Eléments d'algèbre linéaire

Peter Haïssinsky, Université de Paul Sabatier

2014–2015

Introduction

Dans ce chapitre, on présente quelques notions abstraites d'algèbre linéaire qui sont interprétées ensuite en se ramenant à du calcul matriciel. L'objectif est de donner suffisamment de recul pour donner du sens aux calculs.

1 Généralités

On commence par définir les objets principaux de la théorie: espace vectoriel, bases, applications linéaires.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, qui le plus souvent sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont les éléments seront appelés *scalaires*, et soit E un ensemble, dont les éléments seront appelés *vecteurs*. On suppose E muni d'une loi interne d'additition notée $+$, et d'une loi *externe* de multiplication des vecteurs par un scalaire : $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E} \mapsto \lambda v \in \mathrm{E}$.

Définition 1.1. — *Un ensemble* E *muni de deux lois comme ci-dessus est un* espace vectoriel *si les lois vérifient les axiomes suivants :*

1. $(\mathrm{E}, +)$ *est un groupe abélien. Son élément neutre, noté* 0*, est appelé* vecteur nul.
2. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tous* $u, v \in \mathrm{E}$.
3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et tout* $v \in \mathrm{E}$.
4. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) = \lambda\mu v$ *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et tout* $v \in \mathrm{E}$.
5. $1v = v$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$.

On dit aussi que E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, ou un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*, s'il faut préciser le corps (dit* corps de base*).*

Il découle des définitions que $0v = 0$: en effet, on a $v = (0 + 1).v = 0.v + 1.v = 0.v + v$, donc $0.v = 0$.

Les exemples sont nombreux et variés : $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de même que l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Les espaces de matrices, de suites à valeurs scalaires ou vectorielles, de fonctions d'onde etc. sont d'autres exemples importants où la structure d'espace vectoriel intervient de manière centrale. De manière générale, l'ensemble des applications $f : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ où X est un ensemble quelconque et E un est $\mathbb{K}$-espace vectoriel est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où la loi de composition interne $(f + g)$ est définie par l'application $x \mapsto f(x) + g(x)$ et la loi externe λf est donnée par $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$.

Combinaisons linéaires. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une combinaison linéaire est une expression de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

où les λ_i sont des scalaires et les v_i des vecteurs. Si $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de vecteurs de E (indexée par un ensemble quelconque I), on appelle *combinaison linéaire d'éléments de* $\mathcal{F}$ toute somme *finie* de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

où $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{F}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Si $n = 0$, on pose la somme égale à 0. Insistons encore une fois sur le fait que la somme doit être *finie.* On dit que deux vecteurs u et v sont *colinéaires* s'il existe deux scalaires $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que $\mu u = \lambda v$, en d'autre termes, les deux flèches pointent dans des directions égales ou opposées. On dit aussi que v est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ si v s'écrit

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Sous-espaces vectoriels. Comme pour n'importe quelle structure algébrique, nous avons une notion de sous-espace : une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel de* E (ou sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il faut préciser le corps de base) si F hérite d'une structure d'espace vectoriel de celle de E. Autrement dit, d'une part F est non vide (on vérifie le plus souvent que $0 \in \mathrm{F}$ pour montrer cela), et d'autre part il est stable par addition et multiplication par des scalaires :

$$\forall x, y \in \mathrm{F},\ x + y \in \mathrm{F}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathrm{F},\ \lambda x \in \mathrm{F}.$$

De manière plus générale, F est un sous-espace vectoriel de E si toute combinaison linéaire d'éléments de F est encore dans F.

On montre que F est un sous-espace vectoriel comme suit :

(i) $\mathrm{F} \neq \varnothing$;

(ii) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathrm{F}^2,\ (x + \lambda y) \in \mathrm{F}$.

Opérations sur les sous-espaces. On vérifie aisément que l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel. En revanche, la réunion d'espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace.

Si F, G sont des sous-espaces, on écrit

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E},\ \exists\,(a, b) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = a + b\}\,.$$

On vérifie que $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est un sous-espace de E, appelé la somme de F et G. On dit que F et G sont en somme directe, et on écrit $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ si $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Dans ce cas, tout vecteur x de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ s'exprime de manière unique sous la forme $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$, avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$.

