Fonctions continues

Peter Haïssinsky, Université d'Aix-Marseille

2015–2016

1 Introduction

Une *fonction* f est la donnée d'un triplet $(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$, où E, F et G sont des ensembles avec $\mathrm{G} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$, tel que, pour chaque $x \in \mathrm{E}$, il existe au plus un élément $y \in \mathrm{F}$ tel que $(x, y) \in \mathrm{G}$. On écrit $y = f(x)$ lorsque y existe. L'ensemble E s'appelle *la source*, F *le but* et G *le graphe de* f. On désigne en général une fonction par $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. L'ensemble de définition de f, noté $\mathrm{De}f(f) = \mathrm{D}(f)$ est l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x)$ existe. On a donc

$$\mathrm{G} = \{(x, f(x)),\ x \in \mathrm{D}(f)\}\,.$$

Par ailleurs, si $(x, y) \in \mathrm{G}$, x est un *antécédent* de y et y *l'image* de x.

Exemples. — On donne deux exemples deux fonctions.

1. Si E est un ensemble, on peut considérer l'application identité

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}, \{(x, x) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E},\ x \in \mathrm{E}\})\,.$$

2. Les projections

$$\begin{cases} \pi_{\mathrm{E}} = (\mathrm{E} \times \mathrm{F}, \mathrm{E}, \{(x, y, x) \in (\mathrm{E} \times \mathrm{F}) \times \mathrm{E},\ (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}\}) \\ \pi_{\mathrm{F}} = (\mathrm{E} \times \mathrm{F}, \mathrm{F}, \{(x, y, y) \in (\mathrm{E} \times \mathrm{F}) \times \mathrm{E},\ (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}\}) \end{cases}$$

sur E et F respectivement.

On dit que f est une *application* si l'ensemble de définition est tout E. Une fonction est injective si tout élément $y \in \mathrm{E}$ a au plus un *antécédent*, c'est-à-dire qu'il existe au plus un élément $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$; la fonction est *surjective* si tout élément de E a au moins un antécédent; enfin, une fonction *bijective* est une application à la fois injective et surjective. Par conséquent, on peut définir l'application réciproque $f^{-1} = (\mathrm{F}, \mathrm{E}, \mathrm{G}^{-1})$ où $\mathrm{G}^{-1} = \{(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E},\ (x, y) \in \mathrm{G}\}$.

Exercice 1.1. — *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ *des ensembles avec* $\mathrm{G} \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$. *Alors le triplet* $(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ *définit une fonction si et seulement si la projection* $\pi_{\mathrm{E}} : \mathrm{G} \to \mathrm{E}$ *est injective.*

Lorsque la fonction f n'est pas bijective, on peut considérer une fonction réciproque, qui est uniquement définie sur les parties de F: on a donc une fonction $f^{-1} : \mathcal{P}(\mathrm{F}) \to \mathcal{P}(\mathrm{E})$ telle que, si $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$, alors

$$f^{-1}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{A}\}\,.$$

Composition de fonctions.— Etant données deux fonctions $f = (\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{G}_f)$ et $g = (\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3, \mathrm{G}_g)$, on définit la fonction composée $g \circ f = (\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_3, \mathrm{G})$ où G est l'ensemble des couples $(x_1, x_3) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_3$ tels qu'il existe $x_2 \in \mathrm{E}_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{G}_f$ et $(x_2, x_3) \in \mathrm{G}_g$. En particulier, on a $\mathrm{De}f(g \circ f) = \mathrm{De}f(f) \cap f^{-1}(\mathrm{De}f(g))$. Autrement dit, la fonction $g \circ f : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_3$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Il faut faire attention à ce que, en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Si $f = (\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ est bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

On parle de fonction numérique lorsque E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. En général, une fonction f est définie par une formule $f(x) = \ldots$ faisant intervenir la variable x, avec en sous-entendu

$\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$, et la première question est de déterminer l'ensemble de définition, c'est-à-dire, l'ensemble maximal des $x \in \mathbb{R}$ où la formule $f(x)$ a un sens.

La notion de fonction continue répond à la question suivante: quand peut-on supposer qu'une fonction est constante en première approximation ? Autrement dit, étant donné $x_0 \in \mathbb{R}$, si x est assez proche de x_0, alors on peut considérer que $f(x)$ est proche de $f(x_0)$.

