Continuité

Exercice 1 Calculer les limites suivantes.

1.
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{x}-x}.$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

Exercice 2 Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$ pour tout x. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

3. On définit f par $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\mathrm{E}(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$.
On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, l'application f a-t-elle une limite en x_0 ? une limite à droite en x_0 ? une limite à gauche en x_0 ?

Exercice 3

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite de f en 1 ?

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite de f en 0 ?

3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \dfrac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite de f en 0 ?

4. $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite de f en 0 ?

Exercice 4

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ t.q. $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée ℓ, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 5 Soient a et b deux réels strictement positifs ; on définit une suite (u_n) par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle cette suite est stationnaire.

2. Montrer que si u_0 est distinct de cette valeur, (u_n) est monotone et bornée. Trouver $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 6 Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

2. $0 < u_0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.

5. $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.

6. $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{1-u_n}}$.

7. $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

8. $u_{n+1} = \sqrt{4 - 3u_n}$.

9. $u_{n+1} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.

10. $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2+1}$.

11. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^\alpha$.

12. $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Exercice 7 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 8 Soient $\mathrm{I} = [0,1]$ et f une application croissante de I dans I. On pose $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{I}, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

1. $\mathrm{A} \neq \varnothing$,

2. $x \in \mathrm{A} \Rightarrow f(x) \in \mathrm{A}$.

3. A possède une borne inférieure $a \in \mathrm{I}$.

4. $f(a) = a$.

Exercice 9 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout $\mathbb{R}$).

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 11 Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ les applications définies par

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{E}(f(x))$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Calculer $f(1)$.

2. Montrer que $f(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$.

3. Montrer que $f(x) < 2$ si $x \neq 1$.

4. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

5. Calculer les limites à droite et à gauche de g en 1. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 12 Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{array} \right.$$

Exercice 13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\mathrm{I} =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{A} = \{f(x),\ x \in \mathrm{I}\}$, $\alpha = \inf \mathrm{A}$ et $\beta = \sup \mathrm{A}$. (Si A est non minorée, on pose $\inf \mathrm{A} = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup \mathrm{A} = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x \to b} f(x) = \beta$.

2. Soit $c \in \mathrm{I}$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \leq f(c) \leq f_d(c)$.

3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in \mathrm{I}$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 14

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

2. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 15 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]

2. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.

3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 17 Soit f une application continue d'un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On appelle groupe des périodes $\mathrm{Per}\,(f)$ l'ensemble des $\mathrm{T} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

1. Montrer que $\mathrm{Per}\,(f)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifie:

a) $0 \in \mathrm{Per}\,(f)$;

b) si $x, y \in \mathrm{Per}\,(f)$, alors $(x - y) \in \mathrm{Per}\,(f)$.

2. On suppose f continue. Montrer que, ou bien il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que $\mathrm{Per}\,(f) = \mathrm{T}\mathbb{Z}$, ou bien f est constante.