Géométrie affine

Peter Haïssinsky, Université de Paul Sabatier

2014–2015

L'objet de ce chapitre est de mettre en place la géométrie euclidienne à partir de l'algèbre linéaire. Dans un premier temps, on se concentre sur la notion d'espaces affines, dans lequel on peut parler d'alignement, de parallélisme, de barycentre, de convexité et d'intersection de sous-espaces (affines). Un espace affine peut être vu comme un espace vectoriel « dont on a oublié l'origine ».

Ensuite, cette notion est décorée par l'ajout d'un produit scalaire pour aboutir à la notion d'espace affine euclidien. On peut ainsi parler d'angles et de distances.

1 Introduction

On se donne un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ de dimension finie n sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ que l'on peut penser comme étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la suite, on mettra une flèche sur les données vectorielles.

Définition 1.1 (Espace affine). — *Un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est un ensemble non vide $\mathbb{A}$ muni d'une application Φ qui à chaque bipoint (A,B) de $\mathbb{A}$, associe un élément de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, noté $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ vérifiant les deux propriétés suivantes:*

(A1) pour tous $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C} \in \mathbb{A}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (relation de Chasles);

(A2) pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{A}$, pour tout $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$, il existe un unique point $\mathrm{B} \in \mathbb{A}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$.

L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est appelé direction de l'espace affine $\mathbb{A}$. La direction de $\mathbb{A}$ est souvent notée $\vec{\mathbb{A}}$. La *dimension d'un espace affine* est la dimension de l'espace vectoriel qui lui est associé. En particulier un espace affine de dimension 1 est appelé *droite affine*, un espace affine de dimension 2 *plan affine*.

La propriété (A2) assure, pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, l'existence et l'unicité d'un point B vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$, que l'on nomme *translaté de* A *par* $\vec{u}$; on écrit $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \vec{u}$ ou $\vec{u} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$. Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, l'application $\mathrm{T}_{\vec{u}}$ qui à un point A de $\mathbb{A}$ associe son translaté par le vecteur $\vec{u}$ est appelée *translation de vecteur* $\vec{u}$.

Exemple d'espace affine.— Tout espace vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est canoniquement muni d'une structure d'espace affine de direction $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ par:

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathrm{E}} \times \overrightarrow{\mathrm{E}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathrm{E}} \\ (v,w) & \longmapsto & w - v. \end{array}$$

C'est, à isomorphisme près, le seul espace affine de direction isomorphe à $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

Il arrive d'ailleurs que ce que l'on a noté dans un espace affine $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit noté $\mathrm{B} - \mathrm{A}$, et quand cet espace affine est un espace vectoriel muni de sa structure affine canonique, les notations sont cohérentes, de même qu'avec la notation de Grassmann, qui donne $\mathrm{B} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})$.

Si $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathbb{K}^n$, on note $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ l'espace affine modelé sur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

Propriétés élémentaires.— Les propriétés suivantes découlent directement de la définition d'espace affine, c'est-à-dire des axiomes (A1) et (A2). Soient A et B deux points quelconques d'un espace affine ; on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On peut également généraliser la relation de Chasles à un nombre fini de points $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n$:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n} = \sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{\mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i}\,.$$

Repères cartésiens et affines.— Si on fixe un point origine O, par définition d'un espace affine, il existe une application $\Phi_{\mathrm{O}} : \mathbb{A} \to \overrightarrow{\mathrm{E}}$ qui à un point M de $\mathbb{A}$ associe le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. La propriété (A2) énonce que cette application Φ_{O} est bijective pour tout point O. Cette correspondance permet donc, par choix d'une origine, de munir (de façon non canonique) l'espace affine $\mathbb{A}$ d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, dite structure vectorielle d'origine O, et que l'on note $\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\mathrm{O}}$. Cette opération est la *vectorialisation* de l'espace affine $\mathbb{A}$. L'étude des problèmes de géométrie affine se ramène souvent à une étude en géométrie vectorielle, par choix convenable d'une origine de l'espace affine.

Un *repère cartésien* d'un espace affine $\mathbb{A}$ est la donnée d'une origine $\mathrm{O} \in \mathbb{A}$ et d'une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ de son espace directeur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ de sorte que pour tout M, il existe $x_1, \ldots x_n$ tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}_j \,.$$

Les scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ s'appellent les *coordonnées cartésiennes du point* M *dans le repère* $(\mathrm{O}, \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$.

Un *repère affine* est la donnée de $(n+1)$ points $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ tels que $(\mathrm{A}_0, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n})$ est un repère cartésien.

Si les points A et B de $\mathbb{A}$ ont pour coordonnées X et Y respectivement dans le repère $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\mathrm{Y} - \mathrm{X}$ dans $\mathcal{B}$.

Le repère affine $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$ permet d'établir un isomorphisme (affine) entre $\mathbb{A}$ et l'espace affine canonique $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. En effet, l'application $\mathrm{T} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ qui à un point $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$ associe ses coordonnées cartésiennes X dans le repère $(\mathrm{O}, \mathcal{B})$ remplit cette fonction.

Supposons que $(\mathrm{O}', \mathcal{B}')$ est un autre repère cartésien de $\mathbb{A}$. Soient $\mathrm{O}' = (o_1, \ldots, o_n)$ les coordonnées cartésiennes de O' et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Notons $\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées cartésiennes d'un point M dans les deux repères. En écrivant $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}'} + \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}}$, on trouve

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' + \mathrm{O}' \,.$$

Plus généralement, on dit que des points $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont *affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}$ forment une famille libre de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Notons que la relation de Chasles montre que la manière de former les vecteurs ne comptent pas.

2 Sous-espaces affines

Soit $\mathbb{A}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Une partie non vide F de $\mathbb{A}$ est un sous-espace affine s'il existe un sous-espace $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et un point $\mathrm{A} \in \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{F}}$. Autrement dit, pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\ \mathrm{M} \in \mathrm{F}\}$. La *dimension de* F est par définition la dimension de son espace directeur $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

Cas particuliers.— Deux points distincts A et B de l'espace affine $\mathbb{A}$ définissent un sous-espace affine de dimension 1, la droite affine passant par A de direction la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Cette droite affine est l'unique droite passant par A et B. Trois points non alignés A, B et C de l'espace affine $\mathbb{A}$ définissent un sous-espace affine de dimension 2, le plan affine passant par A de direction le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Un hyperplan affine de $\mathbb{A}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{A}$ dont la direction est un hyperplan de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

2.1 Parallélisme

Il existe deux notions de parallélisme entre sous-espaces affines, l'une n'est valide qu'entre deux sous-espaces de même dimension (deux droites, deux plans, etc.), l'autre est plus générale.

