Fonctions dérivables

Peter Haïssinsky, Université d'Aix-Marseille

2015–2016

1 Introduction

La notion de dérivée permet de répondre à la question suivante : peut-on remplacer une fonction numérique f par une fonction affine au voisinage d'un point et avoir une bonne approximation ?

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle ouvert et prenons $a \neq b$ dans I. Le *taux d'accroissement* entre a et b est définie par

$$\tau_{a,b} f = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.$$

On dit que f est dérivable au point a si

$$\lim_{b\to a} \tau_{a,b} f \text{ existe;}$$

dans ce cas on écrit $f'(a)$ la limite : c'est la *dérivée de f au point a.*

Supposons f dérivable en a et posons

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\,.$$

On a donc $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On obtient en re-écrivant cette identité

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)\,.$$

Réciproquement, s'il existe une constante A et une fonction ε telles que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $f(a+h) = f(a) + \mathrm{A}h + h\varepsilon(h)$ alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} (\mathrm{A} + \varepsilon(h)) = \mathrm{A}\,.$$

On a montré :

Fait 1.1. — *Une application f est dérivable au point a si et seulement s'il existe une constante* A *et une fonction ε telle que* $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ *et*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{A}h + h\varepsilon(h)\,.$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = \mathrm{A}$.

La droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\,.$$

En faisant tendre b vers a, la dérivabilité au point a entraîne que la droite limite sera d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Graphiquement, si la fonction est dérivable en un point x_0, on trace la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ et on considère, pour $\varepsilon > 0$ fixé les deux droites d'équations $y = f(x_0) + (f'(x_0) \pm \varepsilon)(x - x_0)$ qui forment un (double)-cône contenant la tangente. La dérivabilité au point x_0 signifie que pour x assez proche de x_0, le graphe de f est situé dans ce cône.

Définition 1.2. — *On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur* I *si f est dérivable en tout point de* I. *On obtient alors une fonction $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est continûment dérivable (ou $\mathcal{C}^1$) au point $a \in \mathrm{I}$ si f est dérivable au voisinage de a et f' est continue au point a. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans* I *si f est continûment dérivable en chaque point de* I.

1.1 Exemples

1. *Si f est constante, alors f est dérivable, même $\mathcal{C}^1$, et $f'(a) = 0$.*
   En effet, on a $f(a+h) = f(a) + 0 + 0$.

2. *Si f est la restriction d'une application affine $f(x) = ax + b$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathrm{U}$.*
   En effet, on a $f(x+h) = ax + b + ah + 0$, donc $f'(x) = a$.

3. *Si $f : x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -1/x^2$.*
   On calcule
   $$\tau_{x,x+h} f = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{(x+h)x}$$
   donc
   $$\lim_{h \to 0} \tau_{x,x+h} f = \frac{-1}{x^2}\,.$$

2 Propriétés locales

Après avoir mis en places des moyens pour établir la dérivabilité de fonctions compliquées, on étudie quelques propriétés, notamment liées au problème du calcul des extrema.

2.1 Stabilité de la dérivation

Théorème 2.1. — *Si f, g sont des fonctions continues et dérivables définies sur des intervalles* I *et* J *alors*

1. *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\lambda f + \mu g$ est dérivable de dérivée $\lambda f' + \mu g'$ sur $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$;*
2. *$f \times g$ est dérivable de dérivée $f \times g' + f' \times g$ sur $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$;*
3. *$g \circ f$ est dérivable sur $\mathrm{I} \cap f^{-1}(\mathrm{J})$ de dérivée $(g' \circ f) \times f'$;*
4. *f/g est dérivable sur $(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \setminus \{x,\ g(x) = 0\}$ de dérivée*
   $$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}\,;$$
5. *pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f^n est dérivable de dérivée*
   $$n \times f' \times f^{n-1}\,;$$

Ce théorème implique notamment que tout polynôme est dérivable, ainsi que toute fraction rationnelle (rapport de polynômes), là où le dénominateur ne s'annule pas.

Démonstration. —

1. On écrit
   $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(a+h) &= \lambda f(a+h) + \mu g(a+h) \\ &= \lambda f(a) + \lambda f'(a)h + \lambda h \varepsilon_f(h) + \mu g(a) + \mu g'(a)h + \mu h \varepsilon_g(h) \\ &= (\lambda f + \mu g)(a) + (\lambda f'(a) + \mu g'(a))h + h(\lambda \varepsilon_f(h) + \mu \varepsilon_g(h))\,.\end{aligned}$$
   Donc $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

2. On écrit

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) &= (f(a)+f'(a)h+h\varepsilon_f(h))(g(a)+g'(a)h+h\varepsilon_g(h)) \\ &= (fg)(a)+f(a)g'(a)h+g(a)f'(a)h+h[(f(a)+f'(a)h)\varepsilon_g(h))+(g(a)+g'(a)h)\varepsilon_f(h))]\,.\end{aligned}$$

3. On écrit

$$f(a+h)=f(a)+h(f'(a)+\varepsilon_f(h))$$

de sorte que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g(f(a)+h(f'(a)+\varepsilon(h))) \\ &= (g\circ f)(a)+g'(f(a))h(f'(a)+\varepsilon_f(h))+h(f'(a)+\varepsilon_f(h))\varepsilon_g(h(f'(a)+\varepsilon_f(h))) \\ &= (g\circ f)(a)+g'(f(a))f'(a)h+h[\varepsilon_f(h)+(f'(a)+\varepsilon_f(h))\varepsilon_g(h(f'(a)+\varepsilon_f(h)))]\,.\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_f(h)+(f'(a)+\varepsilon_f(h))\varepsilon_g(h(f'(a)+\varepsilon_f(h)))=0\,.$$

4. Pour f/g, on applique la formule du produit et la formule de composition à $x\mapsto(1/x)$ et g. Du coup

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{g(a)}+f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{g(a)}+f(a)\cdot\left(\frac{-g'(a)}{g(a)^2}\right)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

5. On considère l'application $g(x)=x^n$ et on montre par récurrence sur $|n|$ que $g'(x)=nx^{n-1}$. Le cas $n=0$ et $|n|=1$ ont déjà été traité. Si la formule est vrai au rang $\pm n$, $n\geq 1$, alors

$$\frac{dx^{\pm(n+1)}}{dx}=\frac{dx^{\pm n}}{dx}x^{\pm 1}+x^{\pm n}\frac{dx^{\pm 1}}{dx}=\pm nx^{\pm n-1}x^{\pm 1}+x^{\pm n}(\pm 1)x^{\pm 1-1}=\pm(n+1)x^{\pm(n+1)-1}\,.$$

Par la formule de composition, on obtient donc $\frac{df^n}{dx}=n\times f'\times f^{n-1}$.

