Espaces euclidiens

Peter Haïssinsky, Université de Paul Sabatier

2014–2015

On présente quelques notions sur les espaces euclidiens. Un appendice contient des rappels sur la dualité en algèbre linéaire.

1 Introduction

Définition 1.1. — *Une forme bilinéaire sur un espace vectoriel est une application $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ telle que*

- *pour tout $y \in \mathrm{E}$, $b_1 : x \mapsto b(x, y)$ est linéaire;*
- *pour tout $x \in \mathrm{E}$, $b_2 : y \mapsto b(x, y)$ est linéaire;*

On dit qu'elle est symétrique si $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$. De plus, quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que b est

- *positive si $b(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$,*
- *définie si $b(x, x) = 0$ seulement si $x = 0$.*

On note $q(x) = b(x, x)$ et on dit que q est la forme quadratique associée à b.

Lorsque b est symétrique, on peut la retrouver à partir de q avec la formule suivante

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)) . \tag{1.1}$$

Représentation matricielle d'une forme bilinéaire. — On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B}$ et d'une forme bilinéaire $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{K}$. Alors, si $x = \sum x_j \mathrm{e}_j$et $y = \sum y_k \mathrm{e}_k$, on obtient

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathrm{e}_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j b\left(\mathrm{e}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \mathrm{e}_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k b\left(\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k\right) \end{aligned}$$

ce qui signifie que b est uniquement déterminée par les valeurs de b sur $\mathcal{B}$. On définit

$$\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}) = (b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j))_{1 \leq i,j \leq n} .$$

Si on représente les coordonnées des vecteurs x et y par des vecteurs colonnes X et Y, on obtient

$$b(x, y) = {}^t\mathrm{X}\, \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}) \mathrm{Y} .$$

On remarque que b est symétrique uniquement si sa matrice $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$ est symétrique, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$. En effet, on aura alors $b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = b(\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i)$ pour tous i, j.

Lemme 1.2 (Changements de bases). — *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire, alors*

$$\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}') = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})\mathrm{P}\,.$$

où P *désigne la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$*.*

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathrm{E}$, et notons X, Y leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et X', Y' dans la base $\mathcal{B}'$ de sorte que $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{PY}'$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} b(x, y) &= {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})\mathrm{Y} \\ &= {}^t(\mathrm{PX}')\,\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})(\mathrm{PY}') \\ &= {}^t\mathrm{X}'({}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})\mathrm{P})\mathrm{Y}' \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}') = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})\mathrm{P}\,.$$

■

Définition 1.3. — *Un produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive. Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{R}$ *muni d'un produit scalaire. On note le produit scalaire* $b(x, y) = \langle x, y \rangle$*.*

Exemples.

- Sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = {}^t\mathrm{XY} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\,.$$

  On vérifie que c'est bien une forme bilinéaire symétrique. De plus, on a $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = \sum x_j^2$ donc elle est positive, et $\langle \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle = 0$ seulement si $x_j = 0$ pour tout j, donc elle est bien définie positive.

- Si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $q(\mathrm{M}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{MM})$ détermine une forme quadratique définie positive avec $b(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{MN})$. Pour cela, on note $\mathrm{M} = (a_{ij})$ et on calcule les termes diagonaux de ${}^t\mathrm{MM} = (b_{ij})$:

$$b_{jj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2$$

  et

$$\mathrm{tr}({}^t\mathrm{MM}) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2$$

  donc $q(\mathrm{M}) \ge 0$ et $q(\mathrm{M}) = 0$ implique $\mathrm{M} = 0$.

Théorème 1.4. — *Un espace euclidien est naturellement un espace vectoriel normé, c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes, avec* $\|x\| = \sqrt{q(x)}$*:*

1. *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*,* $\|x\| \ge 0$ *et* $\|x\| = 0$ *seulement si* $x = 0$*;*
2. *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*;*
3. *pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$*, on a* $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$*.*

Pour montrer ce résultat, on commence par montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. — *Soit* (E, b) *un espace vectoriel euclidien de forme quadratique* q*. On a, pour tout* $x, y \in \mathrm{E}$*,*

$$b(x, y)^2 \le q(x)q(y)\,,$$

avec égalité si et seulement si x *et* y *sont liés.*

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. — Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $q(xt+y) \geq 0$. Or, en utilisant la bilinéarité de b et la symétrie, on montre que $q(tx+y) = q(x)t^2 + 2tb(x,y) + q(y)$. Comme ce polynôme quadratique (en t) ne prend que des valeurs positives, il ne peut s'annuler au plus qu'une fois, donc son discriminant doit être négatif :

$$b(x,y)^2 - q(x) \cdot q(y) \leq 0\,.$$

Le cas d'égalité a lieu si on n'a qu'une seule racine, qui est donc, en supposant $x, y \neq 0$, $t = -b(x,y)/q(x)q(y)$, auquel cas on a $q(tx+y) = 0$ soit $tx+y=0$. Donc x et y sont liés. ■

