UNIVERSITE PAUL SABATIER **Licence 2, parcours spécial**
Algèbre linéaire **2014-15**

Systèmes linéaires, changement de bases

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & 3 \\ 5x+2y-z & = & 5 \\ -3x-4y+3z & = & 1 \end{array}\right. \quad , \left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z+t & = & 3 \\ x+2y+z+t & = & 1 \\ x+y+2z+t & = & 2 \\ x+y+z+2t & = & 4 \\ x-y+z-t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 2 Déterminer les valeurs de $h \in \mathbb{R}$ de sorte que les systèmes suivants aient : i) aucune solution, ii) une unique solution, iii) plusieurs solutions.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+hz & = & 2 \\ 3x+4y+2z & = & h \\ 2x+3y-z & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcr} x-2y+hz & = & -h-3 \\ y+z & = & h+2 \\ 4x+y+9z & = & 5h+6 \\ x+y+3z & = & 2h+3 \end{array}\right. .$$

Exercice 3 Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ la base canonique. On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}'_1 & = & \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \\ \mathrm{e}'_2 & = & \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_3 \\ \mathrm{e}'_3 & = & \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \ . \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathrm{e}'_1, \mathrm{e}'_2, \mathrm{e}'_3)$ est une base et écrire sa matrice de passage P.
2. Calculer P^{-1}.
3. En déduire les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur x dont les coordonnées en base canonique sont $(1, 2, 1)$.
4. Montrer dans le cas général que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Exercice 4 Soient $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme défini par $u(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_2$, $u(\mathrm{e}_2) = \mathrm{e}_3$ et $u(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1$.

1. Ecrire la matrice de u dans la base canonique. Montrer que les vecteurs invariants par u c'est-à-dire les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $u(v) = v$, forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
2. Vérifier que $\varepsilon_1 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$, $\varepsilon_2 = \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$ et $\varepsilon_3 = \mathrm{e}_3$ forment une base. Ecrire la matrice de u dans cette nouvelle base.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de changement de base.

Exercice 5 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement aux bases canoniques, $(\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, \vec{\mathrm{K}}, \vec{\mathrm{L}}\,)$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\,)$ est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, 4\vec{\mathrm{I}} + \vec{\mathrm{J}} - 3\vec{\mathrm{L}}, -7\vec{\mathrm{I}} + \vec{\mathrm{K}} + 5\vec{\mathrm{L}}\,)$ et $\mathcal{B}' = (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{k}\,)$. Quelle est la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$?

Exercice 6 Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables. (On cherchera P inversible telle que $PB = AP$)

Exercice 7

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 8 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie n et p respectivement et $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. On note $\mathcal{A}_f$ (et $\mathcal{A}_g$) l'ensemble de toutes les matrices de f (et g) obtenues en faisant varier les bases de E et de F.

1. Montrer que $\mathcal{A}_f$ est une classe d'équivalence des matrices de type $p \times n$.

2. On suppose qu'il existe deux automorphismes $h_E : E \to E$ et $h_F : F \to F$ tels que $g = h_F^{-1} \circ f \circ h_E$. Montrer que $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g$.

3. Réciproquement, on suppose maintenant que $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g$. Montrer qu'il existe deux automorphismes $h_E : E \to E$ et $h_F : F \to F$ tels que $g = h_F^{-1} \circ f \circ h_E$.

Exercice 9

1. Une matrice $D = (d_{ij})$ d'ordre n est dite *diagonale* si $d_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$.

a) Soient D et D′ deux matrices diagonales d'ordre n. Calculer DD' en fonction des coefficients de D et D′ et en déduire que l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est stable par multiplication.

b) Soit D une matrice diagonale d'ordre n. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.

2. On suppose que A et B sont deux matrices semblables, avec $B = P^{-1}AP$. Calculer B^n en fonction de A et P.

3. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la matrice B dans la base $\mathcal{B}'$, où $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$ et $e'_3 = (1, 0, 1)$. Calculer B^n, pour $n \geq 1$, et en déduire A^n.

b) On définit trois suites réelles u, v, w par $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n.