Soient F et G deux sous-espaces affines. On dit que F *et* G *sont parallèles*, ou parfois *fortement parallèles*, quand ils ont la même direction. On dit aussi que F *est faiblement parallèle à* G, quand la direction de F est un sous-espace vectoriel de celle de G.

La relation de parallélisme fort est une relation d'équivalence. La relation de parallélisme faible n'est pas symétrique, mais reste réflexive et transitive (c'est un préordre).

L'axiome des parallèles (variante du cinquième postulat d'Euclide) — par un point il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée — est une conséquence immédiate de la définition même de sous-espace affine qui assure l'unicité d'un sous-espace affine passant par un point et de direction un sous-espace vectoriel donné (une droite vectorielle en l'occurrence).

Deux sous-espaces affines parallèles (fortement) sont soit confondus, soit d'intersection vide. Un sous-espace affine faiblement parallèle à un sous-espace affine est soit inclus dans ce dernier soit d'intersection vide avec celui-ci.

2.2 Intersections de sous-espaces

Nous avons vu ci-dessus que deux sous-espaces affines parpallèles étaient soit confondus, soit disjoints, de sorte que l'intersection de sous-espaces n'est pas toujours un sous-espace.

Proposition 2.1. — *Soit $\mathbb{A}$ un espace affine sur $\mathbb{K}$ d'espace directeur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et soit $(\mathrm{E}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathbb{A}$ (indexée par un certain ensemble* I*) ; si $\overrightarrow{\mathrm{E}}_i$ désigne pour tout i l'espace directeur de E_i alors $\cap \mathrm{E}_i$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de $\mathbb{A}$ dirigé par $\cap\overrightarrow{\mathrm{E}}_i$.*

Démonstration. — Supposons que l'on ait $\mathrm{F} = \cap \mathrm{E}_i \neq \varnothing$ et prenons A un point de l'intersection. Comme A appartient à chacun des E_i, on a $\mathrm{E}_i = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{E}}_i$ pour tout i. Du coup, pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \cap\overrightarrow{\mathrm{E}_i}$. Réciproquement, si M est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \cap\overrightarrow{\mathrm{E}_i}$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{E}_i$ pour tout i, donc $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$. Il découle $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \cap\overrightarrow{\mathrm{E}}_i$. ■

Si $\mathrm{E} \subset \mathbb{A}$ est une partie, il existe un plus petit espace affine F contenant E: c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant E. Cette intersection est non vide puisqu'elle contient E. On dit que F est *engendré* par E. On écrit $\mathrm{F} = \mathrm{Aff}(\mathrm{E})$.

Si E est un ensemble fini de cardinal $k + 1$, alors $\dim \mathrm{Aff}(\mathrm{E}) \leq k$, avec égalité si et seulement s'ils sont affinement indépendants.

2.3 Représentations de sous-espaces

On se donne un sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{F}}$. On décrit deux représentations standard de F qui ont chacune leur intérêt, classiques dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2.3.1 Représentation paramétrique

On se donne une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$. Un point $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$ est dans F si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est dans $\overrightarrow{\mathrm{F}}$, autrement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \sum_{j=1}^k \lambda_j\varepsilon_j$.

Si $\mathbb{A}$ est muni d'un repère cartésien $(\mathrm{O}, \mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ de $\mathbb{A}$, on peut alors écrire, pour $j = 1, \dots, k$,

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j}\mathrm{e}_i \,.$$

Si $\mathrm{A} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\mathrm{M} = (x_1, \dots, x_n)$ alors on obtient $\mathrm{M} \in \mathrm{F}$ si et seulement s'il existe des scalaires (λ_j) tels que

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & a_1 + \sum_{j=1}^k \lambda_j\alpha_{1,j} \\ \dots & = & \dots \\ x_i & = & a_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j\alpha_{i,j} \\ \dots & = & \dots \\ x_n & = & a_n + \sum_{j=1}^k \lambda_j\alpha_{n,j} \end{array}\right.$$

On décrit donc F comme l'image de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ par l'application $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathrm{F}$ qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ associe le point $\mathrm{M} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}$.

Une telle représentation permet de construire facilement des points de F.

2.3.2 Représentations cartésiennes

On complète la base de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ en une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On considère la base duale $(\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*)$. Un point M est dans F si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est dans $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ c'est-à-dire si

$$\varepsilon_{k+1}^*(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \ldots = \varepsilon_n^*(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0\,.$$

Avec le repère précédent, il existe des scalaires $(\beta_{i,j})_{1\leq i\leq n, k+1\leq j\leq n}$ tels que $\varepsilon_j^* = \sum_{i=1}^n \beta_{i,j} \mathrm{e}_i^*$. Donc un point $\mathrm{M} = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans F si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_{i,k+1}(x_i - a_i) & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_{i,j}(x_i - a_i) & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_{i,n}(x_i - a_i) & = & 0 \end{array}\right.$$

Ici, on décrit F comme les solutions d'un système linéaire.

Une telle représentation permet de vérifier facilement si un point donné est dans F ou non.

3 Applications affines

Soient E et F deux espaces affines de directions $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}$. Une application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une transformation telle qu'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{\mathrm{E}}, \overrightarrow{\mathrm{F}})$ telle que, pour tous points $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{E}$, on ait $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$. L'application $\overrightarrow{f}$ est la partie linéaire de f ou sa direction.

Si $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ est une origine, on a

$$f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})\,.$$

Exemples. — Soit $\mathbb{A}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On définit des applications $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ particulières mais classiques.

1. La translation de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathrm{E}}$ est l'application $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \vec{u}$.

2. L'homothétie de centre A et de rapport $k(\neq 1) \in \mathbb{K}$ est l'application $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

3. La symétrie centrale de centre A est l'application $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

4. La projection sur le sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathrm{G}}$, où $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{F}} \oplus \overrightarrow{\mathrm{G}}$, est l'application $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$, où $\overrightarrow{f}$ est le projecteur sur $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathrm{G}}$.

5. La symétrie par rapport au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathrm{G}}$, où $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{F}} \oplus \overrightarrow{\mathrm{G}}$, est l'application $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$, où $\overrightarrow{f}$ est la symétrie par rapport à $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ parallèlement à $\overrightarrow{\mathrm{G}}$.