Démonstration du théorème 1.4. — On pose, pour $x \in \mathrm{E}$, $\|x\| = \sqrt{q(x)}$. Pour montrer que $\|\cdot\|$ est une norme, il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}(\|x\| + \|y\|) - \|x+y\| &= \frac{q(x) + q(y) + 2\sqrt{q(x)q(y)} - q(x+y)}{\|x+y\| + \|x\| + \|y\|} \\ &\geq \frac{2\sqrt{q(x)q(y)} - 2b(x,y)}{\|x+y\| + \|x\| + \|y\|} \geq 0\,.\end{aligned}$$

Dualité. — Une propriété fondamentale des espaces euclidiens est l'existence d'un isomorphisme canonique entre E et E^* donnée par la structure euclidienne:

Théorème 1.5. — *Soit* E *un espace euclidien, l'application*

$$\Lambda : x \in \mathrm{E} \mapsto (\mathrm{L}_x : y \mapsto \langle y, x\rangle) \in \mathrm{E}^*$$

est un isomorphisme. En particulier, pour tout $\mathrm{L} \in \mathrm{E}^*$*, il existe un unique* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{L}(y) = \langle y, x\rangle$ *pour tout* $y \in \mathrm{E}$.

Démonstration. — On vérifie d'abord que L_x est bien dans E^* pour chaque x, puis que Λ est linéaire (cela découle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire).

Ensuite, il suffit de vérifier que Λ est injective: si $\Lambda(x) = 0$, cela implique que $\mathrm{L}_x(x) = \|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$. Ceci montre que Λ est un isomorphisme puisque $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}^*$. Du coup, si $\mathrm{L} \in \mathrm{E}^*$ et $x = \Lambda^{-1}(\mathrm{L})$, on a $\mathrm{L} = \mathrm{L}_x$: pour tout $y \in \mathrm{E}$, on a donc $\mathrm{L}(y) = \langle y, x\rangle$.

■

2 Orthogonalité

On se donne un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$.

Définition 2.1. — *On dit que deux vecteurs* x *et* y *sont orthogonaux, et l'on note* $x \perp y$ *si* $\langle x, y\rangle = 0$. *Si* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *est un sous-ensemble, alors on définit*

$$\mathrm{F}^\perp = \{x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{F},\ \langle x, y\rangle = 0\}\,.$$

C'est toujours un sous-espace vectoriel. Enfin, une base orthogonale $\mathcal{B}$ *est une base telle que* $\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j\rangle = 0$ *dès que* $i \neq j$. *On dit qu'elle est orthonormée si* $\|\mathrm{e}_i\| = 1$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.2. — *Si* $u, v \in \mathrm{E}$*, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique* $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. *S'ils sont non nuls, alors on pourra trouver* $\theta \in [0, \pi]$ *tel que* $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta$. *On dit alors que l'angle (non orienté) entre* u *et* v *est* θ. *Si* $u \perp v$*, on a donc* $\cos\theta = 0$ *et* $\theta = \pi/2$. *S'ils sont colinéaires, on a* $\theta \in \{0, \pi\}$*, selon que les orientations coïncident ou non.*

Proposition 2.3. — *Soit* E *un espace euclidien. Si* F, G *sont des sous-espaces de* E *alors on a*

1. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$*;*

2. $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^\perp)^\perp$,

3. $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$ *et* $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp$.

DÉMONSTRATION. —

1. On part de l'observation que $x \in \mathrm{F}^\perp$ si et seulement si $\Lambda(x) \in \mathrm{F}^\circ$, où $\Lambda : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$ est défini dans le théorème 1.5 et F° désigne l'orthogonal au sens de la dualité, cf. l'appendice § A. En effet, $x \in \mathrm{F}^\perp$ est équivalent à $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$, ce qui s'écrit aussi $\mathrm{L}_x(y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$, soit $\Lambda(x) \in \mathrm{F}^\circ$.

Comme Λ est un isomorphisme et $\mathrm{F}^\circ = \Lambda(\mathrm{F}^\perp)$, on obtient

$$\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{F}^\circ = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}\,.$$

Enfin, si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$, donc en particulier pour x; on obtient ainsi $\|x\| = 0$ donc $x = 0$.

2. On a toujours $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$. En effet, si $x \in \mathrm{F}$ et si $y \in \mathrm{F}^\perp$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ donc $x \in (\mathrm{F}^\perp)^\perp$. De plus, $\dim \mathrm{F} = \dim(\mathrm{F}^\perp)^\perp$ par l'identité que l'on vient de montrer. Donc $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

3. est laissé à titre d'exercice.

