UNIVERSITE PAUL SABATIER **Licence 2, parcours spécial**
Algèbre linéaire **2014-15**

Diagonalisation

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 2 On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_u et déterminer son spectre.

2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Si oui, trouver une base de vecteurs propres, la matrice de passage P associée, et donner $P^{-1}AP$.

Exercice 3 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $p \in \mathcal{L}(E)$ est nommée projecteur lorsque $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur $1 - p$ est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient p et q deux projecteurs tels que $p + q$ soit aussi un projecteur. Montrer que :

a) $pq = qp = 0$.

b) $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

c) $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

On suppose désormais E de dimension finie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.

4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Montrer que A est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre de A.

2. On suppose que A est inversible. Calculer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A et en déduire les valeurs propres de A^{-1} en fonction de celles de A.

3. Décrire enfin les espaces propres de A^{-1} en fonction de ceux A.

Exercice 6 Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.

2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon_1} \in E_1$, $\vec{\varepsilon_2} \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.

3. Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \vec{\varepsilon_1} + \beta \lambda_2^n \vec{\varepsilon_2}$$

4. Notons $A^n \vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

Exercice 7 Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E qui commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que les espaces propres de u sont invariants par v ($v(E_\lambda) \subset E_\lambda$ pour toute valeur propre λ de u).

2. On suppose u et v diagonalisable. Notons $1 \leq \lambda_1(u) \leq \ldots \leq \lambda_p(u)$ les valeurs propres de u et $1 \leq \lambda_1(v) \leq \ldots \leq \lambda_p(v)$ celles de v d'espaces propres $E_i(u)$, $1 \leq i \leq p$, et $E_j(v)$, $1 \leq j \leq q$, respectivement.

a) Montrer que $E_i(u) \cap E_j(v)$ est invariant à la fois par u et par v et montrer qu'il existe une base de $E_i(u) \cap E_j(v)$ dont les éléments sont des vecteurs propres à la fois de u et de v.

b) En déduire qu'il existe une base de E dont les éléments sont des vecteurs propres à la fois de u et de v.

3. Généraliser la question précédente à la situation suivante: $u_1, \ldots, u_k$ sont des endomorphismes tels que $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. On suppose que chaque u_j est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de E telle que les matrices des u_j soient toutes diagonales.

Exercice 8 On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, défini dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de u et déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Im} u$.

2. *a)* Vérifier que $u(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$. On note $v : \operatorname{Im} u \to \operatorname{Im} u$ défini par $v(x) = u(x)$. Calculer $B = \operatorname{Mat}(v, \mathcal{B})$.

b) Déterminer le spectre de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable?

3. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

4. En déduire que u est diagonalisable et donner son spectre.