Lorsque l'on s'intéresse aux espaces $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, alors toute application affine $f : \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{A}^m(\mathbb{K})$ est de la forme

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$$

où $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{K}^n$.

Remarque 3.1. — *Si $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ est affine et admet un point fixe* O*, alors on obtient, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$*,* $f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$*. Une telle application affine n'est rien d'autre qu'une application linéaire.*

La composition d'applications affines est affine: si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications affines alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi affine. En effet, on a $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ donc

$$\overrightarrow{(g \circ f)(\mathrm{A})(g \circ f)(\mathrm{B})} = \overrightarrow{g(f(\mathrm{A}))g(f(\mathrm{B}))} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}) = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) .$$

Par conséquent, la partie linéaire de $g \circ f$ est $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Représentation matricielle. — On se fixe un repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \mathcal{B})$ de E et $\mathcal{R}' = (\mathrm{O}', \mathcal{B}')$ un repère de F. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application affine. On note $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}(\overrightarrow{f}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{i,j})$. Si M est un point de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $f(\mathrm{O})$ de coordonnées $(b_1, \ldots, b_m)$ et si on écrit $f(\mathrm{M}) = (y_1, \ldots, y_m)$ alors on remarque qu'en sachant que $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$, on obtient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & \mathrm{A} & & \vdots \\ & & & b_m \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du coup, on définit

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & \mathrm{A} & & \vdots \\ & & & b_m \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') & f(\mathrm{O}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{K})$$

On laisse en exercices les remarques suivantes.

1. On a $\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \mathrm{I}_{n+1}$;
2. Si $f : (\mathrm{E}, \mathcal{R}_\mathrm{E}) \to (\mathrm{F}, \mathcal{R}_\mathrm{F})$ et $g : (\mathrm{F}, \mathcal{R}_\mathrm{F}) \to (\mathrm{G}, \mathcal{R}_\mathrm{G})$ sont des applications affines, alors
$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{R}_\mathrm{E}, \mathcal{R}_\mathrm{G}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{R}_\mathrm{F}, \mathcal{R}_\mathrm{G})\, \mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}_\mathrm{E}, \mathcal{R}_\mathrm{F}) ;$$
3. Si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$, alors on a aussi $\det \mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \det \mathrm{Mat}(\overrightarrow{f}.\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ donc f est inversible si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est. Dans ce cas, on a $\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1}$ qui est de la forme
$$\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} & & & b'_1 \\ & \mathrm{A}^{-1} & & \vdots \\ & & & b'_m \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix} = -\mathrm{A}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Matrices de passage. — On se fixe deux repères $\mathcal{R} = (\mathrm{O}_\mathrm{E}, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (\mathrm{O}'_\mathrm{E}, \mathcal{B}')$ de E.

On définit la matrice de passage P de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ par

$$\mathrm{P} = \mathrm{passage}(\mathcal{R} \to \mathcal{R}') = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} & & & o'_1 \\ & \mathrm{P}' & & \vdots \\ & & & o'_m \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P' est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et $(o'_1, \ldots, o'_m)$ sont les coordonnées de O'_E dans le repère $\mathcal{R}$.

Si X et X′ sont les coordonnées d'un point M dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement, alors

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{X}' \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On considère maintenant aussi deux repères $\mathcal{S} = (\mathrm{O_F}, \mathcal{C})$ et $\mathcal{S}' = (\mathrm{O'_F}, \mathcal{S}')$ d'un espace affine F, ansi qu'une application affine $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Si Q désigne la matrice de passage de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ alors

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}', \mathcal{S}') = \mathrm{passage}(\mathcal{S}' \to \mathcal{S})\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}, \mathcal{S})\mathrm{passage}(\mathcal{R} \to \mathcal{R}') = \mathrm{Q}^{-1}\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{R}, \mathcal{S})\mathrm{P}\ .$$

4 Barycentres

La notion de barycentre est, à bien des égards, l'analogue affine de celle de combinaison linéaire. On introduit aussi les coordonnées barycentriques. Le calcul en coordonnées barycentriques est particulièrement adapté au travail dans un repère affine dont tous les points jouent le même rôle (par exemple, un triangle non dégénéré dans un plan), car il permet d'éviter de choisir une origine, et donc de rompre la symétrie initiale.

Proposition 4.1. — *Soit* $\mathbb{A}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace affine d'espace directeur* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$*; soient* $n \in \mathbb{N}$*,* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ *une famille de scalaires et* $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ *une famille de points de* $\mathbb{A}$*. Soit* $\varphi : \mathbb{A} \to \overrightarrow{\mathrm{E}}$ *l'application définie par* $\varphi(\mathrm{M}) = \sum \alpha_j \overrightarrow{\mathrm{MA}_j}$ *que l'on appelle la fonction vectorielle de Leibnitz associée à la famille de points pondérés* $\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j)\}_{1 \le j \le n}$*.*

1. *Si* $\sum \alpha_j = 0$ *alors* φ *est constante.*
2. *Si* $\sum \alpha_j \neq 0$*, il existe un unique point* G*, appelé barycentre de la famille* $\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j)\}_{1 \le j \le n}$ *tel que* $\varphi(\mathrm{G}) = 0$*; on a alors pour tout* $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$*, l'égalité*

$$\varphi(\mathrm{M}) = \left(\sum_j \alpha_j\right) \overrightarrow{\mathrm{MG}} \quad \textit{soit encore} \quad \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{\sum \alpha_j} \left(\sum \alpha_j \overrightarrow{\mathrm{MA}_j}\right)\ .$$

Démonstration. — Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbb{A}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{N}) &= \sum \alpha_j \overrightarrow{\mathrm{NA}_j} \\ &= \sum \alpha_j (\overrightarrow{\mathrm{NM}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}_j}) \\ &= \varphi(\mathrm{M}) - \left(\sum \alpha_j\right) \overrightarrow{\mathrm{MN}}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, φ est affine et $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{\mathrm{E}} \to \overrightarrow{\mathrm{E}}$ vaut $(-\sum \alpha_j)\,\mathrm{Id}$.