■

2.2 Autres propriétés élémentaires

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction numérique et $a\in \mathrm{D}(f)$. On appelle *dérivées à droite et à gauche*, quand elles existent, les limites

$$\begin{cases} f'_d(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \\[2ex] f'_g(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\,. \end{cases}$$

Par exemple, la fonction $f:x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable en zéro, mais admet des dérivées à droite et à gauche :

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1 \\[2ex] \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1\,. \end{cases}$$

Proposition 2.2. — *Une fonction est dérivable au point a si et seulement si les dérivées à droite et à gauche existent et coïncident. Dans ce cas, on a $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$.*

Démonstration. — Si f est dérivable au point a, alors on a bien $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$. Réciproquement, si les dérivées à droite et à gauche existent et coïncident, alors la limite du taux d'accroissement existe et $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$. ■

Proposition 2.3. — *Une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable au point a est aussi continue au point a.*

Démonstration. — En effet, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq (|f'(a)| + |\varepsilon(x-a)|) \cdot |x-a| \, .$$

■

Définition 2.4 (extremum local). — *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}(f)$. Le point a est un maximum local s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{D}(f) \cap]a-\delta, a+\delta[$, on a $f(x) \leq f(a)$; on parle de maximum local strict si $f(x) < f(a)$ pour $x \neq a$. De même, le point a est un minimum local s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{D}(f) \cap]a-\delta, a+\delta[$, on a $f(x) \geq f(a)$; on parle de minimum local strict si $f(x) > f(a)$ pour $x \neq a$. Un extremum local est un maximum ou minimum local.*

Proposition 2.5. — *Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ admet un extremum local au point $a \in \mathrm{I}$ et si f est dérivable au point a alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que a est un maximum local. Du coup, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Si $0 < |h| < \delta$, alors, comme $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, on en déduit $h(f'(a) + \varepsilon(h)) \leq 0$. Pour $h > 0$, on obtient ainsi $f'(a) \leq -\varepsilon(h)$. En prenant la limite à droite quand h tend vers zéro, il vient $f'(a) \leq 0$. En considérant $h < 0$, on montre de même $f'(a) \geq 0$. Par conséquent, $f'(a) = 0$. ■

3 Propriétés globales

Les propriétés globales des fonctions dérivables reposent essentiellement sur le théorème des accroissements finis qui relient taux d'accroissement et dérivées. On applique ce théoème aux variations et on étudie les fonctions réciproques.

3.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.1 (Rolle). — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. — Comme $[a,b]$ est compact, la fonction f atteint ses bornes. Si elle est constante, n'importe quel point $c \in]a,b[$ convient ; sinon, comme $f(a) = f(b)$ un des extrema de f, que l'on notera c, n'est ni a ni b. Donc $c \in]a,b[$ et $f'(c) = 0$ d'après la proposition 2.5. ■

Théorème 3.2 (des accroissements finis). — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Démonstration. — On applique le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t)(b-a) - (f(b) - f(a))t$. ■

Corollaire 3.3 (inégalités des accroissements finis). — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, $a < b$.*

1. *S'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ telle que $f'(x) \leq \mathrm{M}$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.*
2. *S'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $f'(x) \geq m$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $f(b) - f(a) \geq m(b-a)$.*
3. *S'il existe $k \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.*

Démonstration. — Le théorème des accroissements finis implique l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

1. S'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ telle que $f'(x) \leq \mathrm{M}$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $f'(c) \leq \mathrm{M}$ et $f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.
2. S'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $f'(x) \geq m$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $f'(c) \geq m$ et $f(b) - f(a) \geq m(b-a)$.
3. S'il existe $k \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a,b[$ alors $|f'(c)| \leq k$ et $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

■

Corollaire 3.4. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors f est constante.*

Démonstration. — Le théorème des accroissements finis implique l'existence pour tout $x \in [a, b]$ de $c \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$. Donc $f(x) = f(a)$ et f est constante.

■

Remarque 3.5. — *Ce corollaire s'applique en particulier sous la forme suivante : si $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables définies sur un intervalle I contenant un point a et si $f' \equiv g'$ alors $f(x) - f(a) = g(x) - g(a)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.*

Théorème 3.6 (Darboux). — *Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle.*

Démonstration. — Rappelons que l'ensemble $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle s'il contient $[\alpha, \beta]$ dès que $\alpha, \beta \in f'(\mathrm{I})$, avec $\alpha < \beta$. Soient $a < b$ deux points de I. On va montrer que $f'(\mathrm{I})$ contient toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Le théorème des accroissements finis nous dit que tout taux d'accroissement est la valeur de f' en un point donné. Cela nous permet de palier au manque de continuité de f' par la continuité du taux d'accroissement.

Posons d'abord
$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$
qui est bien définie et continue sur $]a, b]$. Comme f est dérivable au point a, on a
$$\lim_{t \to a^+} \varphi(t) = f'(a)$$
donc on peut prolonger continûment φ au point a en posant $\varphi(a) = f'(a)$. Comme φ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intérmédiaires implique que $\varphi([a, b])$ est un intervalle J_a qui contient $f'(a)$ et $\tau_{(a,b)} f$. Or le théorème des accroissements finis affirment que chaque point de J_a est la dérivée de f en un point de $[a, b]$ impliquant $\mathrm{J}_a \subset f'([a, b])$.

De même, posons
$$\psi(t) = \frac{f(b) - f(t)}{b - t}$$
qui est bien définie et continue sur $[a, b[$ et qui se prolonge en une application continue $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ en posant $\psi(b) = f'(b)$ car f est dérivable au point b. Comme ψ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intérmédiaires impliquent que $\psi([a, b])$ est un intervalle J_b qui contient $f'(b)$ et $\tau_{(a,b)} f$ et qui est contenu dans $f'([a, b])$.

Par conséquent,

1. $\mathrm{J}_a \cup \mathrm{J}_b$ est un intervalle puisqu'ils ont $\tau_{(a,b)} f$ en commun ;
2. il contient toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$ puisque $f'(a), f'(b) \in \mathrm{J}_a \cup \mathrm{J}_b$.

■

Remarque 3.7. — *Comme la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas forcément continue (pensez à $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par 0 en 0), on en déduit qu'une application qui vérifie le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas forcément continue.*

3.2 Variations d'une fonction dérivable

Une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est croissante si $x \leq x'$ entraîne $f(x) \leq f(x')$. On dit que f est strictement croissante si on a des égalités strictes. De même, f est décroissante si $x \leq x'$ entraîne $f(x) \geq f(x')$. On dit que f est strictement décroissante si on a des égalités strictes.

Proposition 3.8. — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continue et dérivable.*

1. *La fonction f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.*
2. *La fonction f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si $f' < 0$, alors f est strictement décroissante.*
3. *La fonction f admet un extremum local en un point $x_0 \in \mathrm{I}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathrm{I}$ et si les restrictions $f'|_{]x_0-\delta,x_0[}$ et $f'|_{]x_0,x_0+\delta[}$ sont de signe constant et opposé.*

Démonstration. — Soient $a < b$ deux points de I. Le théorème des accroissements finis implique l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x, alors $f(b) - f(a) \geq 0$ donc f est croissante. De plus, si $f'(x) > 0$ pour tout x, alors $f(b) - f(a) > 0$, donc f est strictement croissante.

