Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

PLANCHE D'EXERCICES 2

Exercice 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si $\forall\, z \in \Omega$, il existe une limite :

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}.$$

1) On écrit $f(z) = f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$. Montrer que si f est holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ alors f est différentiable comme fonction des deux variables (x,y) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que le Jacobien de f au point $(x,y) \in \Omega$ est une matrice de similitude.

3) Montrer que f est holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ si et seulement si f est différentiable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \;,\; \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Exercice 2 Soient f et g deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad g(x,y) > 0 \\ f(x,y) + g(x,y)^2 & \text{si} \quad g(x,y) \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f vérifie :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ \ f(s+m, t+n) = f(s,t) \qquad (*)$$

a) Démontrer que $Df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, E)$ vérifie aussi la propriété $(*)$.

b) Démontrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

Exercice 4 Soient E et F espaces vectoriels normés, soit Ω un ouvert convexe de E et soit $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable sur Ω. Démontrer que f est lipschitzienne sur Ω si et seulement si Df est bornée sur Ω.

Exercice 5 Si A désigne une partie d'un espace vectoriel normé, on désigne par $\delta(A)$ son diamètre. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications différentiables de E dans F telles que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in E,\ ||Df_n(x)|| \leq \frac{||x||}{n}$$

Soit B une partie bornée de E. Que peut-on dire de $\lim_{n \to \infty} \delta(f_n(B))$?

Exercice 6 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable, telle que sa différentielle Df soit constante sur U. Montrer que f est la restriction à U d'une fonction affine $(x_1, \ldots, x_n) \to \Sigma_{i=1}^n a_i x_i + b$.

Exercice 7 Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable vérifiant :

$$\exists k \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \|D_x g\| \leq k.$$

1) Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + g$ est injective.
2) Démontrer que l'image réciproque par f d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée.

Exercice 8 Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $V \subset U$ une partie convexe, non vide et fermée dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable telle que $f(V) \subset V$ et $\sup_{x \in V} \|D_x f\| < 1$. Démontrer que f possède un unique point fixe dans V.

Exercice 9 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.
1) Montrer que f et g sont de classe C^1.
2) Calculer la différentielle $D_{(0,0)} g$ et en déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B((0,0),\rho)}$, on a $\|D_{(x,y)} g\| \leq \frac{1}{2}$.
3) Montrer que g admet un unique point fixe dans $\overline{B((0,0),\rho)}$.

Exercice 10 On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y).$$

1) Montrer $\|D_{(x,y)} F\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) En déduire que la suite récurrente définie par (x_0, y_0) et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{\cos x_n - \sin y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{\sin x_n - \cos y_n}{2},$$

converge pour tout (x_0, y_0).
3) Donner l'équation vérifiée par sa limite.

Exercice 11 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ tels que l'on ait $\|D_x f\| \leq k|f(x)|$, pour tout $x \in U$. Soit $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$. Montrer que pour x assez voisin de a, on a :

$$|f(x)| \leq e^{k\|x-a\|}|f(a)|.$$

Exercice 12 Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Montrer que, pour $a, b \in \Omega$,

$$\|f(b) - f(a) - D_a f(b-a)\| \leq \|b-a\| \sup_{c \in [a,b]} \|D_c f - D_a f\|.$$