2 Notion de limite et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une application définie sur un sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite ℓ en $a \in \mathrm{D}$ si, pour tout $\alpha > 0$, $(]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}) \cap \mathrm{D} \neq \varnothing$ et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 < |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Attention: ici, on suppose $x \neq a$. Autrement dit, chaque fois que l'on se fixe un terme d'erreur $\varepsilon > 0$, si on choisit x assez proche de a, mais différent de a (il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 < |x-a| < \alpha$), alors $f(x)$ est égal à ℓ à ε près. On écrit

$$\lim_{x(\neq a) \to a} f(x) = \ell\,.$$

Dans cette défnition, on sous-entend que l'on ne considère que des points $x \in \mathrm{D}$.

Si D est non bornée. on peut définir la notion de limite en $\pm\infty$, comme pour les suites numériques. On dira que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ telle que si $x \in \mathrm{D}$ et $x \geq \mathrm{M}$ alors $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. De même,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ telle que si $x \in \mathrm{D}$ et $x \leq \mathrm{M}$ alors $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Remarque 2.1. — *Comme pour les suites, on s'assure que la notion de limite est unique: supposons ℓ et ℓ' deux limites au point a ou en $\pm\infty$. Prenons $\varepsilon > 0$; pour x assez proche de a ou de $\pm\infty$, on aura $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$ et $|f(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2$. Du coup,*

$$|\ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon$$

et $\ell = \ell'$.

Définition 2.2 (continuité). — *Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une application définie sur un sous-ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est continue au point $a \in \mathrm{D}$ si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

L'application $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est continue si elle est continue en chaque point $a \in \mathrm{D}$.

En fait, ici, que l'on prenne $x = a$ ou non ne change rien.

Dire que f n'est pas continue au point a signifie qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver $x \in \mathrm{D}$ qui vérifie $|x - a| \leq \alpha$ et $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$.

Limites à droite et à gauche.— On peut aussi s'intéresser à des « demi-limites » en ne s'intéressant qu'aux valeurs de x supérieures ou inféreures à a. On dira que f admet une limite ℓ *à droite* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. On écrit

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \ell = f(a^+) = f(a+0) = f_d(a)\,.$$

De même, on dira que f admet une limite ℓ *à gauche* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. On écrit

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \ell = f(a^-) = f(a-0) = f_g(a)\ \ .$$

Le même argument que dans la remarque montre l'unicité des limites à droite et à gauche.

Ces notions s'appliquent aussi à la continuité: une fonction f est continue à droite au point a si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

et elle est continue à gauche si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\,.$$

Proposition 2.3. — *La limite d'une fonction f existe au point a si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et coïncident:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Dans ce cas, la limite de f en a est la limite commune.

Démonstration. — Si la limite de f existe et vaut ℓ, alors les limites à droite et à gauche existent et valent ℓ, car « qui peut le plus peut le moins ». C'est la réciproque qui est intéressante. Notons

$$\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Prenons $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_+ > 0$ tel que si $0 < x - a < \alpha_+$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. De même, il existe $\alpha_- > 0$ tel que si $0 < a - x < \alpha_-$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Du coup si $\alpha = \min\{\alpha_+, \alpha_-\}$ et si $0 < |x - a| \leq \alpha$ alors on obtient $0 < x - a < \alpha_+$ ou $0 < a - x < \alpha_-$ selon que x est supérieur ou inférieur à a. Mais dans les deux cas, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Donc

$$\lim_{x(\neq a)\to a} f(x) = \ell\,.$$

■

Corollaire 2.4. — *Une fonction f est continue au point $a \in \mathrm{D}(f)$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\,.$$

Prolongement continu/restriction.— Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}\setminus \mathrm{D}$ accessible de D au sens suivant: il existe une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans D qui tend vers a. L'application f *admet un prolongement continu à* $\mathrm{D} \cup \{a\}$) si la limite de $f(x)$ quand $x \in \mathrm{D}$ tend vers a existe. Dans ce cas, on pose $\mathrm{F} : \mathrm{D} \cup \{a\}$ que l'on définit par $\mathrm{F}(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{F}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Ainsi, la fonction F est un prolongement continu de f.

Si $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est une application et si $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}$, *la restriction de f à* A est l'application $g : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. On écrit aussi $g = f|_{\mathrm{A}}$.