Si $\sum \alpha_j = 0$, alors $\overrightarrow{\varphi} \equiv 0$, donc φ est constante. Supposons maintenant que la somme est non nulle, ce qui implique que $\overrightarrow{\varphi}$ est un automorphisme de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, et φ un isomorphisme de $\mathbb{A}$. Posons $\mathrm{G} = \varphi^{-1}(0)$, de sorte que si $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$, alors

$$\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{G}) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{\mathrm{GM}}) = -\left(\sum \alpha_j\right) \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \left(\sum \alpha_j\right) \overrightarrow{\mathrm{MG}}\,.$$

Définition 4.2. — *Soit* $\mathbb{A}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace affine d'espace directeur* $\overrightarrow{\mathrm{E}}$*; soient* $n \in \mathbb{N}$*,* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ *une famille de scalaires de somme non nulle et* $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$ *une famille de points de* $\mathbb{A}$*. L'unique point* G *vérifiant* $\sum \alpha_j \overrightarrow{\mathrm{GA}_j} = 0$ *est appelé le barycentre de la famille des points pondérés* $\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j)\}_{1 \le j \le n}$*, et l'on écrira* $\mathrm{G} = \mathrm{B}ar((\mathrm{A}_1, \alpha_1), \ldots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n))$*.*

Le *milieu de deux points* A et B est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1/2)$ et $(\mathrm{B}, 1/2)$, bien défini sur un corps de caractéristique différente de 2, c'est le point $\mathrm{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Le milieu de A et B est le milieu de B et A.

Propriétés élémentaires du barycentre. — Soit $\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j)\}_{1 \le j \le n}$ une famille des points pondérés de barycentre G.

1. Si tous les poids sont nuls, sauf p.ex. α_1, alors le barycentre est A_1.

2. Commutativité. On peut changer l'ordre des points sans changer la valeur du barycentre tant que les points conservent leur coefficient.

3. Invariance par multiplication par un scalaire non nul. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\sum \lambda\alpha_j \neq 0$ et $\mathrm{B}ar\{(\mathrm{A}_j, \lambda\alpha_j)\} = \mathrm{B}ar\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j)\}$. On utilisera très souvent cette remarque, par exemple pour se ramener au cas où la sommes des poids vaut 1, qui présente un intérêt particulier.

4. Associativité du barycentre. Soient I et J deux sous-ensembles disjoints de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_\mathrm{I} = \sum_{j\in\mathrm{I}} \alpha_j$ et $\alpha_\mathrm{J} = \sum_{j\in\mathrm{J}} \alpha_j$ sont non nulles. On note $\mathrm{G_I} = \mathrm{B}ar\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j),\ j \in \mathrm{I}\}$ et $\mathrm{G_J} = \mathrm{B}ar\{(\mathrm{A}_j, \alpha_j),\ j \in \mathrm{J}\}$. Alors $\mathrm{G} = \mathrm{B}ar\{(\mathrm{G_I}, \alpha_\mathrm{I}), (\mathrm{G_J}, \alpha_\mathrm{J})\}$.

Coordonnées barycentriques. — Si l'espace affine $\mathbb{A}$ est associé à un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ de dimension n, et si $(\mathrm{A}_i)_{0\le i\le n}$ sont $n+1$ points de l'espace affine, on dit que ces $n+1$ points forment un *repère barycentrique* si les vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i}\right)_{1\le i\le n}$ forment une base de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$. On démontre, grâce à la relation de Chasles, que cette propriété est indépendante de l'ordre des points.

Si $(\mathrm{A}_i)_{0\le i\le n}$ forment un repère barycentrique de l'espace alors tout point M de cet espace peut être décrit comme barycentre des $(\mathrm{A}_i)_{0\le i\le n}$ pour des poids $(\alpha_i)_i$ bien choisis. La propriété d'homogénéité permet de dire que les coefficients $(\alpha_i)_{0\le i\le n}$ ne sont pas uniques (les multiplier par un scalaire k non nul, ne changera pas la position de M), on privilégie alors les coefficients $(\alpha_i)_{0\le i\le n}$ tels que leur somme vaut 1. Ils sont appelés coordonnées barycentriques de M.

5 Géométrie euclidienne

Un espace affine euclidien $\mathbb{E}$ est un espace affine sur $\mathbb{R}$ dirigé par un espace vectoriel euclidien. On définit sur $\mathbb{E}$ l'application $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ par $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$. On munit ainsi $\mathbb{E}$ d'une distance:

1. si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{E}$, alors $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$ si seulement si $\mathrm{A} = \mathrm{B}$;

2. si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{E}$ alors $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d(\mathrm{B}, \mathrm{A})$;

3. si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{E}$, on a $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \le d(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + d(\mathrm{C}, \mathrm{B})$.

Théorème 5.1 (de Pythagore). — *Si* A, B, C *forment les sommets d'un triangle rectangle en* B*, ce qui signifie que* $\langle \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} \rangle = 0$*, alors*

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{C})^2 = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})^2 + d(\mathrm{B}, \mathrm{C})^2 .$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} d(\mathrm{A}, \mathrm{C})^2 &= \langle \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \rangle + 2\langle \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} \rangle \\ &= d(\mathrm{A}, \mathrm{B})^2 + d(\mathrm{B}, \mathrm{C})^2 . \end{aligned}$$

■

5.1 Espaces affines réels

Soit $\mathbb{A}$ un espace affine sur $\mathbb{R}$. Si A et B sont deux points distincts de $\mathbb{A}$, l'ensemble des points $\mathrm{M} = \mathrm{Bar}((\mathrm{A}, k), (\mathrm{B}, 1-k))$ où k est élément de $[0; 1]$, est une partie de la droite (AB) appelé segment [AB]. C'est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M} = \mathrm{Bar}((\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b))$ où a et b sont deux réels positifs ou nuls.

Un ensemble stable par prise de barycentre avec coefficients toujours positifs ou nuls est un *ensemble convexe.*

Soient $(\mathrm{A}_i)_{1\le i\le n}$ des points de $\mathbb{A}$. L'ensemble des combinaisons convexes de ces points, c'est-à-dire de leurs barycentres à coefficients positifs ou nuls, défini *l'enveloppe convexe* des points $(\mathrm{A}_i)_{1\le i\le n}$.

Soit f une application de $\mathbb{A}_1$ dans $\mathbb{A}_2$, on dit que f conserve le barycentre si pour tout point $\mathrm{G} = \mathrm{Bar}((\mathrm{A}_i, a_i))_{1\le i\le n}$, on a $f(\mathrm{G}) = \mathrm{Bar}((f(\mathrm{A}_i), a_i))_{1\le i\le n}$. La propriété d'associativité du barycentre permet de se limiter à vérifier la conservation pour tout barycentre de deux points.

