Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

PLANCHE D'EXERCICES 4

Exercice 1 On définit sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction :

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de U sur lui-même. Calculer les matrices jacobiennes de f et de f^{-1}.

Exercice 2 Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $\phi(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$, où a et b sont des réels vérifiant $|ab| < 1$.

1. Démontrer que f est un difféomorphisme sur son image.
2. Démontrer que f est surjective. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Considérons les ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et les applications $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ suivantes :

$$(i)\ \Omega =]0,1[^2,\ f(x,y) = (x+y, x-y), \quad (ii)\ \Omega =]-1,1[^2,\ f(x,y) = (x, y^2),$$

$$(iii)\ \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0),\ f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Pour chacun des couples ci-dessus, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer l'ensemble image $f(\Omega)$.
2. Déterminer l'ensemble des points de Ω en lesquels f est un difféomorphisme local.
3. L'application $f : \Omega \to f(\Omega)$ est-elle un difféomorphisme global de Ω sur son image ?

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin y + xy^4 + x^2$.

1. Montrer qu'il existe deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in U$, $\phi(x)$ est l'unique solution y de V de l'équation $f(x,y) = 0$.
2. Donner un développement limité de ϕ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Exercice 6 Montrer que l'équation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = \cos(x - y + z)$ définit implicitement une fonction $z = \phi(x,y)$ de classe C^∞, au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de ϕ en $(0,0)$.

Exercice 7 On considère l'équation $f(x,y) = x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0$. Poser $y = xz$ et exprimer l'équation $f(x,y) = 0$ à l'aide des variables x et z. Trouver $y(x)$ de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $y(0) = y'(0)$ et $f(x, y(x)) = 0$. Calculer $y''(0)$.

Exercice 8 On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $\mathcal{C}$ des points (x, y, z) tels que $x^2 - 2y - 2z = 0$ et $2x + y^2 + z^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la tangente en chacun de ses points.
2. Soit (x_0, y_0, z_0) un point de $\mathcal{C}$ tel que $x_0 y_0 \neq -1$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de z_0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V_0 de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$ et des fonctions ϕ et $\psi : U_0 \to \mathbb{R}$ tels que :
$$(x, y, z) \in \mathcal{C} \cap V_0 \Leftrightarrow x = \phi(z) \text{ et } y = \psi(z).$$
Calculer $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 9

1. Montrer que le paraboloïde de $\mathbb{R}^3$ défini par $x^2 + y^2 - z^2 = a$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ si $a > 0$. Quel est l'espace tangent à ce paraboloïde au point $(\sqrt{a}, 0, 0)$?
2. Pourquoi l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ne définit-elle pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 Soit $\mathcal{S}_{a,b,c}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ et soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation $xyz = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_{a,b,c}$ et $\mathcal{S}$ sont des surfaces de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la condition pour que $\mathcal{S}_{a,b,c}$ et $\mathcal{S}$ se coupent à angle droit et préciser en quels points.

Exercice 11 Déterminer les points où les surfaces de niveau $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ sont tangentes.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$. Déterminer les extrema locaux de f sur la droite $x + y = 1$. Existe-t-il des extrema globaux ?

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par $f(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_{i=1}^n x_i \ln(x_i)$. Déterminer les extrema locaux de f sur l'hyperplan $\Sigma_{i=1}^n x_i = a$, avec $a > 0$

Exercice 14 Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection du plan $x + y + z = 0$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 Trouver le point du plan d'équation $2x - y + z = 16$ le plus proche de l'origine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 Exprimer un nombre $A > 0$ sous la forme d'un produit de 3 réels de sorte que leur somme soit minimale.