■

Théorème 2.4. — *Un espace euclidien admet une base orthonormée. Dans cette base,* $\mathrm{Mat}(b)$ *est la matrice identité:*

$$q(x) = \sum (\mathrm{e}_i^*(x))^2\,.$$

DÉMONSTRATION. — Par récurrence. Si $n = 1$, alors on prend un vecteur non nul v et on pose $\mathrm{e}_1 = v/\|v\|$. Supposons que tout espace de dimension n admette une base orthonormée et considérons un espace E de dimension $n+1$. Choisissons un vecteur $\mathrm{e}_{n+1} \in \mathrm{E}$ tel que $\|\mathrm{e}_{n+1}\| = 1$. Soit $\mathrm{H} = \mathrm{e}_{n+1}^\perp$ de sorte que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}\mathrm{e}_{n+1}$ et $\dim \mathrm{H} = n$. L'hypothèse de récurrence nous construit une base orthonormée $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ de H. Vérifions que

$$\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n, \mathrm{e}_{n+1})$$

est une base. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des scalaires tels que $\sum \lambda_j \mathrm{e}_j = 0$. Alors

$$\left\langle \sum \lambda_j \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_{n+1} \right\rangle = \sum \lambda_j \langle \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_{n+1}\rangle = \lambda_{n+1}\|\mathrm{e}_{n+1}\|^2 = 0$$

et $\lambda_{n+1} = 0$. Du coup, ces vecteurs sont bien indépendants, unitaires et orthogonaux deux à deux. ■

Algorithme de Gram-Schmidt. — Cet algorithme fabrique une base orthornormée $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ à partir d'une base quelconque $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de sorte que $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ pour tout $1 \le p \le n$.

On pose $\mathrm{e}_1 = \varepsilon_1/\|\varepsilon_1\|$. Si $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p$ est construit, alors on pose

$$\mathrm{e}'_{p+1} = \varepsilon_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \langle \varepsilon_{p+1}, \mathrm{e}_j\rangle \mathrm{e}_j$$

puis $\mathrm{e}_{p+1} = \mathrm{e}'_{p+1}/\|\mathrm{e}'_{p+1}\|$.

Si $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, alors d'une part e_{p+1} n'est pas une combinaison linéaire de $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ car $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1})$ est libre, et d'autre part, pour $1 \le k \le p$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{e}_k, \mathrm{e}'_{p+1}\rangle &= \left\langle \mathrm{e}_k, \varepsilon_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \langle \varepsilon_{p+1}, \mathrm{e}_j\rangle \mathrm{e}_j \right\rangle \\
&= \langle \mathrm{e}_k, \varepsilon_{p+1}\rangle - \sum_{j=1}^{p} \langle \varepsilon_{p+1}, \mathrm{e}_j\rangle \, \langle \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j\rangle \\
&= \langle \mathrm{e}_k, \varepsilon_{p+1}\rangle - \langle \varepsilon_{p+1}, \mathrm{e}_k\rangle \, \langle \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_k\rangle = 0
\end{aligned}$$

donc $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{p+1})$ est bien orthonormée. De plus, on a $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_{p+1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1})$ par construction.

Adjoint d'un endomorphisme. — On utilise l'existence d'une base orthonormée pour définir l'adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien.

Proposition 2.5. — *Soit $b : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur un espace euclidien. Il existe des endomorphismes u et v tels que, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on ait*

$$b(x,y) = \langle x, u(y) \rangle = \langle v(x), y \rangle .$$

Ces endomorphismes sont uniques.

De plus, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors on a $\mathrm{Mat}(b,\mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = {}^t\mathrm{Mat}(v,\mathcal{B})$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base orthonormée ; on définit, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{cases} u(\mathrm{e}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)\mathrm{e}_i \,, \\[2ex] v(\mathrm{e}_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)\mathrm{e}_j \,. \end{cases}$$

On a bien

$$\begin{cases} \langle \mathrm{e}_i, u(\mathrm{e}_j) \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_j)\langle \mathrm{e}_k, \mathrm{e}_i \rangle = b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) \,, \\[2ex] \langle v(\mathrm{e}_i), \mathrm{e}_j \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_k)\langle \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_k \rangle = b(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) \,. \end{cases}$$

L'unicité provient aussi de ces relations. ■

Définition 2.6. — *Si $u \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$, on appelle* adjoint de u, *que l'on note u^*, l'endomorphisme tel que, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$,*

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

L'adjoint existe toujours d'après la proposition précédente puisque $b : (x,y) \mapsto \langle x, u(y) \rangle$ est bilinéaire. De plus, $u^{**} = u$.

Si M est la matrice de u dans une base orthonormée, alors

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = {}^t(\mathrm{M} \cdot \mathrm{X}) \cdot \mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X} \cdot {}^t\mathrm{M} \cdot \mathrm{Y}$$

donc la matrice de u^* est ${}^t\mathrm{M}$.