Applications linéaires. Passons à la notion de morphisme d'espaces vectoriels : les applications linéaires. Soient donc E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On dit que f est linéaire si elle respecte l'addition des vecteurs et leur multiplication par un scalaire :

$$\forall u, v \in \mathrm{E},\ f(u + v) = f(u) + f(v),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathrm{E},\ f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

On montre qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est linéaire comme suit. On considère deux vecteurs quelconques u, v et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et on établit l'égalité $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

On dit que f est un isomorphisme si f est une application linéaire bijective. On peut montrer alors que son inverse est aussi linéaire.

On définit le noyau de f par

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in \mathrm{E},\ f(v) = 0\}$$

et l'image de f par

$$\operatorname{Im} f = f(\mathrm{E})\,.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement. L'application linéaire f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

L'ensemble des applications linéaires entre deux espaces E et F donnés est noté $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$; cet espace a aussi la structure d'un espace vectoriel. On parle d'endomorphisme quand $\mathrm{E} = \mathrm{F}$; dans ce cas, on note plus simplement $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Enfin, les automorphismes de E c'est-à-dire les endomorphismes bijectifs de E sont notés $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$; cet espace a la structure de groupe pour la composition.

Parmis les exemples, notons les homothéties, de la forme $x \mapsto \lambda x$ pour un scalaire λ, ainsi que les projections: si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, alors la projection $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ sur F parallèlement à G est définie comme suit.

On écrit $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$, alors $x \mapsto x_{\mathrm{F}}$ est une application linéaire. On peut vérifier que $p \circ p = p$, $\operatorname{Ker} p = \mathrm{G}$ et $\operatorname{Im} p = \mathrm{F}$. Réciprquement, une application linéaire $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $p \circ p = p$ est la projection de E sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. On a en particulier $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Enfin, le dual E^* de E est l'espace des formes linéaires, c'est-à-dire des applications linéaires $f : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$.

Exercice 1.2. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire. Soit de plus* G *(resp.* H*) un sous-espace vectoriel de* E *(resp.* F*). Montrer que* $f(\mathrm{G})$ *est un sous-espace vectoriel de* F*, de même que* $f^{-1}(\mathrm{H})$ *est un sous-espace de* E*.*

Familles génératrices, libres, liées. Bases. Une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est dite *génératrice* si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. Autrement dit, pour tout vecteur v de E, il *existe* des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des éléments $v_1, \dots, v_n$ de $\mathcal{F}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Cette écriture n'est pas forcément unique.

On montre qu'une famille est génératrice comme suit : soit $x \in \mathrm{E}$, on détermine explicitement des scalaires tels que $x = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i v_i$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{F}$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les éléments de $\mathcal{F}$. Par définition, le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$ est l'intersection de tous les sous-espaces contenant $\mathcal{F}$. Si on le note $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$, on peut le décrire de la manière suivante :

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n,\ n \in \mathbb{N},\ v_i \in \mathcal{F},\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Ainsi, le sous-espace engendré par $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{F}$. En particulier, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$.

La famille $\mathcal{F}$ est dite *libre* si, lorsque qu'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifie

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0,$$

on a nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Cela signifie en fait que si un vecteur $v \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ (*i.e.* si $v \in \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$), alors cette combinaison linéaire est *unique :* si on a deux écritures de v

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda'_1 v'_1 + \dots + \lambda'_{n'} v'_{n'}$$

telles que tous les scalaires impliqués sont non nuls, alors $n = n'$ et, quitte à réordonner les termes de la somme, $v_1 = v'_1, \dots, v_n = v'_n$ et $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$. Une famille qui n'est pas libre est dite *liée.*

En particulier, un vecteur est libre ssi il est non nul, et deux vecteurs sont libres ssi ils ne sont pas proportionnels. On montre qu'une famille est libre comme suit : on considère l'équation

$$\sum_{1 \le i \le n} \lambda_i a_i = 0,$$

où $(\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$ sont des scalaires inconnus. Puis on cherche à montrer que tous les scalaires sont nuls.

Enfin, on dit que $\mathcal{F}$ est une *base* de E si c'est une famille libre *et* génératrice. Connaître une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel permet de travailler «en coordonnées». Cela signifie que pour tout $v \in \mathrm{E}$, il existe un entier $n \ge 0$, des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathcal{F}$ tels que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$$

et cette écriture est unique. Le cas de la dimension finie est particulièrement important. On montre qu'une famille est une base comme suit : soit $v \in \mathrm{E}$, on détermine explicitement des scalaires tels que $v = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i v_i$ et on montre qu'ils sont uniques. Ou alors, on utilise la définition.