Théorème 5.2. — *L'ensemble des applications de* E_1 *dans* E_2 *conservant le barycentre coïncide avec celui des applications affines de* E_1 *dans* E_2.

Certaines applications affines s'expriment bien à l'aide du barycentre.

Exemples. —

1. Soient A et B deux points, la transformation qui, au point M associe le point $\mathrm{M}' = \mathrm{Bar}((\mathrm{B},1),(\mathrm{A},-1),(\mathrm{M},1))$ est une translation, qui a pour vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

2. Soient C un point et k un scalaire non nul. La transformation qui au point M associe le point $\mathrm{M}' = \mathrm{Bar}((\mathrm{C},1-k),(\mathrm{M},k))$ est l'homothétie de centre C et rapport k.

5.2 Distance à un sous-espace

On suppose que $\mathbb{E}$ est un espace euclidien, $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$ est un sous-espace affine et $x \in \mathbb{E}$. On cherche à calculer $d(x,\mathbb{A}) = \inf\{d(x,y),\ y \in \mathbb{A}\}$.

Projections orthogonales. — On considère un sous-espace $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$ et un point $\mathrm{A} \in \mathbb{A}$. On note $\overrightarrow{p_{\mathbb{A}}} : \overrightarrow{\mathbb{E}} \to \overrightarrow{\mathbb{E}}$ la projection orthogonale vectorielle sur $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Du coup, $p_{\mathbb{A}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ défini par $p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$ est la *projection orthogonale* sur $\mathbb{A}$. On doit vérifier que si on avait choisi un autre point $\mathrm{B} \in \mathbb{A}$, alors on obtient la même application. En effet, on a

$$\overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{BM}}) = \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}) + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$$

donc

$$\mathrm{B} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{BM}}) = \mathrm{B} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})\,.$$

On remarque que, pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{E}$, on a

$$\begin{aligned}(p_{\mathbb{A}} \circ p_{\mathbb{A}})(\mathrm{M}) &= p_{\mathbb{A}}(\mathrm{A} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})) \\ &= p_{\mathbb{A}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})) \\ &= \mathrm{A} + \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})) \\ &= p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M})\,.\end{aligned}$$

Lemme 5.3. — *Soient* $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$ *un sous-espace,* $\mathrm{M} \in \mathbb{E}$ *et* $\mathrm{N} \in \mathbb{A}$. *Alors* $p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}^{\perp}$.

Démonstration. — On choisit $\mathrm{A} = p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M})$ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \operatorname{Ker}\overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}$, Du coup, si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathbb{A}} = \operatorname{Im}\overrightarrow{p_{\mathbb{A}}}$, alors $\langle\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{u}\rangle = 0$ car la projection est orthogonale.

Réciproquement, on suppose que $\mathrm{N} \in \mathbb{A}$ vérifie $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \in \overrightarrow{\mathbb{A}}^{\perp}$ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \in \operatorname{Im} p^{\perp} = \operatorname{Ker} p$. Par suite, on a $p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{N} + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{\mathrm{NM}}) = \mathrm{N}$. ■

Soit $(\mathrm{e}'_1,\dots,\mathrm{e}'_p)$ une base de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}'_1,\dots,\mathrm{e}'_n)$ de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$. Par l'algorithme de Gram-Schmidt, on construit une base orthonormée $(\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_n)$ de $\overrightarrow{\mathbb{E}}$ de sorte que $(\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_p)$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. On a donc construit un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{A},\mathcal{B})$ de $\mathbb{E}$. On obtient ainsi

$$p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \sum_{j=1}^{p}\langle \mathrm{e}_j, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\rangle \mathrm{e}_j\,.$$

Lemme 5.4. — *Soit* $p_{\mathbb{A}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *la projection orthogonale sur* $\mathbb{A}$. *Alors* $d(x,\mathbb{A}) = d(x, p_{\mathbb{A}}(x))$.

Démonstration. — En effet, si $\mathrm{A} \in \mathbb{A}$, alors $(\mathrm{A}, p_{\mathbb{A}}(x), x)$ est un triangle rectangle en $p_{\mathrm{A}}(x)$ donc $d(x,\mathrm{M})^2 = d(x,p_{\mathbb{A}}(x))^2 + d(p_{\mathbb{A}}(x),\mathrm{M})^2 \geq d(p_{\mathbb{A}}(x),x)^2$. ■

Matrice de Gram. — Si $x_1,\dots,x_p$ sont des vecteurs d'un espace euclidien, on définit la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{M}(x_1,\dots,x_p) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p}$ et le déterminant de Gram $\mathrm{G}(x_1,\dots,x_p) = \det \mathrm{M}$.

Lemme 5.5. — *Le déterminant de Gram est nul si et seulement si la famille est liée. Dans le cas contraire,* $\mathrm{G} = (\det \mathrm{P})^2$ *où* P *est la matrice de passage de* $(x_1, \ldots, x_p)$ *vers une famille orthonormée qui engendre le même espace.*

Démonstration. — Si la famille est libre, alors M représente la matrice du produit scalaire dans la base $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_p)$. De plus, il existe une base orthonormée $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. On a donc $x_j = \sum_{i=1}^{p} \langle x_j, \mathrm{e}_i\rangle \mathrm{e}_i$. Or la matrice de passage de X vers $\mathcal{B}$ est $\mathrm{P} = (\langle \mathrm{e}_i, x_j\rangle)_{i,j}$. Il vient ${}^t\mathrm{P} \cdot \mathrm{P} = \mathrm{M}$ et $\mathrm{G} = (\det \mathrm{P})^2$.

