Espaces euclidiens

Exercice 1 Soit $(\mathrm{E}, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement si $p = p^*$.

Exercice 2 Soit $(\mathrm{E}, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\varphi = \varphi^*$ et $\varphi(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ alors $\varphi(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$.

2. Soit F un espace propre de φ. Montrer que si $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ alors $\varphi(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$.

Exercice 3 Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit $(\mathrm{E}, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique et que $\mathrm{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$.

2. On note respectivement λ et μ la plus grande et la plus petite valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$. Montrer, pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'inégalité :

$$\mu \|x\|^2 \leq \|\varphi(x)\|^2 \leq \lambda \|x\|^2.$$

Exercice 5

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{S} = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Démontrer l'égalité : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$.

2. Soit $\mathrm{S} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$? Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que A soit inversible. Application à $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soient E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E. tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. *a)* Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^*(x) = x$. Montrer que $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}(f^* - \mathrm{Id}) \subseteq \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

2. Soit h un endomorphisme de E. Montrer que $(\operatorname{Im} h)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker} h^*$.

3. En déduire que les sous-espace vectoriels $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 7 Soit $(\mathrm{E}, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit antisymétrique lorsque $\varphi^* = -\varphi$.

1. Montrer que φ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in \mathrm{E}, \langle \varphi(x), x \rangle = 0$.

2. Montrer que si φ est antisymétrique alors $(\operatorname{Ker}(\varphi))^{\perp} = \operatorname{Im}(\varphi)$ puis que $\operatorname{rg}(\varphi)$ est pair.

Exercice 8 Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base orthogonale d'un espace euclidien E. On dit qu'un endomorphisme f de E conserve l'orthogonalité de $\mathcal{B}$ si et seulement si $(f(\mathrm{e}_1), \ldots, f(\mathrm{e}_n))$ est une famille orthogonale.

1. Montrer que f conserve l'orthogonalité de $\mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de f^*f.

2. Montrer que pour tout endomorphisme f de E, il existe une base orthogonale dont f conserve l'orthogonalité.

Exercice 10 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\textit{attention au } \tfrac{1}{7}\textit{...})$$

1. Sans calculs, dire pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. Montrer que f est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour f.

3. Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de f. En déduire le polynôme caractéristique de f.

4. Déterminer l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de E_1.

5. Montrer que l'espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 satisfait $\mathrm{E}_{-1} = (\mathrm{E}_1)^{\perp}$. En utilisant l'équation caractérisant E_1, en déduire un vecteur générateur de E_{-1}.

6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Donner une interprétation géométrique de f.

Exercice 11 Dans un espace euclidien $(\mathrm{E}, < \cdot, \cdot >)$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ x & \mapsto & x + \lambda < x, v > v \end{array}$$

1. Pour $x \in \mathrm{E}$, calculer $\|u(x)\|^2$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit une transformation orthogonale.

3. Lorsque u est orthogonale, dire *a priori* quelles sont les valeurs propres possibles de u, puis dire si elles sont effectivement valeur propre en étudiant les espaces propres associés.

4. Lorsque u est orthogonale, donner une interprétation géométrique de u.