Réciproquement, supposons f croissante. Alors, si $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$ donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \text{ et } f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0\,.$$

De même, si f' est de signe négatif ou si f est décroissante.

Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathrm{I}$ et que les restrictions vérifient $f'|_{]x_0-\delta,x_0[} \geq 0$ et $f'|_{]x_0,x_0+\delta[} \leq 0$. Dans ce cas, f est croissante sur $]x_0 - \delta, x_0[$, donc $f(x) \leq f(x_0)$ pour $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ et f est décroissante sur $]x_0, x_0 + \delta[$, donc $f(x_0) \geq f(x)$ pour $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Par conséquent, on a $f(x) \leq f(x_0)$ pour $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et x_0 est un maximum local. Dans le cas contraire, on montre que x_0 est un minimum local. ■

3.3 Fonctions réciproques

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I que l'on suppose continue et dérivable. Cette fonction est injective si elle est strictement monotone. Dans ce cas, elle définit une bijection $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Notons $g : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ sa transformation réciproque.

Si le graphe de f est

$$\mathrm{G}_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathrm{I}\}\,,$$

alors celui de g est

$$\mathrm{G}_g = \{(f(x), x),\ x \in \mathrm{I}\}\ :$$

il est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On en déduit que g est continue. Par ailleurs, dire que f est dérivable en un point x_0 signifie que G_f admet une tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

qui est en particulier non verticale.

Par conséquent, la fonction g sera dérivable en $f(x_0)$ si la tangente au point $(f(x_0), x_0)$ est non verticale, ce qui, par symétrie, signifie que la tangente de G_f au point $(x_0, f(x_0))$ est non horizontale : la fonction g est donc dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, on trouve l'équation de la tangente à G_g, en manipulant celle de G_f :

$$x = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0\,.$$

En effectuant la symétrie par rapport à la première bissectrice, on trouve l'équation

$$y = \frac{x - f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0\,.$$

En particulier $g'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$.

Par conséquent, on aura $g'(x) = 1/f'(g(x))$ pour tout $x \in \mathrm{J}$. Nous avons établi :

Théorème 3.9. — *Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable, de dérivée ne s'annulant pas et de signe constant, alors il existe une transformation réciproque $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$, continue et dérivable, de dérivée*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} .$$

3.3.1 Fonction cosinus inverse

La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ définit une bijection. On note $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ son inverse. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée vérifie

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sin \arccos x} .$$

Or $\sin^2 + \cos^2 = 1$, donc

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2 .$$

Or, pour $x \in [0, \pi]$, on a $\sin x \geq 0$, donc

$$\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$$

et on trouve

$$\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Aux points (-1) et 1, le graphe admet une tangente verticale, donc arccos n'est pas dérivable.

Attention. — La fonction arccos ne prend ses valeurs que dans l'intervalle $[0, \pi]$. Donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos \arccos(x) = x$, mais on n'a pas toujours $\arccos \cos(x) = x$, seulement pour les valeurs de x dans $[0, \pi]$.

3.3.2 Fonction sinus inverse

La fonction $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ définit une bijection. On note $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ son inverse. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée vérifie

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos \arcsin x} .$$

Or $\sin^2 + \cos^2 = 1$, donc

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 .$$

Or, pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos x \geq 0$, donc

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$$

et on trouve

$$\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Aux points (-1) et 1, le graphe admet une tangente verticale, donc arcsin n'est pas dérivable.

Attention. — La fonction arcsin ne prend ses valeurs que dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin \arcsin(x) = x$, mais on n'a pas toujours $\arcsin \sin(x) = x$, seulement pour les valeurs de x dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

3.3.3 Fonction tangente inverse

La fonction $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ définit une bijection. On note $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ son inverse. Elle est dérivable et sa dérivée vérifie

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan x} = \frac{1}{1 + x^2} .$$

Les droites d'équation $y = \pm\pi/2$ sont des asymptotes horizontales.

4 Fonctions dérivables d'ordre supérieur

On se donne un ouvert U de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1. — *Soit $p \geq 2$. On dit que $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est p fois dérivable au point $a \in \mathrm{U}$ si f est $(p-1)$ dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a et si la dérivée de rang $(p-1)$ $f^{(p-1)} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable au point a. L'application est p fois dérivable sur U si f est p fois dérivable en tout point de U. Elle est de classe $\mathcal{C}^p$ si f est p fois dérivable et si la dérivée p-ième $a \mapsto f^{(p)}(a)$ est continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U si f est dérivable p fois pour tout $p \geq 1$.*

Remarque 4.2. — *Si f est p-dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a et si $f^{(p)}$ est q fois dérivable, alors f est $(p+q)$ fois dérivable et $f^{(p+q)}(a) = [f^{(p)}]^{(q)}(a)$.*

4.1 Généralités

On énonce quelques propriétés qui découlent sans malice des propriétés déjà établies des applications dérivables en procédant par récurrence.

Proposition 4.3. — *Soient $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $a \in \mathrm{U}$, $p \geq 1$ et $f, g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^p$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ dans U et, $(\lambda f + \mu g)^{(p)} = \lambda f^{(p)} + \mu g^{(p)}$.*

Proposition 4.4 (Formule de Leibniz). — *Soient U un ouvert d'un evn et $f, g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ des applications p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$), alors le produit (fg) est aussi p fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^p$). De plus, on a*

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x)\,.$$

Démonstration. — On procède par récurrence. Le cas $p = 1$ vient du théorème 2.1. Si le résultat est vrai au rang $(p-1)$, alors (fg) est $(p-1)$ fois dérivable et

$$(fg)^{(p-1)}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-1-k)}(x)\,.$$

Par conséquent, $(fg)^{(p-1)}$ est une combinaison linéaire de fonctions dérivables, obtenues comme produits de fonctions elles-mêmes dérivables. Du coup, on obtient

$$\begin{aligned}
(fg)^{(p)}(x) &= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p-1}{k} \left(f^{(k)}(x) g^{(p-1-k)} \right)'(x) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \left(f^{(k+1)}(x) g^{(p-1-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(p-1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \binom{p-1}{j-1} f^{(j)}(x) g^{(p-j)}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x) \\
&= f^{(p)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x) + f(x) g^{(p)}(x)\,.
\end{aligned}$$

On a effectué le changement d'indice $j = k+1$. Or

$$\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} = \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} + \frac{(p-1)!}{(p-1-k)!k!} = \frac{(p-1)![k + (p-k)]}{k!(k-p)!} = \binom{p}{k}$$

Donc

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x)\,.$$

■

Exemple Toute application polynomiale ou rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elle est définie.

Proposition 4.5. — *Soient* $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathrm{U}, \mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ *des ouverts de* E, a *un point de* U, *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ *deux applications telles que* $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$.