2.1 Lien avec les suites

On exprime la continuité ponctuelle à l'aide de suites. Cela nous permettra d'obtenir sa stabilité par les opérations usuelles.

Proposition 2.5. — *Une fonction f est continue en un point $a \in \mathrm{D}(f)$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathrm{D}(f)$ qui tend vers a, on a*

$$\lim f(x_n) = f(a)\,.$$

Démonstration. — Supposons f continue en a et prenons une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, la continuité implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| \leq \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, $\lim x_n = a$ implique l'existence d'un rang n_0 à partir duquel $|x_n - a| \leq \alpha$. En combinant ces deux faits, on obtient $|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, impliquant ainsi $\lim f(x_n) = f(a)$.

Réciproquement, supposons que f n'est pas continue en a. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in [a - (1/n), a + (1/n)]$ tel que $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. Notons que $|x_n - a| \leq 1/n$, donc la suite $(x_n)_n$ tend vers a mais $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$, donc $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers $f(a)$. ■

Corollaire 2.6. — *La fonction* $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ *n'est pas continue en* a *s'il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *et une suite* $(x_n)_n$ *de* D *qui tend vers* a *telles que* $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ *pour tout* $n \geq 1$.

En utilisant les suites, on obtient facilement la stabilité suivante.

Corollaire 2.7. — *Supposons* f, g *définies sur un intervalle* I *et soit* $a \in \mathrm{I}$. *On suppose que* f *et* g *sont continues au point* a. *Alors*

1. $\lambda f + \mu g$ *et* $f \times g$ *sont continues au point* a *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

2. f/g *est continue au point* a *si* $g(a) \neq 0$.

On déduit aussi la stabilité par composition.

Proposition 2.8. — *Soient* f, g *des fonctions définies sur des intervalles* I *et* J, *et soit* $a \in \mathrm{I}$. *On suppose que* $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, f *est continue au point* a, *et* g *continue au point* $f(a)$ *alors* $(g \circ f)$ *est continue au point* a.

Cette proposition peut s'appliquer à partir du moment où $\mathrm{I} \cap f^{-1}(\mathrm{J})$ contient un ensemble qui contient au moins une suite tendant vers a.

Démonstration. — Prenons une suite $(x_n)_n$ de I qui tend vers a et posons $y_n = f(x_n)$. Par hypothèses, $y_n \in \mathrm{J}$ et $\lim y_n = f(a)$ car f est continue au point a. Par ailleurs, g est continue au point $f(a)$ donc

$$\lim(g \circ f)(x_n) = \lim g(y_n) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)\,.$$

Comme cela est vérifiée pour toute suite de limite a, on obtient la continuité de $(g \circ f)$ au point a. ■

2.2 Suites récurrentes

On considère une application continue $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle fermé, et on s'intéresse aux suites $(u_n)_n$ définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), & n \geq 0, \\ u_0 \in \mathrm{I}\,. \end{cases}$$

Un aspect pratique des suites récurrentes est de trouver « facilement » des candidats à être des limites de ces suites.

Proposition 2.9. — *Si* $(u_n)_n$ *est convergente de limite* ℓ, *alors* $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. — Si (u_n) admet une limite ℓ et si f est continue, alors l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite

$$\ell = f(\ell)\,.$$

■

Il est possible d'avoir plusieurs choix et ses choix peuvent dépendre de la condition initiale u_0.

Exemple.— On considère les suites définies par

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - u_n^3$$

que l'on veut étudier en fonction de u_0.

Posons $f(x) = -x^3 + (3/2)x$. On étudie les solutions de l'équation $f(x) = x$. On obtient

$$-x^3 + \frac{x}{2} = -x\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

Nous avons donc trois points fixes, donc trois limites possibles: 0 et $\pm\sqrt{2}/2$.

