UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE **Licence 1, Mathématiques**
Analyse 1, CUPGE **2015-16**

Dérivabiliité

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x} = 0\,.$$

Montrer que f est dérivable en zéro et déterminer a et b.

Exercice 2 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_1(0) = 0$.

2. $f_2(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 0$.

3. $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f_3(0) = 0$.

4. $\begin{cases} h(x) & = -6x^2 + 2x + 1 \quad \text{si } x \geq 0 \\ h(x) & = \ln(1 + 2|x|) \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} k(x) & = \sin(x) \quad \text{si } x \geq 0 \\ k(x) & = e^x - 1 \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 3 Étudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

Exercice 4 On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \\ f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 5 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont dérivables et donner une expression de leur dérivée.

1. $f_1(x) = x^{\frac{1}{x}}$,

2. $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$.

Exercice 6 Étudier l'existence et la valeur d'une limite éventuelle en x_0 pour les fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \dfrac{x+|x|}{x}$, pour $x \neq 0$, et $x_0 = 0$,

2. $f_2(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x$, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, et $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 8 On considère la fonction :

$$f\ : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

1. Montrer que l'on peut prolonger cette fonction en une fonction φ, continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que φ est C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$\varphi^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

où P_n est une fonction polynomiale.

3. Montrer que φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

2. En déduire que pour tout $x > 0$, on a :

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Montrer que la fonction arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x > 0$, on a :

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Exercice 10 En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 < \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} < \mathrm{e}^x$, pour tout $x > 0$.

Exercice 11 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est à dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}\mathrm{A}.$$

2. On définit φ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}\mathrm{A}.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}f''(\theta).$$

Exercice 12 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est convexe, c'est-à-dire que $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $a < b < c$ sont trois réels, alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \text{ et } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

b) En déduire que f admet des dérivées à droite et à gauche en tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

c) Montrer que si f est dérivable alors f' est croissante.

2. On suppose f dérivable et f' croissante.

a) Montrer que si $a < b < c$ alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

b) En déduire que f est convexe.

3. On suppose f deux fois dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$.

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra faire une récurrence sur n.]

Exercice 14 Soit f une fonction dérivable de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 15 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables pour tout $x \in]a,b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b]$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a,b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]