Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

PLANCHE D'EXERCICES 3

Exercice 1 Calculer la différentielle seconde d'une application linéaire. Même question pour une application bilinéaire.

Exercice 2 Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. On suppose que f est deux fois différentiable au point $a \in U$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note $\varphi : U \to \mathbb{R}^p$ l'application définie par $\varphi(x) = D_x f(k)$. Montrer que φ est différentiable au point a et que $D_a\varphi(h) = D_a^2 f(h,k)$ (ce résultat permet de calculer plus simplement les différentielles secondes).

Exercice 3 Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts. Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ deux applications telles que $f(U) \subset V$. On suppose que f est deux fois différentiable au point $a \in U$ et que g est deux fois différentiable au point $f(a)$. On sait alors que $g \circ f$ est deux fois différentiable au point a. Exprimer $D_a^2(g \circ f)(h,k)$, avec $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à l'aide des différentielles premières et secondes de f au point a et de g au point $f(a)$.

Exercice 4 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra poser $\varphi(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ et $g = f \circ \varphi$.

Exercice 5 Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une application deux fois différentiable et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $\varphi(x) = f(x)(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que φ est deux fois différentiable et calculer $D_x^2\varphi(h,k)$ pour $(x,h,k) \in (\mathbb{R}^n)^3$.

Exercice 6 Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de la fonction $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

Montrer que f restreinte à toute droite passant par l'origine admet un minimum local en ce point, mais que $(0,0)$ n'est pas un minimum local de f.

Exercice 7 Montrer que $(0,0)$ est un point critique de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et étudier sa nature dans les cas suivants :

$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $\quad f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ et $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$.

Exercice 8 Trouver les extréma locaux des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1, \quad f(x,y) = xy + \frac{1}{x+y}, \quad f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2),$$

$f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2, \quad f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$ et

$$f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z).$$

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2$$

Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle).

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

1) Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle).

2) En déduire une esquisse dans $\mathbb{R}^2$ des lignes de niveau de l'application f (*i.e.* les ensembles d'équation $f(x,y) =$ constante).

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$$

1) Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle)

2) En déduire une esquisse de la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x,y)$ et l'allure des lignes de niveau de f.

Exercice 12

1) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, de classe C^2 sur une voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $F(x,y) = f(x)f(y)$, définie sur une voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, admet un point critique en $(0,0)$. Est-ce un extremum local ?

2) Déterminer les extréma locaux de la fonction $f(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1) Vérifier que f admet l'origine et $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ comme points critiques.

2) Vérifier que $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont des minima relatifs.

3) Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

4) Montrer que l'origine n'est pas un extremum relatif de f et dessiner l'allure du graphe de f au voisinage de l'origine.