UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE | **Licence 1, Mathématiques**
Analyse 1, CUPGE | **2015-16**

Équivalents, développements limités

Exercice 1 Prouver les affirmations suivantes pour x au voisinage de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$)

1. si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) \sim h(x)$ alors $f(x) \sim h(x)$.

2. si $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) = o(h(x))$ alors $f(x) = o(h(x))$.

3. si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$ alors $f(x) = o(h(x))$.

4. si $f(x) = o(g(x))$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f(x) = o(g(x))$.

5. si $f(x) = o(g(x))$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ alors $f(x) = o(\lambda g(x))$. Que se passe-t-il si $\lambda = 0$? A-t-on encore $f(x) = o(\lambda g(x))$ en général ?

6. si $f(x) \sim h(x)$ alors $f(x)g(x) \sim h(x)g(x)$.

7. si $f(x) = o(g(x))$ alors $f(x)w(x) = o(f(x)w(x))$.

8. si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)$ alors $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$.

9. si $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(g(x))$ alors $f(x) + h(x) = o(g(x))$.

Exercice 2 Soient f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+1$, $g(x) = x^4+1$, $\varphi(x) = x^3-3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.

2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.

3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.

4. Montrer que $\mathrm{e}^\varphi \not\sim \mathrm{e}^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 3 On définit f sur $]-\infty, 1[$ par : $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$. Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 4 Donner le DL à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}.$$

Exercice 5 Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 6

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x$, $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.

2. Calculer $l = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$. Donner un équivalent de $l - \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 7 Donner une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-6}-près, c'est-à-dire donner un nombre réel l tel que $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]