Etudions les variations de (u_n). Pour cela on s'intéresse au signe de $u_{n+1} - u_n$, donc de $f(x) - x$. On a le tableau de signe suivant (en gardant en mémoire le signe devant).

x	$-\infty$	$-$	$-\sqrt{2}/2$	$-$	0	$+$	$\sqrt{2}/2$	$+$	$+\infty$
$x-\sqrt{2}/2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}/2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	-	

Nous nous limitons à l'intervalle $\mathrm{I}=[-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$. Il convient d'étudier aussi les variations de f. On a $f'(x)=-3x^2+(3/2)=(3/2)(1-2x^2)$; le signe de f' est positif sur I, donc f est croissante. En particulier, on a

$$\begin{cases} f([-\sqrt{2}/2,0])=[f(-\sqrt{2}/2),f(0)]=[-\sqrt{2}/2,0] \\ f([0,\sqrt{2}/2])=[f(0),f(\sqrt{2}/2)]=[0,\sqrt{2}/2] \end{cases}$$

Si $\sqrt{2}/2<u_0<0$, alors $-\sqrt{2}/2<u_1\leq u_0$. Montrons par récurrence que $-\sqrt{2}/2<u_{n+1}\leq u_n$: on l'a vu pour $n=1$. Si c'est vrai au rang n, alors, comme f est croissante on obtient $f(-\sqrt{2}/2)\leq f(u_{n+1})\leq f(u_n)$, c'est-à-dire $-\sqrt{2}/2\leq u_{n+2}\leq u_{n+1}$. Donc cette suite est décroissante, minorée, donc convergente. Elle tend vers un point fixe qui doit être strictement négatif, donc $-\sqrt{2}/2$.

En revanche, si $\sqrt{2}/2>u_0>0$, alors on montre que (u_n) est croissante majorée, donc convergente, vers un point fixe de f strictement positif: $\sqrt{2}/2$.

Enfin, si $u_0=0$, alors la suite (u_n) est constante, donc converge trivialement vers 0.

Exercice 2.10. — *Montrer que si u_0 est assez grand, alors* $\lim|u_n|=\infty$.

Etude de suites récurrentes.— Pour étudier une suite récurrente définie par une fonction f, on commence par déterminer l'ensemble de définition de f, ainsi que les intervalles $\mathrm{I}\subset\mathrm{D}(f)$ de sorte que $f(\mathrm{I})\subset\mathrm{I}$. Dans ce cas, dès que $u_k\in\mathrm{I}$ pour un indice k, alors $u_k\in\mathrm{I}$ pour tout $n\geq k$, comme le montre une récurrence élémentaire.

Il convient aussi d'étudier les variations de f et le signe de $x\mapsto f(x)-x$ afin d'étudier les variations de $(u_n)_n$. Si $f(\mathrm{I})\subset\mathrm{I}$ et f est croissante sur I, alors $(u_n)_n$ est monotone —croissante si $u_1\geq u_0$ et décroissante sinon. Si on a $f(x)\geq x$ pour tout $x\in\mathrm{I}$, alors $(u_n)_n$ est croissante et décroissante si $f(x)\leq x$ pour tout $x\in\mathrm{I}$.

En connaissant les variations de la suite et les points fixes de f, on peut déterminer si la suite sera convergente ou non et vers quelle limite.

3 Propriétés globales

On dit que f est *continue* si f est continue en chaque point de son ensemble de définition.

Les exemples les plus simples sont les fonctions constantes: il existe un réel $c\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=c$: on peut prendre α quelconque puisque $|f(x)-f(y)|=0$ pour tous réels x et y. Vient ensuite la fonction $x\mapsto x$: en effet, il suffit de choisir $\alpha=\varepsilon$.

Graphiquement, on se fixe une bande horizontale de hauteur 2ε centrée au point $(x_0,f(x_0))$, et on veut trouver une bande verticale contenant aussi ce point tel que la restriction du graphe à cette bande soit contenue dans l'intersection des deux bandes.

Théorème 3.1. — *Si f, g sont des fonctions continues définies sur des intervalles* I *et* J *alors*

1. *$f+g$ et $f\times g$ sont continues sur $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$;*
2. *f/g est continue sur $(\mathrm{I}\cap\mathrm{J})\setminus\{x,\ g(x)=0\}$;*
3. *$g\circ f$ est continue sur $\mathrm{I}\cap f^{-1}(\mathrm{J})$.*

Ce théorème implique notamment que tout polynôme est continu, ainsi que toute fraction rationnelle (rapport de polynômes), là où le dénominateur ne s'annule pas.

Autres exemples.— En plus des polynômes et des fractions rationnelles, les exemples de fonctions continues comprennent les fonctions sur leur ensemble de définition: exp, ln, les fonctions trigonométriques (cos, sin tan), leurs fonctions inverses, et toutes les compositions que l'on peut faire, comme par exemple les fonctions puissances.