Si la famille est liée, alors il existe un indice k tel que x_k est combinaison linéaire des autres vecteurs: $x_k = \sum_{j\neq k} \lambda_j x_j$. Du coup, on a $\langle x_i, x_k\rangle = \sum_{j\neq k} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle$ pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$. Donc, en développant G selon la $k$ième colonne, on montre que $\mathrm{G} = 0$. ∎

Proposition 5.6. — *Soit* $\mathbb{A}$ *un sous-espace de* $\mathbb{E}$ *muni d'un repère* $(\mathrm{A}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$*. Pour tout* $\mathrm{M} \in \mathbb{E}$*, on a*

$$d(\mathrm{M}, \mathbb{A})^2 = \frac{\mathrm{G}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{\mathrm{AM}})}{\mathrm{G}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)}\,.$$

Démonstration. — Si $\mathrm{M} \in \mathbb{A}$, alors $d(\mathrm{M}, \mathbb{A}) = 0 = \mathrm{G}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{\mathrm{AM}})$. Supposons maintenant $\mathrm{M} \notin \mathbb{A}$ de sorte que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{\mathrm{AM}})$ est libre. On considère une base orthonormée $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ qui engendre $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ à laquelle on rajoute un vecteur unitaire e_{p+1} orthogonal à $\mathbb{A}$ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \mathbb{A} \oplus \mathbb{R}\mathrm{e}_{p+1}$ que l'on peut obtenir par l'algorithme de Gram-Schmidt. Si on note P la matrice de passage de $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ vers $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ et Q de $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{p+1})$ vers $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{\mathrm{AM}})$, on obtient

$$\frac{\mathrm{G}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \overrightarrow{\mathrm{AM}})}{\mathrm{G}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)} = \left(\frac{\det \mathrm{Q}}{\det \mathrm{P}}\right)^2.$$

On a donc

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} & & & \langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{e}_1\rangle \\ & \mathrm{P} & & \vdots \\ & & & \langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{e}_p\rangle \\ \langle \varepsilon_1, \mathrm{e}_{p+1}\rangle & \ldots & \langle \varepsilon_p, \mathrm{e}_{p+1}\rangle & \langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{e}_{p+1}\rangle \end{pmatrix}$$

Or, dans la dernière ligne, on a $\langle \varepsilon_j, \mathrm{e}_{p+1}\rangle = 0$ pour $1 \leq j \leq p$. Du coup, $\det \mathrm{Q} = \langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{e}_{p+1}\rangle \det \mathrm{P}$.

Or $\langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{e}_{p+1}\rangle = \langle \overrightarrow{p_{\mathbb{A}}(\mathrm{M})\mathrm{M}}, \mathrm{e}_{p+1}\rangle = d(\mathrm{M}, \mathbb{A})$, ce qui montre la proposition. ∎

5.3 Isométries affines

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Une *isométrie* est une transformation affine $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ qui préservent la distance euclidienne. On remarque tout d'abord qu'une isométrie $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ doit avoir sa partie linéaire dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, pour tous $p, q \in \mathbb{E}$, on a

$$\|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q) = d(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq})\|\,.$$

On vérifie que les isométries affines de $\mathbb{E}$ forment un groupe pour la composition. On parle de *déplacement* pour une isométrie f telle que $\overrightarrow{f} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, et *d'anti-déplacement* sinon.

On démontre le résultat suivant qui est central pour classer les isométries:

Théorème 5.7 (de décomposition). — *Si* f *est une isométrie affine d'un espace euclidien* $\mathbb{E}$ *de dimension finie, alors il existe un unique couple* $(g, \overrightarrow{u})$ *où* g *est une isométrie ayant un point fixe et* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur de* $\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ *tels que* $f = \mathrm{T}_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ \mathrm{T}_{\overrightarrow{u}}$.

On établit au préalable quelques lemmes.

Lemme 5.8. — *Soient* g *une transformation affine d'un espace affine* $\mathbb{E}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur de* $\overrightarrow{\mathbb{E}}$*. On a* $\mathrm{T}_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ \mathrm{T}_{\overrightarrow{u}}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{g - \mathrm{Id}}$.

Démonstration. — Les transformations $\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g$ et $g \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}$ ont même partie linéaire $\vec{g}$, donc elles sont égales si et seulement s'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{E}$ tel que $\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g(\mathrm{A}) = g \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}(\mathrm{A})$. Pour $\mathrm{A} \in \mathbb{E}$, prenons B tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{u}$ de sorte que $\vec{g}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \vec{g}(\vec{u})$ et prenons C tel que $\overrightarrow{g(\mathrm{A})\mathrm{C}} = \vec{u}$. Donc $\mathrm{T}_{\vec{u}} \circ g(\mathrm{A}) = g \circ \mathrm{T}_{\vec{u}}(\mathrm{A})$ si et seulement si

$$\vec{u} = \overrightarrow{g(\mathrm{A})\mathrm{C}} = \vec{g}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \vec{g}(\vec{u}),$$

soit $\vec{u} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{g - \mathrm{Id}}$. ∎

Lemme 5.9. — *Soient* $\mathbb{E}$ *un espace affine et* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *une application affine. Soit* A *un point de* $\mathbb{E}$, *et notons* $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$. *L'application affine* $\mathrm{T}_{-\vec{u}} \circ f$ *a un point fixe si et seulement si* $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \vec{u}$ *appartient à l'image* $\operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$.

Démonstration. — Si M est un point de $\mathbb{E}$, alors la relation de Chasles nous permet d'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{M}f(\mathrm{M})} + \overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{A})}$$

que l'on exprime en introduisant $\vec{u}$ et en posant $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sous la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \vec{u} = (\vec{x} - \vec{f}(\vec{x})) + \overrightarrow{\mathrm{M}(\mathrm{T}_{-\vec{u}}f)(\mathrm{M})}.$$

Si M est un point fixe, alors on obtient $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \vec{u} = (\vec{x} - \vec{f}(\vec{x}))$. Réciproquement, si $(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \vec{u}) = \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}(\vec{x})$, alors, en posant $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \vec{x}$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{M}(\mathrm{T}_{-\vec{u}}f)(\mathrm{M})} = 0$ donc $\mathrm{T}_{-\vec{u}} \circ f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. ∎

Lemme 5.10. — *Soit* $\mathbb{E}$ *un espace vectoriel euclidien, soit* f *une isométrie de* $\mathbb{E}$. *Les espaces* $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ *et* $\operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ *sont des supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.*

Démonstration. — Montrons que les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ et $\operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ sont orthogonaux. Soient $\vec{x} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ et $\vec{y} \in \operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$. On peut écrire $\vec{y} = \vec{f}(\vec{z}) - \vec{z}$, avec $z \in \mathbb{E}$. Comme $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$, on a

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{z}) - \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{z}) \rangle - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0$$

car f est une isométrie. En particulier, ces deux espaces $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ et $\operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ sont en somme directe. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}} + \dim \operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}} = \dim \vec{\mathbb{E}}.$$

Cela entraîne qu'ils sont supplémentaires l'un de l'autre, d'où le lemme. ∎

Démontrons maintenant le théorème 5.7.