Si $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, la *base canonique* $\mathcal{B}_n$ est la famille $(\mathrm{e}_i)_{1 \le i \le n}$ dont les coordonnées du vecteur e_i sont toutes nulles, sauf la $i^{\text{ième}}$ qui vaut 1. On vérife facilement que $\mathcal{B}_n$ est libre et génératrice.

Exercice 1.3. — *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *une famille finie de vecteurs.*

1. *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathcal{F}} : & \mathbb{K}^n & \to & \mathrm{E} \\ & (x_j)_{1 \le j \le n} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j v_j \end{array}$$

est une application linéaire.

2. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est libre si et seulement si* $\varphi_{\mathcal{F}}$ *est injective.*

3. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est une famille génératrice si et seulement si* $\varphi_{\mathcal{F}}$ *est surjective.*

Exercice 1.4. — *Soit* E *l'ensemble des suites de nombres réels :* $\mathrm{E} = \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}},\ \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. *On définit l'addition de deux suites de manière naturelle par* $(\alpha_n) + (\beta_n) = (\alpha_n + \beta_n)$, *et de même la multiplication par un scalaire par* $\lambda(\alpha_n) = (\lambda \alpha_n)$. *Montrer que* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Pour tout entier* $k \geq 0$, *on définit la suite* $(\alpha_n^{(k)})$ *par* $\alpha_n^{(k)} = 0$ *si* $n \neq k$ *et* $\alpha_k^{(k)} = 1$. *Montrer que la famille* $\mathcal{D} = \{(\alpha_n^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}\}$ *est une famille libre mais non génératrice de* E. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ *est isomorphe à* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2 Espaces de dimension finie

Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie. Dans la suite, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Théorème 2.1 (de la base incomplète). — *Soient* E *un espace vectoriel et* $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *une famille génératrice. On suppose que pour un certain* $1 \le k \le n$, $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_k\}$ *est libre. Alors il existe une base* $\mathcal{B}$ *telle que* $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. *Par conséquent,*

(i) toute famille libre peut être complétée afin d'obtenir une base de E*;*

(ii) de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Lemme 2.2 (et définition). — *Toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même cardinal. On note alors* $\dim \mathrm{E} = \mathrm{Card}\{\textit{base}\}$. *En particulier,*

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{Card}\{\textit{famille libre maximale}\} = \mathrm{Card}\{\textit{famille génératrice minimale}\}\,.$$

Si $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\}$ est une base de E, alors l'application

$$\begin{array}{rl} \varphi_{\mathcal{B}} : & \mathbb{K}^n \to \mathrm{E} \\ & (x_j)_{1 \le j \le n} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}_j \end{array}$$

est un isomorphisme. Cela nous permet d'identifer E à $\mathbb{K}^n$.

On appelle alors le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées ou composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. On identifie alors x *(en se souvenant de la base...)* avec le vecteur colonne

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n\,.$$

Dimension et sous-espaces. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(i) On a $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$.

(ii) Si $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$ alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Si $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, on en extrait une base $\mathcal{L}$ comme suit: on regarde le premier indice j tel que v_j est non nul et on le met dans $\mathcal{L}$; ensuite, par récurrence, on rajoute le premier vecteur v_j d'indice plus grand de sorte que $\mathcal{L} \cup \{v_j\}$ est libre, et on continue ainsi jusqu'à épuiser la famille génératrice.

Somme de sous-espaces vectoriels. Soient S, T deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(\mathrm{S}+\mathrm{T}) = \dim \mathrm{S} + \dim \mathrm{T} - \dim(\mathrm{S} \cap \mathrm{T})\,.$$

En particulier, les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathrm{S}+\mathrm{T} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{T}$,

(ii) $\dim(\mathrm{S}+\mathrm{T}) = \dim \mathrm{S} + \dim \mathrm{T}$,

(iii) $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \{0\}$,

(iv) la réunion d'une base de S et de T forme une famille libre de E.

Si S est un sous-espace de E, on dit que T est un sous-espace supplémentaire à S si $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{T}$. Notons qu'il existe une infinité de supplémentaires pour un sous-espace propre et non trivial de E.

2.1 Applications linéaires

Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire entre espaces vectoriels.