1. *Si* f *est* p *fois dérivable au point* a *et* g *est* p *fois dérivable au point* $f(a)$ *alors* $(g \circ f)$ *est* p *fois dérivable au point* a.
2. *Si* f *et* g *sont de classe* $\mathcal{C}^p$ *alors* $(g \circ f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$.

Démonstration. — On procède par récurrence sous l'hypothèse : la dérivée au rang p est une combinaison linéaire de produits de dérivées de f et g de rang au plus p. Le cas $p = 1$ est connu, et on a bien $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Supposons maintenant la proposition connue au rang $(p-1) \geq 1$ et montrons-la au rang p. D'après l'hypthèse de récurrence, $(g \circ f)^{(p-1)}$ est une combinaison linéaire de produits de dérivées de f et g de rang au plus $(p-1)$. Par conséquent, chacun des termes de la combinaison linéaire est dérivable, et leurs dérivées seront elles-même des combinaisons linéaires de produits de dérivées d'ordre au plus p de f et g. On conclut que $(g \circ f)$ est bien p fois dérivable et que $(g \circ f)^{(p)}$ est une combinaison linéaire de produits de dérivées de f et g de rang au plus p. ■

Proposition 4.6. — *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^p$, *et* A *est une application affine, alors*

$$(f \circ \mathrm{A})^{(p)} = f^{(p)} \circ \mathrm{A}) \cdot (\mathrm{A}')^p\,.$$

Démonstration. — On procède par récurrence. On écrit $\mathrm{A}(x) = ax + b$ de sorte que $\mathrm{A}'(x) = a$. Du coup, on a $(f \circ \mathrm{A})' = (f' \circ \mathrm{A}) \cdot a$. Si on a $(f \circ \mathrm{A})^{(p-1)} = (f^{(p-1)} \circ \mathrm{A}) \cdot a^{p-1}$ alors

$$(f \circ \mathrm{A})^{(p)} = [(f \circ \mathrm{A})^{(p-1)}]' = [(f^{(p-1)} \circ \mathrm{A})a^{p-1}]' = [(f^{(p-1)} \circ \mathrm{A})]'a^{p-1} = [(f^{(p)} \circ \mathrm{A})\mathrm{A}']a^{p-1} = (f^{(p)} \circ \mathrm{A})a^p\,.$$

■

Remarque 4.7. — *Il existe aussi une formule exacte donnant* $(g \circ f)^{(p)}$ *due à Faà di Bruno, mais elle est trop compliquée pour être d'une quelconque utilité dans les situations standard.*

On conclut ce paragraphe avec un énoncé sur les extrema locaux.

Proposition 4.8. — *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable. On suppose qu'il existe* $c \in \mathrm{I}$ *tel que* $f'(c) = 0$. *On suppose aussi que* f *est deux fois dérivable au point* c.

1. *Si* $f''(c) > 0$ *alors* c *est un minimum local.*
2. *Si* $f''(c) < 0$ *alors* c *est un maximum local.*

Démonstration. — Comme f est deux fois dérivable au point c, on a

$$f'(c+h) = f'(c) + hf''(c) + o(h) = h(f''(c) + o(1))\,.$$

Si $f''(c) \neq 0$, on en déduit que $(f''(c) + o(1))$ est de signe constant pour h assez proche de 0, donc f' change de signe au point c. Par conséquent, la proposition 3.8 permet de conclure. ■

4.2 Formules de Taylor

Les formules de Taylor généralisent la formule suivante pour les fonctions suffisamment dérivables.

Proposition 4.9. — *Soit* $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un polynôme de degré* $d \geq 0$. *Alors, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

Démonstration. — Notons $\mathrm{Q}_d(x) = x^d$. Par récurrence, on montre facilement

$$\mathrm{Q}_d^{(k)}(a) = \begin{cases} \dfrac{d!}{(d-k)!} a^{d-k} & \text{si } 0 \leq k \leq d \\ 0 & \text{si } k > d \end{cases}$$

Si

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{n=0}^{d} c_n x^n$$

alors, pour $n \leq d$,

$$\frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{k \leq n \leq d} c_n \frac{k!}{(n-k)!} a^{n-k}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k &= \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} \sum_{k \leq n \leq d} c_n \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} (x-a)^k \\ &= \sum_{0 \leq n \leq d} c_n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (x-a)^k \\ &= \sum_{0 \leq n \leq d} c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (x-a)^k \\ &= \sum_{0 \leq n \leq d} c_n x^n \end{aligned}$$

■

Les formules se présentent sous la forme suivante, en supposant f suffisamment dérivable :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{R}_n(x)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \mathrm{R}_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{R}_n(h)$$

en posant $h = x - a$. L'objet des différentes formules consiste à estimer le reste R_n.

4.2.1 Formule de Taylor-Young

Cette formule décrit le comportement local d'une fonction au voisinage d'un point.

Théorème 4.10 (Taylor-Young). — *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une application dérivable* p *fois au point* $a \in \mathrm{I}$. *Soit* $r > 0$ *tel que* $]a-r, a+r[\subset \mathrm{I}$. *Il existe* $\varepsilon :]-r, r[\to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_0 \varepsilon = 0$ *et, pour tout* $h \in]-r, r[$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^p \varepsilon(h) .$$

Démonstration. — On procède par récurrence. Le cas $p = 1$ est connu. On suppose que la formule est établi jusqu'au rang $(p-1) \geq 1$. On considère la fonction auxiliaire $g :]-r, r[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(a+x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$$

que l'on dérive pour trouver

$$g'(x) = f'(a+x) - \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} x^{k-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme f' est dérivable $(p-1)$ fois au point a, il existe $\delta > 0$ telle que, si $|x| < \delta$, alors $|g'(x)| \leq \varepsilon |x|^{p-1}$. Du coup, l'inégalité des accroissements finis implique, pour $h \in]-\delta, \delta[$,

$$\begin{aligned}\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right| &= |g(h) - g(0)| \\ &\leq \sup_{x \in]-|h|,|h|[} |g'(x)| \cdot |h| \\ &\leq \varepsilon \cdot |h|^p .\end{aligned}$$

■

4.2.2 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange généralise le théorème des accroissements finis aux fonctions dérivables plusieurs fois.

