Espaces hermitiens complexes

Peter Haïssinsky, Université de Paul Sabatier

2014–2015

1 Introduction

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. — *Une forme sesquilinéaire est une application* $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{C}$ *telle que*

- *pour tout* $y \in \mathrm{E}$, $b_1 : x \mapsto b(x, y)$ *est linéaire;*
- *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $b_2 : y \mapsto b(x, y)$ *est semi-linéaire:*
  - *pour tous* $y_1, y_2 \in \mathrm{E}$, *on a* $b_2(y_1 + y_2) = b_2(y_1) + b_2(y_2)$
  - *pour tous* $y \in \mathrm{E}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on a* $b_2(\lambda y) = \bar{\lambda} b_2(y)$.

On dit qu'elle est hermitienne si pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, *on a* $b(y, x) = \overline{b(x, y)}$.

Remarquons que pour une forme hermitienne, on a $b(x, x) = \overline{b(x, x)}$ donc $b(x, x) \in \mathbb{R}$. On note $q(x) = b(x, x)$ et on dit que q est la forme quadratique associée à b. On a $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

On peut retrouver b à partir de q avec la formule suivante

$$b(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy)) . \tag{1.1}$$

Définition 1.2. — *Un produit scalaire hermitien est une forme sesquilinéaire définie positive, c'est-à-dire qu'on a* $q(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et* $q(x) = 0$ *seulement si* $x = 0$.

Définition 1.3. — *Un espace (complexe) hermitien est un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{C}$ *muni d'un produit scalaire hermitien. On note le produit scalaire* $b(x, y) = \langle x, y\rangle$.

L'application $\bar{b} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$ qui, à $y \in \mathrm{E}$, on associe la forme $x \mapsto b(x, y)$ devient maintenant semi-linéaire.

Si $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_j)$ est une base de E, on associe, comme pour les formes bilinéaires, la matrice $\mathrm{H} = (h_{ij})$ où $h_{ij} = b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$. Si X est le vecteur colonne de x et Y de y, alors $b(x, y) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{H}\overline{\mathrm{Y}}$.

Si $(h_{i,j})$ sont les coefficients de la matrice d'une forme hermitienne dans une base fixée, alors les coefficients vérifient $h_{ji} = \overline{h_{ij}}$ et $h_{ii} = \overline{h_{ii}}$ donc $h_{ii} \in \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base et P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors $\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$, $\mathrm{Y} = \mathrm{P}\mathrm{Y}'$ donc si $b(x, y) = {}^t\mathrm{X}\mathrm{H}\overline{\mathrm{Y}}$, alors on trouve

$${}^t\mathrm{X}\mathrm{H}\overline{\mathrm{Y}} = {}^t\mathrm{X}'({}^t\mathrm{P}\mathrm{H}\overline{\mathrm{P}})\overline{\mathrm{Y}'} .$$

Donc $\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}') = {}^t\mathrm{P}\mathrm{H}\overline{\mathrm{P}}$.

Exemple. — Sur $\mathbb{C}^n$, on pose

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle = {}^t\mathrm{X}\overline{\mathrm{Y}} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j .$$

On vérifie que c'est bien une forme hermitienne. De plus, on a $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle = \sum |x_j|^2$ donc elle est positive, et $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle = 0$ seulement si $x_j = 0$ pour tout j, donc elle est bien définie positive.

Théorème 1.4. — *Un espace hermitien est naturellement un espace vectoriel normé.*

Pour montrer ce résultat, on commence par montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. — *Soit* (E, q) *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel hermitien. On a, pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$,

$$|b(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)\,.$$

L'égalité n'a lieu que si x *et* y *sont colinéaires.*

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. — Pour $t \in \mathbb{C}$, on a $q(xt+y) \geq 0$. On écrit $b(x,y)$ sous la forme $b(x,y) = |b(x,y)|\mathrm{e}^{i\theta}$ et on prend $t = |t|\mathrm{e}^{-i\theta}$. On a $q(tx+y) = q(x)|t|^2 + 2|t|\cdot|b(x,y)| + q(y)$. Comme ce polynôme quadratique en $|t|$ ne prend que des valeurs positives, il ne peut s'annuler au plus qu'une fois, donc son discriminant doit être négatif :

$$|b(x,y)|^2 - q(x)\cdot q(y) \leq 0\,.$$

Dans le cas d'égalité, on a donc une racine t de sorte que $q(xt+y) = 0$, impliquant ainsi $y = -tx$. ■

Démonstration du Théorème **??**. — On pose, pour $x \in \mathrm{E}$, $\|x\| = \sqrt{q(x)}$. Pour montrer que $\|\cdot\|$ est une norme, il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}(\|x\| + \|y\|) - \|x+y\| &= \frac{q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)} - q(x+y)}{\|x+y\| + \|x\| + \|y\|} \\ &\geq \frac{2\sqrt{q(x)q(y)} - 2\mathrm{Re}\, b(x,y)}{\|x+y\| + \|x\| + \|y\|} \geq 0\,.\end{aligned}$$

■

Définition 1.5. — *Un endomorphisme unitaire est un endormorphisme* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que, pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$, *on a* $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Comme dans le cas euclidien, un endomorphisme unitaire est un isomorphisme, car si $u(x) = 0$, alors $\langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = 0$, donc $x = 0$. Comme on est en dimension finie, l'injectivité de u implique sa bijectivité. Les endomorphismes unitaires forment donc un groupe que l'on nomme *le groupe unitaire* $\mathrm{U}(\mathrm{E})$.