Remarque 2.7. — *Les polynômes caractéristiques de u et u^* sont les mêmes.*

3 Le groupe orthogonal

On suppose que E est un espace euclidien. On dégage des endomorphismes particuliers qui respectent la structure ajoutée. Plus précisément, on dit que $u \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ est une *isométrie* si, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Lemme 3.1. — *Une isométrie d'un espace de dimension finie est inversible. Un endomorphisme u est une isométrie si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.*

L'ensemble des isométries est un groupe pour la composition appelé *groupe orthogonal* et noté O(E).

Démonstration. — La première assertion vient du fait que le produit scalaire est défini positif. Si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors, on a $\langle x, x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$, donc $x = 0$.

Supposons que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x. On utilise la relation (1.1) pour montrer que u est une isométrie. ■

On a les caractérisations suivantes des isométries dont on laisse la démonstration à titre d'exercice.

Théorème 3.2. — *On suppose que* E *est un espace euclidien muni d'une base orthonormée* $\mathcal{B}$*. Soit* u *un endomorphisme de* E*. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- $u \in \mathrm{O(E)}$ *;*
- *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on a* $\|u(x)\| = \|x\|$ *;*
- $u \circ u^* = \mathrm{Id}$ *;*
- $u^* \circ u = \mathrm{Id}$ *;*
- $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot {}^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{I}$ *;*
- ${}^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{I}$ *;*
- *les colonnes de* $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ *forment une base orthonormée ;*
- *les lignes de* $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ *forment une base orthonormée ;*
- u *transforme une base orthonormée en une base orthonormée.*

Corollaire 3.3. — *Si* $u \in \mathrm{O(E)}$*, alors* $\det u = \pm 1$ *et donc le groupe spécial orthogonal* $\mathrm{SO(E)} = \det^{-1}\{1\} \cap \mathrm{O(E)}$ *est distingué d'indice* 2.

Démonstration. — Si on munit E d'une base orthonormée et $u \in \mathrm{O(E)}$ alors l'identité $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y se traduit par ${}^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{I}$. Il s'ensuit que $(\det u)^2 = 1$. ■

Symétries orthogonales. — Une symétrie est un endomorphisme u tel que $u \circ u = \mathrm{Id}$. En particulier, elle est inversible. De plus, u est diagonalisable, ses valeurs propres sont ± 1, et il existe une décomposition de E en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{E}_+ \oplus \mathrm{E}_-$, où E_+ est l'espace propre associé à la valeur propre 1, et E_- à la valeur propre -1.

Proposition 3.4. — *Une symétrie est orthogonale si et seulement si les* E_+ *et* E_- *sont orthogonaux.*

Réciproquement, si F *est un sous-espace de* E*, alors il existe une unique symétrie orthogonale telle que* F *soit exactement l'espace propre associé à la valeur propre* 1*. On la note* s_F*.*

Démonstration. — Si u est orthogonale, alors, pour $x \in \mathrm{E}_+$ et $y \in \mathrm{E}_-$, on a

$$\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = -\langle x, y\rangle$$

donc $\langle x, y\rangle = 0$.

Réciproquement, si ces espaces sont orthogonaux, alors, soient $x, y \in \mathrm{E}$. On écrit

$$\begin{cases} x = x_+ + x_-, & (x_+, x_-) \in \mathrm{E}_+ \times \mathrm{E}_- \\ y = y_+ + y_-, & (y_+, y_-) \in \mathrm{E}_+ \times \mathrm{E}_- \end{cases}$$

Il vient

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x_+, y_+\rangle + \langle x_-, y_-\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

Soit F un sous-espace de E. On note $\mathrm{H} = \mathrm{F}^\perp$. On a donc $\mathrm{E} = \mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{H}$, et on peut définir $u = s_\mathrm{F} \in \mathrm{O(E)}$ par $u|_\mathrm{F} = \mathrm{Id}$ et $u|_\mathrm{H} = -\mathrm{Id}$. ■

Remarque. — La conjugaison d'une symétrie orthogonale par une isométrie est encore une symétrie orthogonale.

Définition 3.5. — *Lorsque* $\dim \mathrm{E}_- = 1$*, on dit que* u *est une* réflexion*, et quand* $\dim \mathrm{E}_- = 2$*, on parle de* renversement*. En dimension trois, si* $\dim \mathrm{E}_+ = 1$*, on parle de demi-tour par rapport à* x*, si* x *est un vecteur directeur de* E_+*.*

Projections orthogonales. — On rappelle qu'une projection est une application linéaire $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $p \circ p = p$. Dans ce cas, on a $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ et $(1-p)$ est aussi une projection telle que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(1-p)$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(1-p)$. On dit que p est orthogonale si $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$. Attention, p **n'est pas une isométrie** puisque son noyau n'est en général pas trivial.