Théorème 4.11 (Taylor-Lagrange). — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, dérivable $(p+1)$ fois sur I. Pour tous $a, b \in \mathrm{I}$, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c) .$$

Démonstration. — On considère la fonction auxiliaire $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \sum_{k=0}^{p} (1-t)^k \frac{f^{(k)}(a + t(b-a))}{k!} (b-a)^k + \mathrm{K} \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!} - f(b)$$

où l'on fixe la valeur de K de sorte que $g(0) = 0$. On dérive g, dérivable par hypothèses :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=0}^{p} (1-t)^k \frac{f^{(k+1)}(a+t(b-a))}{k!} (b-a)^{k+1} - \sum_{k=1}^{p} (1-t)^{k-1} \frac{f^{(k)}(a+t(b-a))}{(k-1)!} (b-a)^k - \mathrm{K} \frac{(1-t)^p}{p!} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} (1-t)^{k-1} \frac{f^{(k)}(a+t(b-a))}{(k-1)!} (b-a)^k - \sum_{k=1}^{p} (1-t)^{k-1} \frac{f^{(k)}(a+t(b-a))}{(k-1)!} (b-a)^k - \mathrm{K} \frac{(1-t)^p}{p!} \\ &= (1-t)^p \frac{f^{(p+1)}(a+t(b-a))}{p!} (b-a)^{p+1} - \mathrm{K} \frac{(1-t)^p}{p!} . \end{aligned}$$

Or $g(1) = g(0) = 0$, donc le théorème de Rolle implique l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que $g'(\theta) = 0$, ce qui nous permet d'obtenir

$$\mathrm{K} = f^{(p+1)}(a + \theta(b-a))^{p+1} (b-a)^{p+1} .$$

Le fait que $g(0) = 0$ implique, en notant $c = a + \theta(b-a)$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c) .$$

■

Corollaire 4.12 (Majoration du reste). — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, dérivable $(p+1)$ fois sur I. Si $|f^{(p+1)}(x)| \leq \mathrm{M}$ sur I, alors, pour tous $a, b \in \mathrm{I}$, on a*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \mathrm{M}\frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}\,.$$

Démonstration. — On applique la formule de Taylor-Lagrange : il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| = \left| f^{(p+1)}(c)\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \right| \leq \mathrm{M}\frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}\,.$$

■

4.2.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 4.13 (Taylor avec reste intégral). — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{p+1}(\mathrm{I})$ définie sur un intervalle ouvert. Pour tout $a, b \in \mathrm{I}$, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+t(b-a))dt$$

Démonstration. — Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}(\mathrm{U})$ définie sur un intervalle ouvert contenant $[0,1]$. Alors on a

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p g^{(p+1)}(t)dt \tag{4.1}$$

Montrons (4.1) par récurrence sur p. Si $p = 0$, c'est le fameux théorème fondamental de l'analyse :

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt\,.$$

Supposons la formule (4.1) établie pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, et supposons g de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. On part donc de

$$g(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(p-1)!}\int_0^1 (1-t)^{p-1} g^{(p)}(t)dt$$

et on intègre par parties le reste intégral en prenant une primitive de $(1-t)^{p-1}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!}\int_0^1 (1-t)^{p-1} g^{(p)}(t)dt &= \frac{-1}{p!}(1-t)^p g^{(p)}(t)\Big|_0^1 + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p g^{(p+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{p!} g^{(p)}(0) + \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p g^{(p+1)}(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Du coup, on obtient bien (4.1).

La formule de Taylor avec reste intégral s'obtient en appliquant (4.1) à la fonction auxiliaire $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a+t(b-a))$: on a $g^{(k)}(t) = f^{(k)}(a+t(b-a))(b-a)^k$ donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(t)dt$$

■

5 Développement limités

Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots . a_n$ et une fonction $\mathrm{R} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{R}(x_0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on ait

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{R}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \mathrm{R}(x)$$

avec $\mathrm{R}(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, et ce plus vite que $(x-x_0)^n$. Autrement dit, on souhaite que $\mathrm{R}(x) = o((x-a)^n)$ ou mieux $\mathrm{R}(x) = \mathrm{O}((x-a)^{n+1})$. En particulier,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{R}(x)}{(x - x_0)^n} = 0\,.$$

Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$, ce qui nous ramène à un DL en zéro et à l'écriture

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)\,.$$

Proposition 5.1. — *Si une fonction admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, alors ce développement est unique et on a $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.*

Démonstration. — Supposons que l'on ait deux écritures

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$$

et montrons par récurrence que $a_k = b_k$. Pour cela, on remarque que, pour tout $0 \leq m \leq n$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{m} a_k h^k + o(h^m)$$

donc

$$a_m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k h^k}{h^m} \tag{5.1}$$

De même en remplaçant a_m par b_m.

Pour $k = 0$, on obtient

$$f(x_0) = a_0 = b_0\,.$$

Pour $k = 1$, on a

$$a_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - a_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

donc on a aussi $b_1 = f'(x_0)$. Si on suppose que $a_k = b_k$ pour tous $0 \leq k < m$ alors, d'après (5.1), on obtient

$$a_m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k h^k}{h^m} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{m-1} b_k h^k}{h^m} = b_m\,.$$

■

Exemple.— Pour tout $n \geq 1$, on a le DL en zéro suivant :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x_n)\,.$$

En effet, comme il s'agit des sommes partielles d'une série géométrique, on a

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - x} = 0\,.$$

5.1 Applications des DL

Le développement limité d'ordre un revient à approcher une courbe par sa tangente ; on parle aussi d'approximation affine :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

Son existence équivaut à la dérivabilité de la fonction en x_0.

Calcul de limites et d'équivalents.— On peut lever des indéterminations à l'aide de DL. Par exemple, pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$$

on développe $\sin x$ et $\cos x$ au voisinage de 0 :

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \\[2ex] \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$$

Du coup on trouve

$$\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \frac{-\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\left(\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = -\frac{x^3/6}{x^3/2} \times \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \sim \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

ce qui implique

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \frac{-1}{3}\,.$$

Position du graphe d'une fonction par rapport à la tangente.— Le développement limité d'ordre 2 revient à approcher une courbe par une parabole. Il permet de préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente, au voisinage du point de contact, pourvu que le coefficient du terme de degré 2 soit non nul : le signe de ce coefficient donne en effet cette position. Plus généralement, supposons

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + ah^k + o(h)$$

avec $a \neq 0$. Si k est impair, alors le graphe traverse la tangente au point x_0. Si k est pair et $a > 0$, alors le graphe de f est au-dessus de la tangente, et si $a < 0$, alors le graphe est en-dessous.

Courbes asymptotes à l'infini.— Le changement de variable $h = \frac{1}{x}$ permet, à l'aide d'un DL au voisinage de 0, de chercher une limite à l'infini, et, à partir d'un DL d'ordre plus important au voisinage de 0, de déterminer l'équation d'une asymptote (comme pour la tangente, le DL à l'ordre 2 permet de préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote). Si, au voisinage de l'infini, on trouve

$$f(x) = b + \frac{a}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

avec $a \neq 0$, alors le graphe de f est asymptote à la courbe $y = b + a/x^k$.

5.2 Développements limités et fonctions dérivables

La formule de Taylor-Young assure qu'une fonction f, dérivable n fois au point x_0, admet un DL à l'ordre n en ce point :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

En revanche, le fait qu'une fonction admette un DL à l'ordre n en x_0 n'assure pas que la fonction soit n fois dérivable en x_0 (par exemple $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ —prolongée par continuité en 0— admet, en 0, un DL à l'ordre 2 mais pas de dérivée seconde). On peut juste déduire, de l'existence d'un DL à l'ordre 0 en x_0, la continuité en x_0, et, de l'existence d'un DL à l'ordre 1 en x_0, la dérivabilité en x_0.