2 Orthogonalité

La notion d'orthogonalité est similaire aux espaces euclidiens. On donne les résultats principaux. Les démonstrations sont les mêmes.

Définition 2.1. — *On dit que deux vecteurs* x *et* y *sont orthogonaux, et l'on note* $x \perp y$ *si* $b(x,y) = 0$. *Si* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *est un sous-ensemble, alors on définit*

$$\mathrm{F}^{\perp} = \{x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{F},\ b(x,y) = 0\}\,.$$

C'est toujours un sous-espace vectoriel. Enfin, une base orthogonale $\mathcal{B}$ *est une base telle que* $b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = 0$ *dès que* $i \neq j$.

Proposition 2.2. — *Supposons* (E, q) *un espace hermitien. Si* F *est un sous-espace de* E *alors on a*

1. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$,
2. $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^{\perp})^{\perp}$,
3. $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} \cap \mathrm{G}^{\perp}$ *et* $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^{\perp} = \mathrm{F}^{\perp} + \mathrm{G}^{\perp}$.

Définition 2.3. — *Une base orthonormée est une base* $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ *telle que* $b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = \delta_{i,j}$, *où* $\delta_{i,j}$ *est le symbole de Kronecker.*

Théorème 2.4. — *Dans un espace hermitien, il existe toujours une base orthonormée.*

Dans une telle base, la matrice de q est l'identité. Du coup, les éléments unitaires sont représentés par des matrices M telles que ${}^t\overline{\mathrm{M}} \cdot \mathrm{M} = \mathrm{I}$. Dans une base orthonormée, on a $\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = {}^t\mathrm{X} \cdot \overline{\mathrm{Y}}$.

Démonstration. — On applique l'algorithme de Gram-Schmidt.

L'orthogonalisation de Gram-Schmidt implique aussi que, pour tout sous-espace F de E, il existe une base orthonormée de E dont les premiers $\dim \mathrm{F}$ vecteurs forment une base de F.

Projection orthogonale. — Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est un sous-espace vectoriel, on peut définir la projection orthogonale $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ qui à un vecteur x associe l'unique vecteur $p(x) \in \mathrm{F}$ tel que $(x - p(x)) \in \mathrm{F}^\perp$. Si $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_k)$ est une base orthonormée de F, on vérifie que

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, \mathrm{e}_j \rangle \mathrm{e}_j \,.$$

Proposition 2.5. — *Soit $b : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire sur un espace hermitien. Il existe des endomorphismes u et v tels que, pour tout $x, y \in \mathrm{E}$, on ait*

$$b(x,y) = \langle x, u(y) \rangle = \langle v(x), y \rangle \,.$$

Ces endomorphismes sont uniques. Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, on a $\mathrm{Mat}(b,\mathcal{B}) = \overline{\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B})} = {}^t\mathrm{Mat}(v,\mathcal{B})$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base orthonormée ; on note $\mathrm{M} = (b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j))_{i,j}$ la matrice de b. On note X, Y les vecteurs coordonnées de $x, y \in \mathrm{E}$. On a

$$b(x,y) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = {}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{M} \cdot \overline{\mathrm{Y}} = \langle {}^t\mathrm{M}\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \langle \mathrm{X}, \overline{\mathrm{M}}\mathrm{Y} \rangle \,.$$

On définit donc, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{cases} u(\mathrm{e}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)\mathrm{e}_i \,, \\[2ex] v(\mathrm{e}_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)\mathrm{e}_j \,. \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{cases} \langle \mathrm{e}_i, u(\mathrm{e}_j) \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j) \langle \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_i \rangle = b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) \,, \\[2ex] \langle v(\mathrm{e}_i), \mathrm{e}_j \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_k) \langle \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k \rangle = b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) \,. \end{cases}$$

L'unicité provient aussi de ces relations. ∎

Définition 2.6. — *Si $u \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$, on appelle* adjoint *de u, que l'on note u^*, l'endomorphisme tel que, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$,*

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \,.$$

L'adjoint existe toujours d'après la proposition précédente puisque $b : (x,y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est sesquilinéaire. De plus, $u^{**} = u$.

Si M est la matrice de u dans une base orthonormée, alors

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = {}^t(\mathrm{M} \cdot \mathrm{X}) \cdot \overline{\mathrm{Y}} = {}^t\mathrm{X} \cdot {}^t\mathrm{M} \cdot \overline{\mathrm{Y}}$$

donc la matrice de u^* est ${}^t\overline{\mathrm{M}}$.

On dit que u est hermitien si $u = u^*$, antihermitien si $u = -u^*$ et unitaire si $uu^* = \mathrm{Id}$.