Démonstration. — (théorème 5.7) Soit A un point de $\mathbb{E}$ et notons $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$. D'après les deux premiers lemmes, la condition du théorème est satisfaite par $\vec{u}$ et $g = \mathrm{T}_{-\vec{u}} \circ f$ si l'on a simultanément $\vec{u} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \vec{u} \in \operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$. Autrement dit, on doit pouvoir décomposer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sous la forme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} \overrightarrow{f - \mathrm{Id}}$. Cela est possible, d'une unique manière, d'après le dernier lemme. ∎

6 Espace euclidien de dimension 3

On se donne maintenant un espace affine euclidien $\mathbb{E}$ de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \mathcal{B})$. Celui-ci définit une orientation de E dans le sens suivant: si $\mathcal{B}'$ est une autre base de $\vec{\mathbb{E}}$, alors on dit que $\mathcal{B}'$ est une base directe si $\det \mathrm{P} \geq 1$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

6.1 Produit vectoriel et produit mixte

Une des spécificités de la dimension 3 est donnée par les notions de produit vectoriel et de produit mixte. Dans ce paragraphe, on considère un espace *vectoriel* euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

6.1.1 Produit vectoriel

Si $u, v \in \mathrm{E}$, le *produit vectoriel* $u \wedge v$ est un vecteur w tel que

- $w = 0$ si u et v sont colinéaires;
- w est le vecteur de norme $\|u\| \cdot \|v\| \sin\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle non orienté entre u et v, dans l'orthogonal $\{u, v\}^\perp$ et tel que (u, v, w) est une base directe.

  Si $u = x\mathrm{e}_1 + y\mathrm{e}_2 + z\mathrm{e}_3$ et $v = x'\mathrm{e}_1 + y'\mathrm{e}_2 + z'\mathrm{e}_3$ alors

$$u \wedge v = (yz' - y'z)\mathrm{e}_1 + (zx' - z'x)\mathrm{e}_2 + (xy' - x'y)\mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix} .$$

De manière abusive, on peut se souvenir de la formule en écrivant

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \mathrm{e}_1 \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \mathrm{e}_2 \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \mathrm{e}_3 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y'' \end{vmatrix} .$$

Propriété 6.1 (du produit vectoriel). — *On a les propriétés suivantes.*

1. *Bilinéarité: si $u, u', v, v' \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors*

$$\begin{array}{rcl} u \wedge (\lambda v + \mu v') & = & \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge v') \\ (\lambda u + \mu u') \wedge v & = & \lambda(u \wedge v) + \mu(u' \wedge v) \end{array}$$

2. *Antisymétrie: si $u, v \in \mathrm{E}$ alors $u \wedge v = -v \wedge u$.*
3. *Identité de Lagrange: si $u, v, w, z \in \mathrm{E}$, alors*

$$\langle u \wedge v, w \wedge z \rangle = \langle u, w \rangle \cdot \langle v, z \rangle - \langle u, z \rangle \cdot \langle v, w \rangle .$$

   En particulier, on obtient en prenant $u = w$ et $v = z$

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (\langle u, v \rangle)^2 .$$

4. *Si $u, v, w \in \mathrm{E}$, alors*

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w .$$

5. *Interprétation géométrique: si $u, v \in \mathrm{E}$, alors $\|u \wedge v\|$ représente l'aire du parallèlogramme de côtés parallèles à u et v.*

Remarque 6.2. — *Le produit vectoriel n'est en général pas associatif: si u, v, w, on n'a pas forcément*

$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) .$$

Par exemple, $(\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_1) \wedge \mathrm{e}_2 = 0$ *alors que* $\mathrm{e}_1 \wedge (\mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_2) = \mathrm{e}_1 \wedge \mathrm{e}_3 = -\mathrm{e}_2$.

6.1.2 Produit mixte

Ëtant donnés trois vecteurs $u, v, w \in \mathrm{E}$, on définit leur *produit mixte*

$$[u, v, w] = \langle u, v \wedge w \rangle \in \mathbb{R}\,.$$

Si $u = x\mathrm{e}_1 + y\mathrm{e}_2 + z\mathrm{e}_3$, $v = x'\mathrm{e}_1 + y'\mathrm{e}_2 + z'\mathrm{e}_3$ et $w = x''\mathrm{e}_1 + y''\mathrm{e}_2 + z''\mathrm{e}_3$, alors

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\,.$$

Propriété 6.3 (du produit mixte). — *Soit $u, v, w, z \in \mathrm{E}$. On a les propriétés suivantes.*

1. *Symétries: on a $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$ ainsi que*

$$[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]\,.$$

2. *Antisymétrie: on a $[u, v, w] = -[v, u, w]$.*
3. *On a $[u, v, w] = \|u\| \cdot \|v \wedge w\| \cos\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ désigne l'angle entre u et $v \wedge w$.*
4. *On a*

$$(u \wedge v) \wedge (w \wedge z) = [u, v, z]w - [u, v, w]z\,.$$

5. *Interprétation géométrique: $|[u, v, z]|$ représente le volume du parallélépipède de côtés parallèles à u, v et w.*

6.2 Plans et droites dans l'espace

Rappelons que les plans et droites dans $\mathbb{E}^3$ ont deux représentations: paramétriques et cartésiennes.

En ce qui concerne les plans, la représentation cartésienne se présente sous la forme

$$ax + by + cz = d \quad (\mathrm{P})$$

où a, b, c, d sont des réels. En particulier, si $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est dans P, alors $\mathrm{M} = (x, y, z) \in \mathrm{P}$ si et seulement si

$$\langle \vec{\nu}, \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \langle \vec{\nu}, \overrightarrow{\mathrm{OM}} \rangle = d\,,$$

où $\vec{\nu} = a\mathrm{e}_1 + b\mathrm{e}_2 + c\mathrm{e}_3$. On remarque que le vecteur $\vec{\nu}$ définit l'orthogonal $\mathrm{P}^\perp$ de P. Le vecteur $\vec{\nu}$ ainsi que tous ses multiples non nuls sont appelés des vecteurs *normaux* à P. On considère souvent des vecteurs normaux unitaires, c'est-à-dire $\pm\vec{\nu}/\|\vec{\nu}\|$. L'équation de P devient alors

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (\mathrm{P})$$

On parle alors de *forme normale* de P.

Lorsque l'on fait varier le paramètre d, on obtient des plans parallèles de même direction $\mathrm{P}_0 = \vec{\nu}^\perp$.

On dit que deux plans sont *perpendiculaires* si leurs normales sont orthogonales. Plus généralement, on définit *l'angle de deux plans* comme par l'angle de leurs vecteurs normaux.