1. L'application u est complètement déterminée par les valeurs prises sur une base $\mathcal{E} = \{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$. En effet, tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit de manière unique $x = \sum x_i \mathrm{e}_i$ donc

$$u(x) = u\left(\sum_{j=}^{n} x_j \mathrm{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\mathrm{e}_j)\,.$$

Soient $\mathcal{E} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ une base de F. La matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(\mathrm{e}_1) & u(\mathrm{e}_2) & \ldots & u(\mathrm{e}_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & a_{i,j} & \ldots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{array} \end{array}$$

où $(a_{i,j})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n}$ sont les scalaires tels que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $u(\mathrm{e}_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{i,j} f_i$. On tire l'expression

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) f_i\ .$$

En écrivant le tout sous forme d'un produit de matrices, on obtient

$$u(\mathrm{X}) = \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ ,$$

Cette écriture *définit* le produit d'une matrice rectangulaire par une colonne. Réciproquement, toute matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ de taille $k \times n$ s'interprète comme une application linéaire $u_{\mathrm{A}} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ en posant

$$u_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} x_j f_i\ .$$

Si $p, n \geq 1$, on notera $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices carrées de taille n. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on associe $u_\mathrm{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ en posant $u_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}$. On vérifie que $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p)}(u_\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et on définit le *rang* de la matrice A par $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \dim \mathrm{Im}\, u_\mathrm{A}$.

2. Si $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ \ldots\ , \mathrm{e}_n)$ est une base de E, alors $(u(\mathrm{e}_1), u(\mathrm{e}_2), \ \ldots\ , u(\mathrm{e}_n))$ engendre $\mathrm{Im}\, u$.

3. On a $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u$. Il suffit de considérer une base $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_p)$ de $\mathrm{Ker}\, u$ et de la compléter en une base $(\mathrm{e}_1, \ldots, , \mathrm{e}_n)$ de E. Dans ce cas, $(u(\mathrm{e}_{p+1}), \ldots, u(\mathrm{e}_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E et F sont de même dimension (finie); les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) u bijectif.

(ii) u injectif.

(iii) $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

(iv) $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{E}$.

(v) u surjectif.

5. Le dual E^* de E est un espace vectoriel de même dimension que E lorsque E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base de E, alors tout vecteur x s'écrit

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}_j \,.$$

On vérifie que $\mathrm{e}_j^* : x \in \mathrm{E} \mapsto x_j$ définit une forme linéaire, appelée fonction coordonnée. La famille de formes $\mathcal{B}^* = (\mathrm{e}_1^*, \ldots, \mathrm{e}_n^*)$ définit *la base duale* de $\mathcal{B}$, qui est bien une base de E^*. Si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application linéaire, on définit ${}^t u : \mathrm{F}^* \to \mathrm{E}^*$ en posant ${}^t u(f) = f \circ u$.

Opérations matricielles. Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times k$. On les interprète comme des endomorphismes $u_\mathrm{A}, u_\mathrm{B} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$ muni des bases canoniques $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}_n$. Prenons un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose alors

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \lambda \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_k,\mathcal{B}_n)}(u_\mathrm{A} + \lambda u_\mathrm{B})\,.$$

En écrivant $\mathrm{C} = (c_{i,j})$, on trouve

$$c_{i,j} = a_{i,j} + \lambda b_{i,j}\,.$$

De même, si A est de taille $k \times n$ et B de taille $n \times p$, on définit le produit

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_k)}(u_\mathrm{A} \circ u_\mathrm{B})\,.$$

En posant $\mathrm{C} = (c_{i,j})$, on trouve

$$c_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \times b_{\ell,j}\,.$$

On dit que A est inversible si u_A est un isomorphisme. On note $\mathrm{A}^{-1} \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ la matrice de u_A^{-1}. On a $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_k$ où I_n est la matrice de l'identité sur $\mathbb{K}^n$; autrement dit les seuls termes non nuls sont sur la diagonale et sont égaux à 1. On a aussi $\mathrm{AI}_k = \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ est de taille $n \times k$, alors on définit

$${}^t\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*)}\ {}^t u_\mathrm{A}\,.$$

On a alors ${}^t\mathrm{A} = (a_{j,i})_{1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n}$.

2.2 Déterminants

Une forme n-linéaire est une application $f : \mathrm{E}^n \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, si $v_i \in \mathrm{E}$ est fixé pour chaque $i \neq j$, l'application

$$v \mapsto f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$

est linéaire.