Remarque 2.7. — *Les polynômes caractéristiques de u et u^* sont complexe-conjugués.*

3 Endomorphismes normaux

Définition 3.1. — *Un endomorphisme est normal s'il commute avec son adjoint.*

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 3.2. — *Pour tout endomorphisme normal u d'un espace hermitien, il existe une base orthonormée de E qui diagonalise u. Si u est hermitien, alors les valeurs propres sont réelles, si u est antihermitien, elles sont imaginaires pures et si u est unitaire, alors elles sont de module 1.*

Proposition 3.3. — *Soit u un endomorphisme normal.*

1. *On a l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$.*
2. *u et u^* ont leurs valeurs propres conjuguées et partagent les mêmes espaces propres. Ceux-ci sont orthogonaux deux à deux.*
3. *u fixe au moins une droite.*
4. *Si F est stable par u, alors F est aussi stable par u^*, et $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u et u^*.*

Démonstration. —

1. Si u est normal, alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. En effet,
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle = \langle x, u(u^*(x))\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2 .$$
Donc $u(x)$ et $u^*(x)$ s'annulent simultanément.

2. provient du fait que $u + \lambda \mathrm{I}$ est normal si u est normal, donc $\operatorname{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(u^* + \bar{\lambda}\mathrm{Id})$ d'après ci-dessus. Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes de u, et x, y deux vecteurs propres associés : $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. Il vient
$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle .$$
Du coup $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ et $\langle x, y\rangle = 0$.

3. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il existe toujours une valeur propre et un vecteur propre associé.

4. On considère une base orthonormée de E telle que les premiers $p = \dim \mathrm{F}$ vecteurs forment une base de F et les derniers une base de $\mathrm{F}^\perp$. Dire que F est stable par u signifie qu'il existe des matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ telles que la matrice de u s'écrive
$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$
Dire que u est normal signifie que $\mathrm{A} \cdot {}^t\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} \cdot {}^t\overline{\mathrm{B}} = {}^t\overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{A}$. Or, un simple calcul montre que $\operatorname{tr}(\mathrm{A} \cdot {}^t\overline{\mathrm{A}}) = \operatorname{tr}({}^t\overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{A})$, donc $\operatorname{tr}(\mathrm{B} \cdot {}^t\overline{\mathrm{B}}) = 0$. Mais, si $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n-p}$, alors
$$\operatorname{tr}(\mathrm{B} \cdot {}^t\overline{\mathrm{B}}) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n-p} b_{jk}\overline{b_{jk}} \right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n-p} |b_{jk}|^2 .$$
Donc $b_{jk} = 0$ pour tout j, k et $\mathrm{B} = 0$. Du coup,
$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$
avec A et C normaux. Ceci montre que F et $\mathrm{F}^\perp$ sont stables par u et u^*.

$\blacksquare$

Démonstration du Théorème de réduction. — On procède par récurrence sur la dimension de E. Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire. Supposons que ce soit vrai pour tout espace de dimension n, et que E est de dimension $n+1$. D'après la proposition précédente, il existe une valeur propre λ, et un vecteur propre (normé) e_{n+1}. On note $\mathrm{F} = \mathbb{C}\mathrm{e}_{n+1}$. Cet espace est stable par u donc $\mathrm{F}^{\perp}$ aussi, qui est un supplémentaire de F. L'hypothèse de récurrence s'applique à $u|_{\mathrm{F}^{\perp}}$. Cette base se complète en une base orthonormée de E, et la matrice D de u dans cette base est diagonale.

Si u est hermitien, alors $\mathrm{D} = \overline{\mathrm{D}}$, donc les valeurs propres sont réelles. Si u est antihermitien, alors $\mathrm{D} = -\overline{\mathrm{D}}$, donc les valeurs propres sont imaginaires pures. Enfin, si u est unitaire, on trouve, pour la base orthonormée (e'_j) de vecteurs propres, $1 = \langle \mathrm{e}'_j, \mathrm{e}'_j \rangle = \langle u(\mathrm{e}'_j), u(\mathrm{e}'_j) \rangle = |\lambda|^2$. ■

4 Le groupe unitaire

On suppose que E est un espace hermitien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

Théorème 4.1. — *Soit u un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- $u \in \mathrm{U}(\mathrm{E})$;
- *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on a* $\|u(x)\| = \|x\|$;
- $u \circ u^* = \mathrm{Id}$;
- $u^* \circ u = \mathrm{Id}$;
- $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot {}^t\overline{\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})} = \mathrm{I}$;
- ${}^t\overline{\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})} \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{I}$;
- *les colonnes de* $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ *forment une base orthonormée ;*
- *les lignes de* $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ *forment une base orthonormée ;*
- *u transforme une base orthonormée en une base orthonormée.*

La démonstration est laissée en exercice.

Corollaire 4.2. — *Si* $u \in \mathrm{U}(\mathrm{E})$, *alors* $|\det u| = 1$ *et donc* $\mathrm{SU}(\mathrm{E}) = \det^{-1}\{1\} \cap \mathrm{U}(\mathrm{E})$ *est distingué.*