Proposition 5.2. — *Soit f une fonction dérivable. Si f' admet un DL à l'ordre n en x_0 alors f admet un DL à l'ordre $n+1$ en x_0. De plus si*

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + o(h^n)$$

alors

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1})\,.$$

Autrement dit, on intègre la partie régulière de f' pour obtenir celle de f.

Démonstration. — On écrit

$$f'(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + h^n \varepsilon(h)$$

et on applique le théorème fondamental de l'analyse pour obtenir

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k \int_0^h t^k dt + \int_0^h t^n \varepsilon(t) dt$$

et donc

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} h^{k+1} + \int_0^h t^n \varepsilon(t) dt\,.$$

Il reste à montrer que le reste tend assez vite vers 0. Pour cela, on pose $t = sh$ de sorte que $dt = hds$ et

$$\int_0^h t^n \varepsilon(t) dt = \int_0^1 (sh)^n \varepsilon(sh) h ds = h^{n+1} \int_0^1 s^n \varepsilon(sh) ds\,.$$

Soit $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| \leq \delta$, alors $\varepsilon(h) \leq \eta$. Du coup, si $|h| \leq \eta$ et $s \in [0,1]$, alors $s|h| \leq \delta$ et $|s^n \varepsilon(sh)| \leq \eta$ donc

$$\left| \int_0^1 s^n \varepsilon(sh) ds \right| \leq \int_0^1 |s^n \varepsilon(sh)| ds \leq \int_0^1 \eta ds \leq \eta$$

ce qui montre que

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 s^n \varepsilon(sh) ds = 0\,.$$

Par conséquent, on a bien montré que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} h^{k+1} + o(h^{n+1})\,.$$

■

Remarque 5.3. — *Si on peut intégrer les DL, on ne peut pas les dériver.*

Remarque 5.4. — *Cette dernière proposition produit une démonstration alternative de l'existence du développement de Taylor-Young en commençant par un DL à l'ordre 1 de $f^{(n-1)}$ et par intégrations successives des DLs.*

5.3 Opérations sur les développements limités

Dans cette section, on identifie parfois, par abus de langage, le DL avec le polynôme (appelé aussi la partie régulière du développement limité) dont l'unicité a été démontrée dans la section précédente. Autrement dit, on écrira dans ce paragraphe $f(x_0+h) = \mathrm{P}_f(h) + o(h^n)$ et $g(x_0+h) = \mathrm{P}_g(h) + o(h^n)$ où P_f et P_g sont deux polynômes de degré n. Il est parfois commode d'écrire $o(h^n) = h^n \varepsilon(h)$ où $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Définition 5.5 (troncature polynomiale). — *Si* $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k$ *définit une fonction polynomiale, et si* $0 \leq n \leq d$*, on pose*

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{P})(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

qui définit la troncature de P *de degré* n.

Lemme 5.6 (troncature de DL). — *Si* f *admet un DL à l'ordre* n *alors* f *admet un DL à l'ordre* k *pour tout* $0 \leq k \leq n$ *et on a*

$$f(x_0 + h) = \mathrm{T}_k(\mathrm{P}_f)(h) + o(h^k)\,.$$

Démonstration. — On vérifie que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{P}_f(h) - \mathrm{T}_k(\mathrm{P}_f)(h)}{h^k} = 0$$

qui découle du fait que les monômes qui apparaissent dans cette expression sont tous de degré strictement supérieur à k. ■

Proposition 5.7. — *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle ouvert contenant* x_0 *et admettant tout deux un DL au voisinage de* x_0 *à l'ordre* n.

- *Somme :* $f + g$ *admet un DL à l'ordre* n *qui s'obtient en effectuant la somme des deux polynômes.*
- *Multiplication par un scalaire : si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* λf *admet un DL à l'ordre* n *qui s'obtient en multipliant le DL de* f *par* λ.
- *Produit :* fg *admet un DL à l'ordre* n*, dont la partie régulière est* $\mathrm{T}_n(\mathrm{P}_f \mathrm{P}_g)$ *: si* $\mathrm{P}_f(h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i$ *et* $\mathrm{P}_g(h) = \sum_{j=0}^{n} b_j h^k$ *alors*

$$\mathrm{P}_{fg}(h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) h^k\,.$$

Démonstration. — Dans toutes ces démonstrations, on utilise l'unicité du DL et le fait que le reste est bien négligeable devant h^n.

- Somme :

$$(f+g)(x_0+h) = \mathrm{P}_f(h) + \mathrm{P}_g(h) + h^n(\varepsilon_f(h) + \varepsilon_g(h))$$

  et on vérifie que

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^n(\varepsilon_f(h) + \varepsilon_g(h))}{h^n} = 0\,.$$

- Multiplication par un scalaire :

$$(\lambda f)(x_0 + h) = \lambda \mathrm{P}_f(h + \lambda h^n \varepsilon_f(h)$$

  et on vérifie que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda h^n \varepsilon_f(h)}{h^n} = 0\,.$$

- Produit :

$$\begin{aligned}
(fg)(x_0+h) &= (\mathrm{P}_f(h) + h^n\varepsilon_f(h))(\mathrm{Q}_g(h) + h^n\varepsilon_g(h)) = \mathrm{P}_f(h)\mathrm{P}_g(h) + h^n(\mathrm{P}_f(h)\varepsilon_g(h) + \mathrm{P}_g(h)\varepsilon_f(h)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) h^k + h^{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) h^{k-(n+1)} + h^n(\mathrm{P}_f(h)\varepsilon_g(h) + \mathrm{P}_g(h)\varepsilon_f(h))
\end{aligned}$$

  et on vérifie que

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) h^{k-(n+1)} + h^n(\mathrm{P}_f(h)\varepsilon_g(h) + \mathrm{P}_g(h)\varepsilon_f(h))}{h^n} = 0\,.$$

■

Proposition 5.8 (Composition de fonctions). — *Si u admet un DL à l'ordre n en x_0 et si v admet un DL à l'ordre n en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ possède un DL à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière vaut $\mathrm{T}_n(\mathrm{P}_v \circ \mathrm{P}_u)$, où P_u et P_v sont les parties régulières des DL de u et v.*

DÉMONSTRATION. — On écrit $u(x_0+h) = u(x_0) + \mathrm{Q}(h) + h^n\varepsilon_u(h)$.

$(v\circ u)(x_0+h) = v(u(x_0)+\mathrm{Q}(h)+h^n\varepsilon_u(h)) = \mathrm{P}_v(\mathrm{P}_u(h)+h^n\varepsilon_u(h))+(\mathrm{Q}(h)+h^n\varepsilon_u(h))^n\varepsilon_v(\mathrm{Q}(h)+h^n\varepsilon_u(h))\,.$

En remarquant que $\mathrm{Q}(h) = u'(x_0)h + o(h)$, on obtient $(\mathrm{Q}(h) + h^n\varepsilon_u(h))^n = h^n(u'(x_0) + o(1))$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{Q}(h) + h^n\varepsilon_u(h))^n\varepsilon_v(\mathrm{Q}(h) + h^n\varepsilon_u(h))}{h^n} = 0$$

donc le DL de $v \circ u$ égal à celui de $\mathrm{P}_v(\mathrm{P}_u(h) + h^n\varepsilon_u(h))$.