On dit que f est alternée si $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ dès que deux vecteurs sont égaux $v_i = v_j$, $i \neq j$. Dans ce cas, si on échange la position de deux vecteurs v_i et v_j, $i \neq j$, alors on change de signe:

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)\,.$$

De plus, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée, alors $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Soit f une forme n-linéaire alternée sur un espace E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$. Alors f est complètement déterminée par $f(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$. En effet, la linéarité de f par rapport à chaque variable permet de décomposer f en une expression ne faisant intervenir que la décomposition de chaque v_j en fonction de $\mathcal{B}$ et $f(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$. Plus précisément, si $v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\mathrm{e}_i$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}\mathrm{e}_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}\mathrm{e}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,1} f\left(\mathrm{e}_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}\mathrm{e}_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}\mathrm{e}_i\right) \\ &= \ldots \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{s}_n} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} f(\mathrm{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathrm{e}_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

où $\mathfrak{s}_n$ sésigne le groupe des permutations des ensembles à n éléments et où on a utlilisé la linéarité et la propriété alternée de f. Enfin, notons que $f(\mathrm{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathrm{e}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$, où $\varepsilon : \mathfrak{s}_n \to \{-1, 1\}$ est la signature, donc

$$f(v_1, \ldots, v_n) = f(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{s}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\,.$$

De cette formule compliquée, il faut retenir que l'on fait une combinaison linéaire de termes formés de produits dont les facteurs sont choisis en en prenant qu'un par ligne et par colonne.

Définition 2.3 (déterminant). — *Soit* E *un espace vectoriel muni d'une base* $\mathcal{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$. *Le* determinant $\det_{\mathcal{B}}$ *relatif à* $\mathcal{B}$ *est l'unique forme n-linéaire alternée telle que* $\det_{\mathcal{B}}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n) = 1$.

Par conséquent, le déterminant d'une famille de vecteurs est nul si et seulement si la famille est liée. Du coup, une famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base si et seulement si son déterminant est non nul.

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on définit $\det_{\mathcal{B}}(f)$ par $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathrm{e}_1), \ldots, f(\mathrm{e}_n))$.

Dans $\mathbb{K}^n$, le déterminant est défini relativement à la base canonique, qui n'est donc pas précisé dans la notation. L'usage est de condenser les n vecteurs colonnes formant l'argument du déterminant en une matrice carrée. On a les propriétés suivantes:

1. On a $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \times \det \mathrm{B}$, donc si A est inversible alors $\det(\mathrm{A}^{-1}) = (\det \mathrm{A})^{-1}$.

2. On a $\det \mathrm{A} = \det {}^t\mathrm{A}$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det \mathrm{A}$.

4. Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure ($a_{i,j} = 0$ si $i < j$) ou inférieure ($a_{i,j} = 0$ si $i > j$) alors $\det \mathrm{A} = \prod_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}$.

5. Si A est une matrice par blocs triangulaire

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

avec B, D des matrices carrées, alors $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{B} \times \det \mathrm{D}$.

3 Cas particulier : $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, comme $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

La base canonique est la famille $(\mathrm{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ dont les coordonnées du vecteur e_i sont toutes nulles, sauf la $i^{\text{ième}}$ qui vaut 1.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$, il existe des scalaires $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n}$ tels que $v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\mathrm{e}_i$. Autrement dit,

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On peut aussi former la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des scalaires, on associe le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}\lambda_1 + \ldots a_{1,p}\lambda_p & = & x_1 \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{i,1}\lambda_1 + \ldots a_{i,p}\lambda_p & = & x_i \\ \ldots & = & \ldots \\ a_{n,1}\lambda_1 + \ldots a_{n,p}\lambda_p & = & x_n \end{array}\right.$$

qui exprime l'égalité matricielle

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre en montrant que le système avec second membre $x_i = 0$ pour tout i a une unique solution $\lambda_j = 0$ pour tout j.

On montre que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice en montrant que le système admet au moins une solution pour tout choix de $x_1, \ldots, x_n$.

On montre que la famille $\mathcal{F}$ est une base en montrant que le système admet exactement une unique solution pour tout choix de $x_1, \ldots, x_n$. Dans ce cas, on doit avoir $p = n$.

Connaissant une famille génératrice $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ d'un espace vectoriel, on en extrait une base en mettant le système sous forme triangulaire avec second membre 0. Si on connaît la dimension de l'espace, on cherche autant de vecteurs libres.

Connaissant une famille génératrice $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ d'un sous-espace vectoriel (ou une base), on montre qu'un vecteur x est dans cet espace en résolvant le système avec second membre les coordonnées de x et en montrant l'existence d'une solution.