Quel que soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, il existe une projection orthogonale p_F sur F. On considère la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ et si $x \in \mathrm{E}$ et qu'on écrit $x = x_\mathrm{F} + x_{\mathrm{F}^\perp}$ avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{F}^\perp} \in \mathrm{F}^\perp$, alors on pose $p_\mathrm{F}(x) = x_\mathrm{F}$.

Remarquons enfin que $\mathrm{Id} - 2p_\mathrm{F} = s_{\mathrm{F}^\perp}$.

Similitudes. — Il s'agit d'endomorphismes u tels qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\langle u(x), u(y)\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$. On remarque que l'on a $\lambda \geq 0$ car $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$. Les similitudes forment un groupe GO(E).

Matriciellement, on obtient l'identité suivante :

$$^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \lambda \cdot \mathrm{I}_n\,.$$

Du coup, $\det^2 u = \lambda^n$ et $u \in \mathrm{GL(E)}$ si $\lambda \neq 0$.

On a la caractérisation suivante des similitudes.

Proposition 3.6. — *Soit* E *un espace euclidien. Soit* $u \in \mathrm{GL(E)}$*. Alors,* u *est une similitude si et seulement si* u *préserve l'orthogonalité, soit*

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E},\ x \perp y \iff u(x) \perp u(y)\,.$$

Démonstration. — Il est aisé de vérifier qu'une similitude préserve l'orthogonalité. Inversement, on considère une base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ de E. On considère $\varepsilon_i = u(\mathrm{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, qui forment une base orthogonale par hypothèse.

Comme ces vecteurs sont non nuls, il existe $\lambda_i > 0$ tel que $\|\varepsilon_i\| = \sqrt{\lambda_i}\|\mathrm{e}_i\| = \sqrt{\lambda_i}$. Il suffit de montrer que λ_i est indépendant de i pour conclure que u est une similitude. On se donne deux indices $i \neq j$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, il vient

$$\langle \mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j\rangle = \|\mathrm{e}_i\|^2 - \|\mathrm{e}_j\|^2 = 0$$

donc ces vecteurs sont orthogonaux. Du coup, $u(\mathrm{e}_i + \mathrm{e}_j) = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ et $u(\mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j) = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ sont aussi orthogonaux et on en déduit avec aussi l'orthogonalité $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$

$$0 = \langle \varepsilon_i + \varepsilon_j, \varepsilon_i - \varepsilon_j\rangle = \|\varepsilon_i\|^2 - \|\varepsilon_j\|^2 = \lambda_i - \lambda_j\,.$$

Ceci montre bien que $\lambda_i = \lambda$ est indépendant de i. Par conséquent, on a $\langle u(\mathrm{e}_i), u(\mathrm{e}_j)\rangle = \lambda\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j\rangle$. Or $(x, y) \mapsto \langle u(x), u(y)\rangle$ définit une forme bilinéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\lambda \mathrm{I}_n$, montrant ainsi que $^t\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \cdot \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ et que u est une similitude. ■

4 Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Définition 4.1. — *Un endormorphisme* $u \in \mathrm{End(E)}$ *est* auto-adjoint *si* $u = u^*$*.*

Dans une base orthonormée, la matrice de u est alors symétrique, et l'application

$$x \mapsto \langle u(x), x\rangle$$

détermine une forme quadratique.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 4.2. — *Pour tout endomorphisme auto-adjoint u d'un espace euclidien, il existe une base orthonormée de* E *qui diagonalise u.*

Lemme 4.3. — *Soit u auto-adjoint.*

1. *Si* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *est un espace vectoriel tel que* $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, *alors* $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$.
2. *Il existe une valeur propre réelle λ de u.*

DÉMONSTRATION. —

1. Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ un espace vectoriel tel que $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Pour tout $x \in \mathrm{F}^{\perp}$ et tout $y \in \mathrm{F}$, on a
$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0\,.$$
Donc $u(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$.
2. On se fixe une base orthonormée de E et on note A la matrice de u dans cette base. Supposons que toutes les valeurs propres sont complexes. Si λ est l'une d'elles, alors $\bar{\lambda}$ aussi. Soit X un vecteur propre (complexe) de λ. On a
$$\mathrm{A} \cdot \bar{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{AX}} = \overline{\lambda \mathrm{X}} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\mathrm{X}}$$
donc $\bar{\mathrm{X}}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$. Or, d'une part ${}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} \cdot \bar{\mathrm{X}} = \bar{\lambda} \cdot {}^t\mathrm{X} \cdot \bar{\mathrm{X}}$, et d'autre part, ${}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} \cdot \bar{\mathrm{X}} = {}^t(\mathrm{A} \cdot \mathrm{X}) \cdot \bar{\mathrm{X}} = \lambda \cdot {}^t\mathrm{X} \cdot \bar{\mathrm{X}}$, donc $\lambda = \bar{\lambda}$.