On écrit

$$\mathrm{P}_v(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

de sorte que

$$\mathrm{P}_v(\mathrm{P}_u(h) + h^n\varepsilon_u(h)) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\mathrm{P}_u(h) + h^n\varepsilon_u(h))^k\,.$$

La formule du produit implique que pour chaque $0 \le k \le n$, on a

$$(\mathrm{P}_u(h) + h^n\varepsilon_u(h))^k = \mathrm{T}_n(\mathrm{P}_u(h)^k) + o(h^n)$$

donc la formule de la somme implique

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_v(\mathrm{P}_u(h) + h^n\varepsilon_u(h)) &= \sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{T}_n(\mathrm{P}_u(h)^k) + o(h^n) \\
&= \mathrm{T}_n\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \mathrm{P}_u(h)^k\right) + o(h^n) \\
&= \mathrm{T}_n(\mathrm{P}_v(\mathrm{P}_u(h)) + o(h^n)\,.
\end{aligned}$$

■

Exemple.— DL à l'ordre 2 en 0 de $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$ On commence par le DL de $(1/(1-x)$ à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

que l'on injecte dans l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} = \mathrm{e}^{1+x+x^2+o(x^2)}\,.$$

Quand x tend vers 0, l'argument de l'exponentielle tend vers 1 : nous avons donc besoin d'un DL de la fonction exp en 1 :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}\cdot\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\right)$$

Ce DL se trouve en remarquant que $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{x-1}$ et en utilisant le DL de exp en 0. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} &= \mathrm{e}\cdot\left(1 + (x+x^2) + \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \mathrm{e}\cdot\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 5.9 (DL des quotients). — *Si $u(x_0) = 0$ et si u admet un DL à l'ordre n en x_0, alors $\frac{1}{1-u}$ admet un DL à l'ordre n dont la partie régulière est $\mathrm{T}_n(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_u^k)$ où P_u est la partie régulière du DL de u. Du coup, le DL d'un quotient s'obtient en combinant les DL du produit et de l'inverse.*

5.4 Développements limités classiques

Voici une liste de DL classiques à connaître.

– $$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)$$

– $$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

– $$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

– $$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

– $$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

– $$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

– $$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

– $$\sin(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

– $$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}++o(x^7)$$

– $$\mathrm{ch}(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

– $$\mathrm{sh}(x) = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

– $$\mathrm{th}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$$

– $$\arcsin(x) = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+o(x^{2n+2})$$

– $$\arccos(x) = \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+o(x^{2n+2})$$

– $$\mathrm{argsh}(x) = x-\frac{x^3}{2\cdot 3}-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n+1)}+o(x^{2n+2})$$

– $$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

– $$\mathrm{argth}(x) = x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

A Une fonction continue nulle part dérivable

On donne un exemple de fonction continue nulle part dérivable dû à G. de Rham. Si $x \in \mathbb{R}$, on définit sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ comme l'entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$$

associe à un réel x sa distance à l'entier le plus proche.

Théorème A.1. — *La formule*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} \varphi(2^k x)$$

définit une application continue et nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$.

On écrit

$$\sum_{k \geq 0} u_k \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} u_k \,.$$

En particulier, dans ce qui suit, les sommes sont d'abord traitées pour un nombre fini de termes suivi d'un passage à la limite. Lorsque (u_n) est à termes positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante, donc convergente si et seulement si ces sommes sont majorées.

La démonstration comporte trois étapes : montrer que f est bien définie, montrer que f est continue, et enfin, montrer que f est nulle part dérivable.

Pour cela, nous commencerons par rappeler quelques faits concernant les suites géométriques, puis nous établirons quelques propriétés de la fonction φ.

Lemme A.2. — *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite récurrente telle que $u_{k+1} = q u_k$ pour tout $k \geq 0$ et pour un réel $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} \,.$$

En particulier, si $|q| < 1$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k \geq 0} u_k = \frac{u_0}{1-q} \,.$$

Lemme A.3. — *La fonction φ vérifie les popriétés suivantes.*

1. *Elle est continue.*
2. *Elle prend ses valeurs dans $[0, 1/2]$, avec, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\varphi(p) = 0$ et $\varphi(p + 1/2) = 1/2$,*
3. *Soit $p \in \mathbb{Z}$; si $x, y \in [p, p+1/2]$ou $x, y \in [p+1/2, p+1]$, alors $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$.*
4. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + k) = \varphi(x)$.*

Démonstration. — Prenons $p \in \mathbb{Z}$. Si $x \in [p, p + (1/2)[$, alors $(x + 1/2) \in [p + 1/2, p + 1[$, donc $\lfloor x + 1/2 \rfloor = p$ et comme $p \leq x$, on a $\varphi(x) = |x - p| = x - p$. Donc φ est continue sur $[p, p + 1/2[$, $\varphi(p) = p - p = 0$ et

$$\lim_{x \to p+1/2, x < p+1/2} \varphi(x) = 1/2 \,.$$

De plus, si $p \leq x < p + 1/2$, alors $0 \leq x - p \leq 1/2$ donc $\varphi(x) \in [0, 1/2]$. Enfin, si $x, y \in [p, p + 1/2[$, alors

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(x - p) - (y - p)| = |x - y| \,.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, on a $(x + k) \in [p + k, p + k + (1/2)[$, donc $\varphi(x + k) = x + k - (p + k) = x - p = \varphi(x)$.

Maintenant, si $x \in [p + (1/2), p + 1[$, alors $(x + 1/2) \in [p + 1, p + 3/2[$, donc $\lfloor x + 1/2 \rfloor = p + 1$ et comme $p + 1 \geq x$, on a $\varphi(x) = |x - (p + 1)| = p + 1 - x$. Donc φ est continue sur $[p + 1/2, p + 1[$, $\varphi(p + 1/2) = 1/2$ et

$$\lim_{x \to p+1, x < p+1} \varphi(x) = 0 \,.$$

Ceci montre que φ est continue, car elle est continue sur chaque intervalle et les valeurs coïncident aux bornes.