Si $\mathrm{M} \in \mathbb{E}$, alors on a vu que $d(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = d(\mathrm{M}, p_\mathrm{P}(\mathrm{M})) = \overrightarrow{\mathrm{M}p_\mathrm{P}(\mathrm{M})}$ où $p_\mathrm{P} : \mathbb{E} \to \mathrm{P}$ est la projection orthogonale sur P. Du coup, comme $\operatorname{Ker} \vec{p_\mathrm{P}} = \mathbb{R}\vec{\nu}$, on en déduit que

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = \left| \left\langle \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}, \frac{\vec{\nu}}{\|\vec{\nu}\|} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}, \vec{\nu} \rangle|}{\|\vec{\nu}\|}\,.$$

Or

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}, \vec{\nu} \rangle = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = ax + by + cz - d$$

donc
$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

Si à la place de présenter P sous forme cartésienne, on le présente sous forme paramétrique avec une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$. On obtient un vecteur normal en posant $\overrightarrow{\nu}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$. Par conséquent
$$d(\mathrm{M},\mathrm{P}) = \frac{|\langle\overrightarrow{\mathrm{M_0M}},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|} = \frac{|[\overrightarrow{\mathrm{M_0M}},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}\,.$$
Si on a les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, cela se calcule bien.

Si on considère deux plans non parallèles P et P′, c'est-à-dire que leurs normales $\overrightarrow{\nu}$ et $\overrightarrow{\nu'}$ ne sont pas colinéaires, alors ces plans s'intersectent le long d'une droite. Cette droite est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{\nu}$ et à $\overrightarrow{\nu'}$. Du coup, $\overrightarrow{\nu}\wedge\overrightarrow{\nu'}$ est un vecteur directeur de $\mathrm{P}\cap\mathrm{P}'$.

Supposons maintenant que D est une droite dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire passant par un point M_0. Notons $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})$ la projection orthogonale de M sur D. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})}$ sont orthogonaux, on a $\|\overrightarrow{\mathrm{M}p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})}\| = \|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{M}p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})}\|$. Du coup, comme $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \overrightarrow{\mathrm{M}_0p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})}+\overrightarrow{p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})\mathrm{M}}$, on obtient $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{M}p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M})} = -\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{M_0M}}$ et
$$d(\mathrm{M},\mathrm{D}) = \|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{M_0M}}\|\,.$$
Lorsque l'on ne suppose pas $\overrightarrow{u}$ unitaire, il vient
$$d(\mathrm{M},\mathrm{D}) = \frac{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{M_0M}}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}\,.$$

On définit *l'angle entre deux droites* D et D′ dirigés par deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ par l'angle $\theta\in[0,\pi]$ entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. *L'angle* entre une droite D dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un plan P normal à $\overrightarrow{\nu}$ est $\pi/2-\mathrm{angle}(\overrightarrow{\nu},\overrightarrow{u})$. On vérifie que si P et D sont perpendiculaires, alors l'angle est bien $\pi/2$ et si D est faiblement parallèle à P, alors l'angle est nul.

6.3 Isométries de l'espace

L'objet de ce paragraphe est de classer les isométries de $\mathbb{E}^3$, c'est-à-dire les transformations affines qui préservent la distance euclidienne. On rappelle qu'une isométrie $f:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ a sa partie linéaire dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

6.3.1 Isométrie avec un point fixe

Si f admet un point fixe dans $\mathbb{E}^3$, que l'on appellera O dans la suite, on peut considérer la vectorialisation $\overrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathrm{O}}$ de $\mathbb{E}$ en fixant l'origine en O. Du coup, cette isométrie affine se transforme en isométrie vectorielle $\overrightarrow{f}\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

On peut distinguer les isométries selon le rang de $\overrightarrow{f-\mathrm{Id}}$. Par conséquent, la classification des isométries nous donne les types suivants:

– Pour les déplacements,

  1. $\mathrm{rg}(\overrightarrow{f-\mathrm{Id}})=0$: l'application identité;

  2. $\mathrm{rg}(\overrightarrow{f-\mathrm{Id}})=2$: les rotations qui dans une base orthonormée convenable s'expriment sous la forme
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
  où $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ est l'angle de rotation et $\mathbb{R}e_3$ est l'axe de la rotation. Quand $\theta=-\pi$, on parle de retournement.

– Pour les anti-déplacements:

1. $\mathrm{rg}(\overrightarrow{f - \mathrm{Id}}) = 1$: les réflexions par rapport à un plan que l'on pent exprimer dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $\mathrm{rg}(\overrightarrow{f - \mathrm{Id}}) = 3$ les anti-rotations que l'on pent exprimer dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ est l'angle de rotation et $\mathbb{R}e_3$ est son axe.

6.3.2 Isométries sans point fixe

On suppose maintenant que f est sans point fixe et on considère sa décomposition canonique $f = g \circ \mathrm{T}_{\overrightarrow{u}}$ donnée par le théorème 5.7, où g admet pour point fixe O et $\overrightarrow{u} \neq 0$ vérifie $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

Commençons par les déplacements. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$, alors f est une translation. Sinon $\overrightarrow{f}$ est une rotation. Du coup, g est une rotation et $\overrightarrow{u}$ dirige l'axe de rotation de g. Dans une base orthonormée dont le troisième vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, on trouve

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on dit que f est un *vissage*.

On suppose maintenant que f est un anti-déplacement. Notons que si g est une anti-rotation, alors 1 est une valeur propre de $\overrightarrow{f}$ seulement si l'angle de la rotation est nul. Dans ce cas, g fixe un plan et on trouve

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on dit que f est une *réflexion glissée*.

Bilan. — Les isométries sont classés comme suit:

Type d'isométries	(anti)-déplacement	$\mathrm{rg}(\overrightarrow{f - \mathrm{Id}})$	valeur de $\overrightarrow{u}$	isométrie g
identité	déplacement	0	$\overrightarrow{0}$	identité
translation	déplacement	0	$\neq \overrightarrow{0}$	identité
réflexion	anti-déplacement	1	$\overrightarrow{0}$	réflexion
réflexion glissée	anti-déplacement	1	$\neq \overrightarrow{0}$	réflexion
rotation	déplacement	2	$\overrightarrow{0}$	rotation
vissage	déplacement	2	$\neq \overrightarrow{0}$	rotation
anti-rotation	anti-déplacement	3	$\overrightarrow{0}$	anti-rotation