f(x,y)| = \frac{r^3|\cos t \sin t|^{3/2}}{r^2} \leq r\,.$$

4) *f est-elle différentiable en $(0,0)$?*

Si f était différentiable, alors toutes les dérivées directionnelles existeraient, ce qui n'est pas le cas. Si on a calculé les dérivées directionnelles au sens de Dini, alors l'application $v \mapsto f_v^{Dini}(0,0)$ devrait être linéaire, ce qui n'est pas le cas (pour $v=(1,1)$, on a $f_{-v}^{Dini}(0,0) \neq -f_v^{Dini}(0,0)$).

Dans les deux cas, on conclut que f n'est pas différentiable en 0.

Exercice 3 *Soit $r>0$, on note $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < r\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = r\}$ les boules et la sphère de rayon r de $\mathbb{R}^d$. $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$ et la norme induite sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$*

$f : \bar{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\bar{B}$ et différentiable sur B. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ait

$$\forall x \in S, |f(x)| \leq \epsilon. \tag{0.1}$$

On veut en déduire qu'il existe $x_0 \in B$ tel qu'on ait

$$\|D_{x_0} f\| \leq \frac{\epsilon}{r}. \tag{0.2}$$

1. *Si $\epsilon = 0$ et $d = 1$, quel résultat bien connu retrouve-t-on ? Vérifiez que sa démonstration s'étend à $d > 1$ (toujours pour $\epsilon = 0$). Aurait-on pu déduire ce résultat du cas $\epsilon > 0$?*

   On retrouve le théorème de Rolle.

   Vérifions que sa démonstration s'étend à $d > 1$. Soit f continue sur $\bar{B}$ et différentiable sur B, telle que $f_{|S} = 0$.

   Comme $\bar{B}$ est compacte (car fermée et bornée), f atteint ses bornes. Soient x_1 et x_2 des points où elle atteint respectivement son minimum et son maximum.

   Si l'un des points x_1 ou x_2 appartient à B, alors Df s'annule en ce point. Sinon, x_1 et x_2 sont dans S, et alors

   $$\min f = f(x_1) = 0 = f(x_2) = \max f,$$

   donc f est constante et sa différentielle est nulle en tout point de B.

2. *Montrez que le résultat est optimal, au sens où on ne peut pas donner de meilleure majoration de $\|D_{x_0} f\|$ que ϵ/r. (On pourra chercher un exemple en dimension 1.)*

   On prend $f : \bar{B} = [-r; r] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\epsilon}{r}x$ et on remarque que f est bien continue sur $\bar{B}$ et différentiable sur B comme restriction d'une application linéaire. On vérifie ensuite que $|f(x)| = \epsilon$ pour $x \in S = \{-r, r\}$ et que pour tout $x \in B$, $D_x f : h \mapsto \frac{\epsilon}{r}h$ a pour norme $\frac{\epsilon}{r}$, donc la majoration (0.2) ne peut pas être améliorée.

   On introduit la fonction $g : \bar{B} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$g(x) = \frac{\|x\|^2}{r^2} - \frac{f(x)^2}{\epsilon^2} \qquad (0.3)$$

3. *Montrez que g est différentiable sur B.*

   La fonction $x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable sur B (Attention, c'est faux pour $x \mapsto \|x\|$ et il s'agit ici de la norme euclidienne) comme fonction polynomiale, f^2 l'est sur B comme produit de fonctions différentiables, donc g l'est comme combinaison linéaire de fonctions différentiables.

4. *Montrez que g est bornée et atteint ses bornes. On pose $m = \min_{x \in \bar{B}} g(x)$.*

   La fonction g est continue comme combinaison linéaire et produit de fonctions continues et $\bar{B}$ est compacte comme fermée bornée, donc f est bornée et atteint ses bornes.

5. *Vérifiez que* $m \leq 0$.

   Par définition de m, on a $m \leq g(0) = -\frac{f^2(0)}{\epsilon^2} \leq 0$.

6. *Dans cette question, on suppose que* $m = 0$. *En déduire que* $f(0) = 0$ *et une majoration sur* $|f(x)|$ *d'où on déduira que* $x_0 = 0$ *vérifie* (0.2).

   Par définitions de m et g, on a pour tout $x \in \bar{B}$, $0 = m \leq \frac{\|x\|^2}{r^2} - \frac{f(x)^2}{\epsilon^2}$, d'où $|f(x)| \leq \frac{\epsilon}{r}\|x\|$. En particulier, pour $x = 0$, on trouve $f(0) = 0$.

   Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|D_0 f(h)\| = \left\| \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(0+th) - f(0)\right) \right\| = \lim_{t \to 0^+} \left\| \frac{1}{t} f(th) \right\| \leq \frac{\epsilon}{r}\|h\|,$$

   d'où $\|D_0 f\| \leq \frac{\epsilon}{r}$.

7. *Dans cette question, on suppose que* $m < 0$. *Montrez que tout point* x_0 *tel que* $g(x_0) = m$ *est dans* B *et vérifie* (0.2).

   Si $x \notin B$, alors $x \in S$ donc $\|x\| = r$ et $|f(x)| \leq \epsilon$, d'où

$$g(x) = 1 - \frac{f^2(x)}{\epsilon^2} \geq 0 > m,$$

   ce qui prouve $x_0 \in B$.

   Comme g est différentiable en x_0, on en déduit $D_{x_0} g = 0$, c'est-à-dire que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a

$$D_{x_0} g(h) = \frac{2 < x_0, h >}{r^2} - \frac{2 f(x_0) D_{x_0} f(h)}{\epsilon^2} = 0$$

   d'où, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$|f(x_0)||D_{x_0} f(h)| = \left| \frac{< x_0, h > \epsilon^2}{r^2} \right| \leq \frac{\epsilon^2}{r^2}\|x_0\|\|h\|. \qquad (0.4)$$

   Comme $g(x_0) = m < 0$, on a $|f(x_0)| > \|x_0\|\frac{\epsilon}{r} > 0$, et $\frac{\|x_0\|}{|f(x_0)|} < \frac{r}{\epsilon}$ donc on peut diviser (0.4) par $|f(x_0)|$ et on trouve

$$|D_{x_0} f(h)| \leq \frac{\epsilon^2}{r^2} \frac{\|x_0\|}{|f(x_0)|}\|h\| \leq \frac{\epsilon}{r}\|h\|,$$

   ce qui prouve (0.2).