UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE — **Licence 1, Mathématiques**
Analyse 1, CUPGE — **2015-16**

Suites et séries numériques

Exercice 1 Montrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 Trouver les limites des suites suivantes.

1.
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

2.
$$v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

3.
$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Exercice 3 Trouver les limites des suites suivantes.

1.
$$u_n = \frac{n^6 + 2^n}{n^2 + 2^{3n}}$$

2.
$$v_n = \frac{1/n + (-1)^n}{1/n^3 + (-1)^{3n}}$$

3.
$$w_n = \frac{\sqrt{n} + (-1/2)^n}{n^{-3} + (-1/2)^{3n}}$$

Exercice 4 Trouver les limites des suites suivantes.

1.
$$u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$$

2.
$$v_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$$

Exercice 5 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 7 Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On note $a = \inf\{g \in \mathrm{G},\ g > 0\}$.

1. Montrer que $a \in \mathrm{G}$.

2. On suppose que $a > 0$. Montrer que $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.

3. On suppose que $a = 0$. Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a $[a, b] \cap \mathrm{G} \neq \varnothing$.

Exercice 8 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 9 On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2}\,.$$

Montrer que $\lim u_n = 2$.

Indication: On pourra étudier la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - 2$.

Exercice 11 Soient $a, r \in \mathbb{R}$, avec $r \neq 0$. On considère les suites $(u_n)_n$ définies par

$$u_{n+1} = ru_n + a\,. \tag{1}$$

1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ est une suite géométrique de raison r.

2. On pose $\lambda = a/(1-r)$, avec $r \neq 1$. Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à λ est solution de (1).

3. Montrer que $(u_n - \lambda)_n$ est une suite géométrique.

4. En déduire l'expression suivante

$$u_n = \lambda + (u_0 - \lambda)r^n\,.$$

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs positives telles que, pour tout $m, n \geq 0$, on ait

$$u_{m+n} \leq u_m + u_n\,.$$

Montrer que la suite $(u_n/n)_n$ est convergente de limite $\inf(u_n/n)$.

Exercice 13

1. On considère

$$\mathcal{S}_0 = \{(u_n)_{n\geq 0},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}\}\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer sa dimension.

b) Montrer que pour toute suite (u_n) de $\mathcal{S}_0$, il existe $a, b, \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2. Soit

$$\mathrm{P}(x) = x^k - \sum_{0 \leq j < k} a_j x^j$$

un polynôme réel ayant toutes ses racines réelles et simples. On considère

$$\mathcal{S}_\mathrm{P} = \left\{(u_n)_{n \geq 0},\ u_{n+k} = \sum_{0 \leq j < k} a_j u_{n+j}\right\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_\mathrm{P}$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

b) Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ telle que, pour toute suite (u_n) de $\mathcal{S}_\mathrm{P}$ et tout $n \geq 0$, on ait

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que A est diagonalisable.

d) Soit

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

un vecteur propre de A. Décrire la suite (u_n) ayant pour conditions initiales $u_0, \ldots, u_{k-1}$.

e) Décrire la forme générale d'une suite de $\mathcal{S}_\mathrm{P}$.

Exercice 14

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geq a > 0$) :

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \qquad \text{et} \qquad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 15

1. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $v_{n+1} = 2(1 - v_n)$. Pour quelles valeurs de v_0 cette suite est-elle bornée? On pourra chercher $x \in \mathbb{R}$ de sorte que $(v_n - x)_n$ soit géométrique.

2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que $\lim(u_n + u_{2n}/2) = 1$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.