Si S et T sont deux sous-espaces vectoriels de E dont on connaît des bases, on calcule la dimension de $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}$ en résolvant le système donné par le fait qu'un vecteur de cet espace s'écrit sous deux formes. Le nombre de paramètres à la fin de la résolution donne la dimension.

Soient $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ et A la matrice de u dans les bases canoniques.

On montre que l'application u est injective en montrant que $\dim \operatorname{Ker} u = 0$. Ou alors, on calcule son noyau : on résout le système induit par $\mathrm{AX} = 0$. Pour trouver une base du noyau, on résout le même système, et on se donne $\dim \operatorname{Ker} u$ vecteurs indépendants et solutions.

On montre que l'application est surjective en montrant que $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{F}$. Ou alors, on résout le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, où X est l'inconnue et Y quelconque dans $\mathbb{K}^p$.

Si $n = p$ et u est un isomorphisme, on obtient la matrice de u^{-1} en résolvant le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ comme ci-dessus de sorte que l'on trouvera $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$. Par ailleurs, si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on calcule l'inverse de A en résolvant $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$.

4 Changements de bases

Soient $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{\mathrm{e}'_1, \ldots, \mathrm{e}'_n\}$ deux bases de E.

Définition 4.1. — *On appelle* matrice de passage *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice dont les coefficients sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Ainsi, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on lit dans les colonnes de P les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$: pour tout j, on a $\mathrm{e}'_j = a_{1j}\mathrm{e}_1 + \cdots + a_{nj}\mathrm{e}_n$,

$$\mathrm{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \mathrm{e}'_1 & \dots & \mathrm{e}'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{e}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}_n \end{array} \end{array} .$$

On constate alors que P n'est autre que la matrice de l'application identité exprimée dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, *i.e.*:

$$\boxed{\text{matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}' \ = \ \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \mathcal{B}', \mathcal{B})} .$$

On en déduit que P est inversible.

Regardons comment nous pouvons utiliser cette matrice pour étudier l'effet d'un changement de bases sur les vecteurs colonnes. Notons X (resp. X′) le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (resp. la base $\mathcal{B}'$) :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} .$$

Par définition, on a les relations

$$\mathrm{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{e}_i, \ 1 \leq j \leq n, \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \mathrm{e}'_j ,$$

d'où l'on déduit que

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j \mathrm{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{e}_i \right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x'_j \mathrm{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j \right) \mathrm{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i ,$$

ce qui, en identifiant les coordonnées sur $\mathcal{B}$, donne en écriture matricielle :

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'} .$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.2. — *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel* E, *et* X, X′ *les vecteurs colonnes associés à x dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ respectivement. Soit* P *la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors les vecteurs colonnes vérifient*

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$$

et donc la matrice exprimant la nouvelle base $\mathcal{B}'$ en fonction de l'ancienne $\mathcal{B}$ permet d'exprimer les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle.

Pour exprimer X′ en fonction de X, ce qui est en général ce que l'on recherche, il nous faut donc *inverser* P. En effet, on a

$$\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} .$$

Toute la construction précédente admet en quelque sorte une réciproque. Soient en effet E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \dots \mathrm{e}_n\}$ une base de E. Soit $\mathrm{P} = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n inversible, et f l'endomorphisme qui admet P pour matrice dans la base $\mathcal{B}$, *i.e.* $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Alors f est en fait un automorphisme (un endomorphisme inversible) et donc le système de vecteurs $\mathcal{B}' = \{f(\mathrm{e}_1), \ldots, f(\mathrm{e}_n)\}$ forme une base de E. En écrivant

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} f(\mathrm{e}_1) & \ldots & f(\mathrm{e}_n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{e}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}_n \end{array}
\end{array} ,$$

on s'aperçoit que P n'est autre que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Il est d'ailleurs clair que $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 4.3. — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors toute matrice inversible* P *d'ordre n est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}_\mathrm{P}$ de* E, *et toute base $\mathcal{B}'$ de* E *s'exprime à l'aide d'une matrice inversible d'ordre n.*

On a donc une correspondance bi-univoque entre l'ensemble des bases de E *et les matrices inversibles d'ordre n.*

4.1 Applications linéaires et changements de bases

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{B} = \{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}, \mathcal{B}' = \{\mathrm{e}'_1, \ldots, \mathrm{e}'_n\}$ deux bases de E, et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}, \mathcal{C}' = \{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p\}$ deux bases de F. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et enfin B la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Considérons $x \in \mathrm{E}$. Soient X et X′ ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Soient Y et Y′ les coordonnées de $y = f(x)$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement. On a alors les relations :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}',\ \mathrm{Y} = \mathrm{QY}',\ \mathrm{Y} = \mathrm{AX},\ \mathrm{Y}' = \mathrm{BX}' .$$