■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2.— On procède par récurrence sur la dimension de E. Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire. Supposons que ce soit vrai pour tout espace de dimension n, et que E est de dimension $n+1$. D'après le lemme précédent, il existe une valeur propre réelle λ, et un vecteur propre unitaire e_{n+1}. On note $\mathrm{F} = \mathbb{R}\mathrm{e}_{n+1}$. Cet espace est stable par u donc $\mathrm{F}^{\perp}$ aussi, qui est un supplémentaire de F. L'hypothèse de récurrence s'applique à $u|_{\mathrm{F}^{\perp}}$. Cette base se complète en une base orthonormée de vecteurs propres de E avec e_{n+1}, et la matrice de u dans cette base est diagonale. ■

5 Endomorphismes normaux

Définition 5.1. — *Un endomorphisme est normal s'il commute avec son adjoint.*

Les exemples proviennent, dans une base orthonormée, des matrices symétriques, antisymétriques et orthogonales. En petite dimension, il est facile de les caractériser.

Proposition 5.2. — *Si u est un endomorphisme normal d'un plan euclidien sans valeurs propres réelles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ tels que $u = \lambda \cdot \mathrm{R}_\theta$ où R_θ désigne la rotation d'angle θ. Sinon, u est diagonalisable en base orthonormée.*

DÉMONSTRATION. — On écrit u dans une base orthonormée :
$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
On traduit sur ses coefficients le fait d'être normal : on obtient le système
$$\begin{cases} (c-b)(c+b) = 0 \\ (a-d)(b-c) = 0 \end{cases}$$

Sachant que u n'a pas de valeurs propres réelles, on sait aussi que $b \neq c$, car alors A serait symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. En particulier, $b, c \neq 0$.

Du coup, $b = -c (\neq 0)$, et donc $a = d$ puisque $b, c \neq 0$. Posons $\lambda^2 = a^2 + b^2 \geq b^2 > 0$. Il existe alors θ tel que $a = \lambda \cos\theta$ et $b = \lambda \sin\theta$. Du coup,
$$\mathrm{Mat}(u) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a/\lambda & -b/\lambda \\ b/\lambda & a/\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Si u a une valeur propre réelle alors A est symétrique d'après ce que l'on a vu, donc u est diagonalisable en base orthonormée. ∎

Proposition 5.3. — *Soit u un endomorphisme normal.*

1. *On a l'égalité* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$.
2. *u et u^* ont mêmes valeurs propres et espaces propres. Ceux-ci sont orthogonaux.*
3. *u fixe au moins une droite ou un plan.*
4. *Si* F *est stable par u, alors* F *est aussi stable par u^*, et* $\mathrm{F}^\perp$ *est stable par u et u^*.*

DÉMONSTRATION. —

1. Si u est normal, alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. En effet,
$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle = \langle x, u(u^*(x))\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2 .$$
Donc $u(x)$ et $u^*(x)$ s'annulent simultanément.

2. provient du fait que $u + \lambda \mathrm{I}$ est normal si u est normal, donc $\operatorname{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(u^* + \lambda \mathrm{Id})$ d'après ci-dessus. Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes, et x, y deux vecteurs propres associés : $u(x) = \lambda x = u^*(x)$ et $u(y) = \mu y = u^*(y)$. Il vient
$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle .$$
Du coup $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ et $\langle x, y\rangle = 0$.

3. Si u n'a pas de valeurs propres réelles, alors son polynôme caractéristique χ_u s'écrit
$$\chi_u(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda^2 + a_j\lambda + b_j) .$$
Or, le théorème de Cayley-Hamilton implique que $\chi_u(u) = 0$. Donc il existe un indice j tel que l'endomorphisme $u^2 + a_j u + b_j \mathrm{Id}$ n'est pas injectif. Si $x \in \operatorname{Ker}(u^2 + a_j u + b_j \mathrm{Id})$, alors $u^2(x) = (-b_j)x + (-a_j)u(x)$. Comme u n'a pas de valeur propre réelle, $(x, u(x))$ engendre un plan. Il est stable puisque $u^2(x)$ est une combinaison linéaire de x et de $u(x)$.

4. On considère une base orthonormée de E telle que les premiers $p = \dim \mathrm{F}$ vecteurs forment une base de F et les derniers une base de $\mathrm{F}^\perp$. Dire que F est stable par u signifie qu'il existe des matrices $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ telles que la matrice de u s'écrive
$$\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$
Dire que u est normal signifie que $\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot {}^t\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$. Or, un simple calcul montre que $\operatorname{tr}(\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A}) = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A})$, donc $\operatorname{tr}(\mathrm{B} \cdot {}^t\mathrm{B}) = 0$. Mais, si $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n-p}$, alors
$$\operatorname{tr}(\mathrm{B} \cdot {}^t\mathrm{B}) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n-p} b_{jk}b_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n-p} b_{jk}^2 .$$
Donc $b_{jk} = 0$ pour tout j, k et $\mathrm{B} = 0$. Du coup,
$$\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$
avec A et C normaux. Ceci montre que F et $\mathrm{F}^\perp$ sont stables par u et u^*.

