Aix–Marseille Université 2017-2018

Mathématiques – L3

Calcul différentiel et optimisation

PLANCHE D'EXERCICES 1

Exercice 1 Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0\ , \\ x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$

Est-ce que f est continue, dérivable ?

Exercice 3 1) Vérifier que la fonction réelle définie par $f(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$ est partout dérivable mais non C^1 à l'origine.

2) Vérifier que $f(x) = x^4|x|$ est exactement de classe C^4.

3) Soit $a < b$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]a, b[\\ \exp\Big(\dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{x-b}\Big) & \text{si } x \in]a, b[\ . \end{cases}$$

Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On pose $A = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On définit ensuite sur tout $\mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{A}\int_a^x f(t)dt\ .$$

Vérifier que φ est C^∞, croissante, qu'elle est nulle pour $x \leq a$ et vaut 1 pour $b \leq x$.

Exercice 4 Étudier l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)$ et des limites itérées $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\lim_{\substack{y\to0\\y\neq0}} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{\substack{y\to0\\y\neq0}}\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} f(x,y)$ pour les fonctions suivantes.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

3) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$, 4) $f(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5 Étudier l'existence des limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x+y\neq0}} \frac{x^2y}{x+y}$, 2) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\2x^3+yz^2\neq0}} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$, 3) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$,

4) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x\neq y}} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$, 5) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x,y,z)\neq(0,0,0)}} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) = (0,0)\ , \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

L'application f est-elle continue ?

Exercice 7 1) Calculer la différentielle à l'origine des applications :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=1+x+y+xy,$$

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad g(x,y,z)=2+3z+xy+z\sin(x^2+y^2),$$

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad h(x,y)=1+x\sqrt{y^2+2}.$$

2) Calculer les dérivées partielles de la fonction h et montrer qu'elles sont continues.

Exercice 8

1) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\ , \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0). \end{cases}$$

L'application f est-elle continue ?

Calculer les dérivées partielles de f. Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$? Pour tout $p\neq(0,0)$ et tout $v=(h,k)$ de $\mathbb{R}^2$, calculer directement :

$$f'_v(p)=\lim_{t\to0,t\neq0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t}\quad .$$

L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?

2) Mêmes questions pour les applications $g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par :

$$g(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\ , \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\ , \\ \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0). \end{cases}$$

Exercice 9 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0\ , \\ \dfrac{y\exp(-\frac{1}{x^2})}{y^2+\exp(-\frac{2}{x^2})} \text{ si } x\neq0. \end{cases}$$

Démontrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, mais que toutes les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent et sont linéaires en v.

Exercice 10 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent pour tout $v\in\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 11 Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition D_f. Pour chacune des fonctions, calculer la différentielle en chaque point du domaine de définition lorsqu'elle existe :

1. $f(x,y)=x^2\exp(xy)$,
2. $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$,
3. $f(x,y)=\sin^2x+\cos^2y$,
4. $f(x,y,z)=x^2y^2\sqrt{z}$.

Exercice 12 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + y\exp x$.

1. Calculer la différentielle de f.
2. Soit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $D_v f(0,0)$.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer la différentielle de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 15 On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)), \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 16

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Étudier la différentiabilité des applications

$$P \mapsto P',$$

$$P \mapsto \int_0^1 (P^3 - P^2),$$

$$P \mapsto P' - P^2.$$

Exercice 17

Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui à une matrice carrée d'ordre n associe son déterminant.

1) Montrer que $\det$ est de classe C^∞.

2) Calculer les dérivées directionnelles de $\det$ par rapport à chaque vecteur de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Donner l'expression de la différentielle de $\det$.