On en déduit immédiatement, comme Q est inversible, que $\mathrm{Y}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{APX}'$, d'où la relation **fondamentale** :

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}} \tag{4.1}$$

En explicitant un peu plus cette formule, elle devient encore plus claire :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = \mathrm{passage}(\mathcal{C}' \to \mathcal{C})\,\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\mathrm{passage}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') .$$

La relation (4.1) suggère la définition suivante :

Définition 4.4. — *On dit que deux matrices* A *et* B *de type $p \times n$ sont* équivalentes *s'il existe une matrice carrée inversible* Q *d'ordre p et une matrice carrée inversible* P *d'ordre n telles que*

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP} .$$

Le théorème suivant fournit un lien important entre applications linéaires et classes d'équivalence de matrices.

Théorème 4.5. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie n et p respectivement et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire.*

L'ensemble $\mathcal{A}_f$ de toutes les matrices de f obtenues en faisant varier les bases de E *et de* F *est une classe d'équivalence des matrices de type $p \times n$.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}_f$ et montrons qu'elles sont équivalentes. Par définition de $\mathcal{A}_f$, il existe des bases $\mathcal{B}_\mathrm{A}, \mathcal{B}_\mathrm{B}$ de E ainsi que des bases $\mathcal{C}_\mathrm{A}, \mathcal{C}_\mathrm{B}$ de F telles que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_\mathrm{A}, \mathcal{C}_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}_\mathrm{B}, \mathcal{C}_\mathrm{B})$. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_\mathrm{A}$ vers $\mathcal{B}_\mathrm{B}$ et Q celle de $\mathcal{C}_\mathrm{A}$ vers $\mathcal{C}_\mathrm{B}$. On a donc d'après la relation fondamentale $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$. Par suite A et B sont équivalentes et $\mathcal{A}_f$ est contenue dans une classe d'équivalence.

Soient maintenant $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_f$ et B une matrice équivalente à A. Nous allons montrer que $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_f$. Soient P et Q des matrices inversibles d'ordre n et p respectivement telles que $\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}$. D'après le

Théorème 4.3, il existe une base $\mathcal{B}$ de E (resp. $\mathcal{C}$ de F) telle que P (resp. Q) soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_A$ vers $\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{C}_A$ vers $\mathcal{C}$). Soient x un vecteur de E et $y = f(x)$. On note $X_A \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_A$, $X \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, $Y_A \in \mathbb{R}^p$ les coordonnées de y dans la base $\mathcal{C}_A$, $Y \in \mathbb{R}^p$ les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$. Par suite, on a $X_A = PX$ et $Y_A = QY$.

Comme A est la matrice de f, on a $Y_A = AX_A$. Donc $QY = APX$ et

$$Y = Q^{-1}APX = BX\,.$$

On en déduit que B est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Du coup, $B \in \mathcal{A}_f$. ∎

Exercice 4.6. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie* n *et* p *respectivement et* $f, g : E \to F$ *deux applications linéaires.*

1. *On suppose qu'il existe deux automorphismes* $h_E : E \to E$ *et* $h_F : F \to F$ *tels que* $g = h_F^{-1} \circ f \circ h_E$. *Montrer que* $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g$.

2. *Réciproquement, on suppose maintenant que* $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_g$. *Montrer qu'il existe deux automorphismes* $h_E : E \to E$ *et* $h_F : F \to F$ *tels que* $g = h_F^{-1} \circ f \circ h_E$.

Théorème 4.7. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie* n *et* p *respectivement. Il existe exactement* $\min\{n,p\}+1$ *classes d'équivalences des matrices de type* $p \times n$. *Plus précisément, pour chaque* $u \in \mathcal{L}(E,F)$, *il existe une base de* E, *une base de* F *et* $0 \le k \le \min\{n,p\}$ *telle que la matrice de* u *dans ces bases soit donnée par la matrice par blocs*