De plus, si $p+1/2 \leq x \leq p+1$ alors $0 \leq p+1-x \leq 1/2$ donc $\varphi(x) \in [0,1/2]$. Enfin, si $x, y \in [p+1/2, p+1[$, alors

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |(p+1-x) - (p+1-y)| = |x-y|\,.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, on a $(x+k) \in [p+k+1/2, p+k+1/2[$, donc $\varphi(x+k) = (p+k+1) - (x+k) = p+1-x = \varphi(x)$. ■

Proposition A.4. — *La fonction f est bien définie.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{R}$; d'après le lemme A.3 **2.**, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$. $0 \leq \varphi(y) \leq 1/2$. Par conséquent, la fonction f est définie par une série à termes positifs, donc il suffit de montrer qu'elle est majorée. Or, les lemmes A.3 **2.** et A.2 impliquent

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\varphi(2^k x)}{2^k} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1/2}{2^k} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1\,.$$

Donc f est bien définie. ■

Proposition A.5. — *La fonction f est continue.*

Démonstration. — Comme f est une série convergente à termes positifs, on en déduit que, si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) - f(y) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y))\,.$$

On se fixe $\varepsilon > 0$. Il existe $n \geq 1$ tel que $1/2^n \leq \varepsilon/2$, de plus, le lemme A.3 **2.** nous dit que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 1/2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $m \geq n$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \geq k \geq n} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)) \right| &\leq \sum_{m \geq k \geq n} \frac{1}{2^k} \left| \varphi(2^k x) - \varphi(2^k y) \right| \\ &\leq \sum_{m \geq k \geq n} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2} \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{k+1}} \\ &\leq \frac{1/2^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\left| \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Rappelons qu'une somme finie de fonctions continues est continue. D'après le lemme A.3 **1.**, étant donné x, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $|x-y| \leq \alpha$, alors

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Donc, si $|x-y| \leq \alpha$, alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)) \right| + \left| \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k x) - \varphi(2^k y)) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ceci montre la continuité de f. ■

Pour montrer que f n'est pas dérivable, nous allons montrer que la condition suffisante énoncée dans le lemme suivant n'est pas vérifiée.

Lemme A.6. — *Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $x \in \mathrm{I}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Soient (y_n) et (z_n) deux suites tendant vers x telles que $y_n \leq x \leq z_n$. Alors*

$$\lim \frac{g(y_n) - g(z_n)}{y_n - z_n} = g'(x)\,.$$

Démonstration. — Si g est dérivable en x, alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{y\to x} \varepsilon(y) = 0$ et telle que, pour tout $y \in \mathrm{I}$, on ait

$$g(y) = g(x) + g'(x)(y-x) + (y-x)\varepsilon(y)\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{g(y_n) - g(z_n)}{y_n - z_n} &= \frac{g(x) + (y_n - x)g'(x) + (y_n - x)\varepsilon(y_n)}{y_n - z_n} - \frac{g(x) + (z_n - x)g'(x) + (z_n - x)\varepsilon(z_n)}{y_n - z_n} \\
&= \frac{(y_n - z_n)g'(x) + (y_n - x)\varepsilon(y_n) - (z_n - x)\varepsilon(z_n)}{y_n - z_n} \\
&= g'(x) + \frac{(y_n - x)\varepsilon(y_n) - (z_n - x)\varepsilon(z_n)}{y_n - z_n}\,.
\end{aligned}$$

Or $x \in [y_n, z_n]$, donc

$$\begin{aligned}
|(y_n - x)\varepsilon(y_n) - (z_n - x)\varepsilon(z_n)| &\leq |y_n - x||\varepsilon(y_n)| + |z_n - x||\varepsilon(z_n)| \\
&\leq |y_n - z_n||\varepsilon(y_n)| + |y_n - z_n||\varepsilon(z_n)| \\
&\leq |y_n - z_n|(|\varepsilon(y_n)| + |\varepsilon(z_n)|)
\end{aligned}$$

et on peut en déduire

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(y_n - x)\varepsilon(y_n) - (z_n - x)\varepsilon(z_n)}{y_n - z_n} \right| \leq \lim_{n\to\infty} (|\varepsilon(y_n)| + |\varepsilon(z_n)|) = 0\,.$$

■

Proposition A.7. — *La fonction f et nulle part dérivable.*

Démonstration.— On se fixe $x \in \mathbb{R}$, et nous allons contredire la conclusion du lemme A.6, ce qui montrera que f n'est pas dérivable. Posons $y_n = (1/2^n)\lfloor 2^n x \rfloor$, et $z_n = y_n + (1/2^n)$. Par définition, on a $\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x \leq \lfloor 2^n x \rfloor + 1$, donc, en divisant par 2^n, on obtient $y_n \leq x \leq z_n$. Comme $|z_n - y_n| = 1/2^n$ qui tend vers zéro, on en déduit que (y_n) et (z_n) tendent vers x. De plus, on a aussi $2^{n+1}y_n \leq 2^{n+1}x < 2^{n+1}y_n + 2$, donc $2^{n+1}y_n \leq 2^{n+1}y_{n+1}$ et $y_n \leq y_{n+1}$. De même, $2^{n+1}z_n - 2 \leq 2^{n+1}x < 2^{n+1}z_n$, donc $2^{n+1}z_{n+1} \leq 2^{n+1}z_n$ et $z_{n+1} \leq z_n$.

Notons, pour $n \geq 1$,

$$r_n = \frac{f(y_n) - f(z_n)}{y_n - z_n} = 2^n(f(y_n) - f(z_n))\,.$$

Comme pour la continuité, nous avons

$$f(y_n) - f(z_n) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}(\varphi(2^k y_n) - \varphi(2^k z_n))\,.$$

Si $k \geq n$, alors $2^k y_n = 2^{k-n}\lfloor 2^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$, donc $\varphi(2^k y_n) = 0$ d'après le lemme A.3 **2.** . De même, $\varphi(2^k z_n) = 0$. Donc

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}(\varphi(2^k y_n) - \varphi(2^k z_n))\,.$$

Or, pour chaque $k < n$, $2^k y_n = 2^{k-n}\lfloor 2^n x \rfloor$ et $2^k z_n = 2^k y_n + 2^{k-n}$ sont contenus dans un intervalle de la forme $[p, p+1/2]$ ou $[p+(1/2), p+1]$, $p \in \mathbb{Z}$, donc, d'après le lemme A.3 **3.**, on a

$$|\varphi(2^k y_n) - \varphi(2^k z_n)| = |2^k y_n - 2^k z_n| = 2^{k-n}\,.$$

De plus, $[y_{n+1}, z_{n+1}] \subset [y_n, z_n]$ donc $[2^k y_{n+1}, 2^k z_{n+1}] \subset [2^k y_n, 2^k z_n]$; donc si $k < n$, alors

$$2^{n+1-k}(\varphi(2^k y_{n+1}) - \varphi(2^k z_{n+1})) = 2^{n-k}(\varphi(2^k y_n) - \varphi(2^k z_n))\,.$$

Du coup,

$$|r_{n+1} - r_n| = 2^{n+1-n}|\varphi(2^n y_{n+1}) - \varphi(2^n z_{n+1})| = 1\,.$$

Cela implique que (r_n) n'est pas convergente quand n ted vers l'infini, car sinon $(r_n - r_{n+1})_n$ tendrait vers zéro. Donc f n'est pas dérivable.

Voici le graphe de la fonction sur $[0,1]$ (on peut montrer que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$).