∎

Théorème 5.4. — *Soit u un endomorphisme normal. Il existe $\alpha_1, \dots \alpha_p$, $\rho_1, \dots, \rho_q$ et $\theta_1, \dots, \theta_q$ et une base orthonormée dans laquelle*

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \rho_1 \cdot \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \rho_q \cdot \mathrm{R}_{\theta_q} \end{pmatrix}$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension. Les cas de la dimension 1 et 2 sont faits. On suppose que le théorème est vrai jusqu'à la dimension n et on suppose que E est de dimension $n+1$. D'après le lemme, u fixe une droite ou un plan F. Dans cet espace, on sait trouver une base orthonormée qui donnera la forme voulue pour $u|_{\mathrm{F}}$. Ensuite, on sait, toujours par le lemme, que u et u^* préservent $\mathrm{F}^\perp$, donc $u|_{\mathrm{F}^\perp}$ est aussi normal. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence. ■

Application aux endomorphismes antisymétriques. — On dit que u est antisymétrique si $u^* = -u$. Il s'ensuit que u ne peut avoir de valeurs propres réelles, donc le théorème nous fournit une matrice $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(2n)$, des nombres $\rho_1, \dots, \rho_n$ et $\theta_1, \dots, \theta_n$ tels que

$$\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{O}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \cdot \mathrm{R}_{\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \cdot \mathrm{R}_{\theta_n} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{O}$$

Comme u est antisymétrique et $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(2n)$, cette matrice doit aussi être antisymétrique. Autrement dit, $\theta_j = \pm\pi/2$ pour tout indice j, et, quitte à réordonner les paires convenablement, on obtient

$$\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{O}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1 \mathrm{J} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \mathrm{J} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{O}$$

où

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, en renumérotant les vecteurs dans la base donnée par O,

$$\mathrm{Mat}(u) = \mathrm{O}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & -\mathrm{I} \\ & \ddots & \\ \mathrm{I} & & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{O}$$

Application aux isométries. — On applique la réduction des endomorphismes normaux aux isométries.

Théorème 5.5. — *Soit u un endomorphisme orthogonal de* E. *Il existe une base orthonormée telle que*

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & 0 \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \mathrm{R}_{\theta_m} \end{pmatrix}$$

Si $u \in \mathrm{SO(E)}$, alors q est paire.

6 Le groupe orthogonal en dimension deux et trois

On décrit plus précisément les isométries de l'espace euclidiens en petite dimension.

Cas de la dimension 2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien de dimension 2. Si $u \in \mathrm{SO(E)}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{R}_\theta$. Si $u \in \mathrm{O(E)} \setminus \mathrm{SO(E)}$, alors il existe une base appropriée telle que

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effet, si $u \in \mathrm{SO(E)}$, alors la Proposition 5.2 implique que, ou bien la matrice est symétrique et diagonalisable, donc $u = \mathrm{Id}$, ou bien $u = \lambda \mathrm{R}_\theta$, avec $\lambda^2 = 1$. On peut alors choisir $\lambda = 1$, quitte à changer θ en $\theta + \pi$. Sinon, on a $\det u = -1$, ce qui implique par la Proposition 5.2 que u est diagonalisable, avec valeurs propres ± 1.

Proposition 6.1. — $\mathrm{SO}(2)$ *est commutatif et* $\mathrm{SO}(2)$ *est isomorphe à* $\mathrm{U}(1)$.

Démonstration. — On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$ par $\varphi(\theta) = \mathrm{R}_\theta$. On a $\operatorname{Ker} \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\mathrm{SO}(2) \approx \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{U}(1) = \{u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}),\ \|u(z)\| = \|z\|\}.$$

Du coup, il existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ telle que $u(z) = \lambda z$. ∎

Pour tout $u \in \mathrm{SO}(2)$, il existe donc une matrice M telle que, quelle que soit la base orthonormée orientée considérée, la matrice de u est M.

Cas de la dimension 3. Pour tout $u \in \mathrm{SO}(3)$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que la matrice de u soit l'une des possibilités suivantes :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathrm{I}_3\,,$$

ou

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_\theta \end{pmatrix};$$

on a $\operatorname{tr} u = 1 + 2\cos\theta$, donc θ est déterminé par u ; on dit que u est une rotation d'axe e_1 ;

si $u \in \mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3)$, alors ou bien

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

on parle alors de réflexion par rapport à $\langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle$;

ou bien

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{R}_\theta \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.2. — $\mathrm{O(E)}$ *est engendré par des réflexions. Plus précisément, si* $u \in \mathrm{O(E)}$, *alors* u *est produit d'au plus* $\dim \mathrm{E} - \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - u)$ *réflexions.*

Démonstration. — On constate tout d'abord que le produit de 2 réflexions dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à des droites e_1 et e_2 est une rotation d'angle 2 fois l'angle entre e_1 et e_2. Donc, si on écrit la forme réduite de u, chaque bloc R_θ compte pour deux réflexions, alors que chaque (-1) compte pour une seule. ∎

Exercice. — Montrer que $\mathrm{SO(E)}$ est engendré par des renversements.