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. — Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de $\operatorname{Ker} u$ que l'on complète en une base de E par des vecteurs $(e'_1, \dots, e'_k)$, $k + q = n$. La famille $(u(e'_1), \dots, u(e'_k))$ est libre. En effet, si $(\lambda_j)_{1\le j\le k}$ sont des scalaires tels que $\sum_{j=1}^k \lambda_j u(e'_j) = 0$ alors $u(\sum_{j=1}^k \lambda_j e'_j) = 0$ donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e'_j \in \operatorname{Ker} u$. Mais l'espace engendré par ces vecteurs est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e'_j = 0$ et tous les scalaires sont nuls. Notons donc $f_j = u(e'_j)$, $j = 1, \dots, k$. Ces vecteurs forment une famille libre de F que l'on peut compléter en une base $\mathcal{F}$ de F. Si on écrit $\mathcal{E} = (e'_1, \dots, e'_k, e_1, \dots, , e_q)$, alors la matrice de u est bien

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le théorème 4.5 montre que chaque élément est équivalent à une matrice de la forme ci-dessus. On en dénombre exactement $\min\{n,p\}+1$. ∎

Corollaire 4.8. — *Deux matrices de* $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Remarque 4.9. — *Si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, *on peut associer naturellement une application linéaire* $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ *définie par* $X \mapsto AX$. *Dans ce cas, la matrice de* f_A *dans les bases canoniques est exactement* A. *En revanche, si on se fixe d'autres bases* $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, e_n)$ *et* $\mathcal{C} = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p)$, *alors on définira une autre application linéaire en posant*

$$f\left(\sum_{1\le j\le n} x_j \varepsilon_j\right) = \sum_{1\le j\le n} \sum_{1\le i\le p} a_{i,j}\varepsilon'_i\,.$$

En conclusion, l'application associée à une matrice dépend fortement des bases choisies.

4.2 Le cas des endomorphismes

Plaçons nous maintenant dans le cas où E = F et où $\mathcal{B} = \mathcal{C}, \mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. On s'intéresse donc à la manière dont change la matrice A d'une application linéaire $f : E \to E$ dans la base $\mathcal{B}$ quand on passe à la base $\mathcal{B}'$. Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, la relation (4.1) appliquée à notre situation donne immédiatement :

$$\boxed{B = P^{-1}AP} \tag{4.2}$$

Définition 4.10. — *On dit que deux matrices carrées d'ordre n A et B sont* semblables *s'il existe une matrice carrée inversible P d'ordre n telle que*

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$

En particulier, deux matrices semblables sont équivalentes.

Déterminant. On remarque que si deux matrices sont semblables, alors elles ont même déterminant: en effet, si $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$ alors

$$\det \mathrm{A} = \det \mathrm{P} \times \det \mathrm{B} \times \det(\mathrm{P}^{-1}) = \det \mathrm{P} \times \det \mathrm{B} \times (\det \mathrm{P})^{-1} = \det \mathrm{B}\,.$$

Du coup, si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, alors, quelle que soit la base de E considérée, on obtient le même déterminant.

Trace. Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une matrice carré de taille n, alors on définit

$$\operatorname{tr} \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\,.$$

On montre facilement que tr définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prenons $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et notons $\mathrm{C} = (c_{i,j}) = \mathrm{AB} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} = (d_{i,j}) = \mathrm{BA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$c_{i,i} = \sum_{1\le k\le n} a_{i,k}b_{k,i} \quad \text{et} \quad d_{j,j} = \sum_{1\le \ell\le p} b_{j,\ell}a_{\ell,j}$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) &= \sum_{1\le i\le p}\sum_{1\le k\le n} a_{i,k}b_{k,i} \\
\operatorname{tr}(\mathrm{BA}) &= \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le \ell\le p} b_{j,\ell}a_{\ell,j} \\
&= \sum_{1\le \ell\le p}\sum_{1\le j\le n} a_{\ell,j}b_{j,\ell}
\end{aligned}$$

donc, si on pose $j = k$ et $\ell = i$, on obtient $\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BA})$. En particulier, si u est un endomorphisme que l'on exprime dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ avec matrice de passage P, de sorte que l'on a $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$, alors

$$\operatorname{tr} \mathrm{A} = \operatorname{tr}(\mathrm{PBP}^{-1}) = \operatorname{tr} \mathrm{P}(\mathrm{BP}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BP}^{-1})\mathrm{P} = \operatorname{tr} \mathrm{B}$$

donc la trace définit une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (et pas seulement sur les matrices).

Le problème de classification devient bien plus compliqué dans ce cadre. Mais on a les conditions nécessaires suivantes:

Proposition 4.11. — *Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables, alors on a*

1. $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} \mathrm{B}$,

2. $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{B}$,

3. $\operatorname{tr} \mathrm{A} = \operatorname{tr} \mathrm{B}$.