A Dualité

Soit E un espace vectoriel sur une corps $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$. On note $\mathrm{E}^* = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéares de E. Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ aussi.

Pour chaque $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique n-uplet $(\mathrm{e}_1^*(x), \dots, \mathrm{e}_n^*(x))$ tel que $x = \sum \mathrm{e}_j^*(x)\mathrm{e}_j$ puisque $\mathcal{B}$ est une base de E. Par conséquent, si on prend un autre vecteur $y \in \mathrm{E}$ et un scalaire λ, on a $x + \lambda y = \sum(\mathrm{e}_j^*(x) + \lambda(\mathrm{e}_j^*(y))\mathrm{e}_j$ et par unicité des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{e}_j^*(x + \lambda y) = \mathrm{e}_j^*(x) + \lambda \mathrm{e}_j^*(y)$ et $\mathrm{e}_j^* \in \mathrm{E}^*$.

On remarque que $\mathrm{e}_j^*(\mathrm{e}_k) = 0$ si $j \neq k$ et $\mathrm{e}_j^*(\mathrm{e}_k) = 1$ si $j = k$. Ceci implique que $\mathcal{B}^* = (\mathrm{e}_j^*)_j$ est une famille libre: en effet, si $\sum \lambda_j \mathrm{e}_j^* = 0$ alors en testant sur chaque vecteur e_k, on obtient $\lambda_k = 0$. De plus, si $\mathrm{L} \in \mathrm{E}^*$, alors, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{L}(x) = \sum_j \mathrm{L}(\mathrm{e}_j)\mathrm{e}_j^*(x)$$

ce qui montre que $\mathcal{B}^*$ est aussi une famille génératrice de E^*: c'est donc une base de E^* et on l'appelle *la base duale de* $\mathcal{B}$.

On obtient ainsi: $\dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E}$.

Proposition A.1. — *Le bidual* $(\mathrm{E}^*)^* = \mathrm{E}^{**}$ *de* E *est canoniquement isomorphe à* E *par l'application*

$$ev : x \in \mathrm{E} \mapsto ev_x : (\mathrm{L} \in \mathrm{E}^* \mapsto \mathrm{L}(x))\,.$$

Démonstration. — On vérifie que $\mathrm{ev} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^{**}$ est bien linéaire et injective: pour tout $\mathrm{L} \in \mathrm{E}^*$, on a

$$\mathrm{ev}(x + \lambda y)(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(x + \lambda y) = \mathrm{L}(x) + \lambda \mathrm{L}(y) = \mathrm{ev}(x)(\mathrm{L}) + \lambda \mathrm{ev}(y)(\mathrm{L})\,.$$

Si $\mathrm{ev}(x) = 0$ alors on trouve $\mathrm{e}_j^*(x) = 0$ pour tout j, donc ev est injective. Comme $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}^* = \dim \mathrm{E}^{**}$, on en déduit que c'est un isomorphisme. ■

On remarque que $\mathcal{B}$ est aussi la base duale de $\mathcal{B}^*$.

Orthogonalité. — Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est un sous-espace vectoriel, on pose

$$\mathrm{F}^\circ = \{\mathrm{L} \in \mathrm{E}^*,\ \mathrm{L}(x) = 0\ \forall x \in \mathrm{F}\}\,.$$

C'est un sous-espace vectoriel: si $\mathrm{L}, \mathrm{L}' \in \mathrm{F}^\circ$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, pour tout $x \in \mathrm{F}$, on aura $(\mathrm{L} + \lambda \mathrm{L}')(x) = \mathrm{L}(x) + \lambda \mathrm{L}'(x) = 0$.

Proposition A.2. — *On a* $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^\circ = \dim \mathrm{E}$.

Démonstration. — En effet, si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est une base de F, que l'on complète en une base de E, on trouve

$$\mathrm{F}^\circ = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_{k+1}^*, \dots, \varepsilon_n^*\}\,.$$

■

De même, on peut définir pour un sous-espace G de E^*, l'orthogonal

$$\mathrm{G}^\circ = \{x \in \mathrm{E},\ \mathrm{L}(x) = 0\ \forall \mathrm{L} \in \mathrm{G}\}\,.$$

Par la proposition précédente, on aussi $\dim \mathrm{G} + \dim \mathrm{G}^\circ = \dim \mathrm{E}$.