3.1 Valeurs intermédiaires

Le résultat principal de ce paragraphe est fondamental: il permet de traduire la condition locale d'être continue en une propriété globale.

Théorème 3.2 (des valeurs intermédiaires). — *Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continue. Prenons $a, b \in \mathrm{I}$, $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. — Supposons $f(a) < f(b)$ et $y \neq f(a), f(b)$ de sorte que $f(a) \ < y < f(b)$, et posons

$$\mathrm{E} = \{x \in [a, b],\ f(x) \leq c\}\,.$$

Cet ensemble est non vide car $a \in \mathrm{E}$. Posons $c = \sup \mathrm{E}$. Comme b est un majorant de E, on a $c \leq b$ et, par définition, on peut trouver (x_n) dans E qui tend vers c de sorte que $f(c) \leq y$. Ceci implique $c < b$ car $y \neq f(b)$.

Prenons une suite $(x_n) \in]c, b]$ qui tend vers c. Par définition de c, on a $f(x_n) > y$ pour tout n et la continuité de f au point c implique $\lim f(x_n) = f(c)$. Par conséquent, on obtient $f(c) \geq y$. Du coup, $f(c) = y$.

Si $f(a) > f(b)$, alors on peut procèder de même, ou on applique l'argument précédent à la fonction $(-f)$. ■

On tire deux conséquences de ce théorème.

Corollaire 3.3. — *Soit f une fonction continue, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle pour tout $\mathrm{I} \subset \mathrm{D}(f)$.*

Démonstration. — On utilise la caractérisation des intervalles J suivante: $a, b \in \mathrm{J}$, $a < x < b \Rightarrow x \in \mathrm{I}$. Si $y, y' \in f(\mathrm{I})$, $y < y'$, alors on trouve $x, x' \in \mathrm{I}$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Pour tout $z \in [y, y']$, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un antécédent de z entre x et x'. Donc $z \in f(\mathrm{I})$. ■

Corollaire 3.4. — *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et supposons $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. — Si $f(a)f(b) < 0$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé, donc l'intervalle qu'ils bornent contiennent 0. Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un antécédent de 0 dans $]a, b[$. ■

3.2 Ouverts, fermés et compacts de $\mathbb{R}$

Un ensemble $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ est *ouvert* s E est vide ou si, pour chaque $x \in \mathrm{E}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathrm{E}$. Autrement dit, E contient tous les réels suffisamment proches de x. Un intervalle ouvert est donc ouvert, ainsi que toute réunion d'intervalles ouverts. Un ensemble $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ est *fermé* si $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est ouvert. Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est *compact* s'il est fermé et compact.

Fait 3.5. — *Si E est un ouvert, il existe un ensemble d'indice au plus dénombrable I, des réels $(a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $(b_i)_{i \in \mathrm{I}}$ tels que $\mathrm{E} = \cup]a_i, b_i[$.*

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note A_x l'ensemble des $a < x$ tels que $]a, x] \subset \mathrm{E}$. Cet ensemble est non vide par définition. Notons $a_x = \inf \mathrm{A}_x \in [-infty, x[$. On a $]a_x, x] \subset \mathrm{E}$ car, pour tout $y \in]a_x, x]$, il existe $a \in]a_x, a] \cap \mathrm{A}_x$ par définition de a_x. Donc $y \in]a_x, x] \subset]a_x, x]$. De plus, si a_x est finie, alors $a_x \notin \mathrm{E}$ car sinon on contredirait la définition de la borne inférieure.

De même, on définit B_x l'ensemble des $b > x$ tels que $[x, v[\subset \mathrm{E}$ et on note $b_x = \sup \mathrm{B}_x \in [x, +\infty]$. On a $[x, b_x[\subset \mathrm{E}$, si b_x est finie, alors $b_x \notin \mathrm{E}$. Enfin, on note $\mathrm{I}_x =]a_x, b_x[$ qui repŕesente le plus grand intervalle contenu dans E qui contient x.

Si $x, y \in \mathrm{E}$, alors ou bien $\mathrm{I}_x \cap \mathrm{I}_y = \varnothing$ ou bien $\mathrm{I}_x = \mathrm{I}_y$ et on a $\mathrm{E} = \cup_{x \in \mathrm{E}} \mathrm{I}_x$. Pour montrer que l'on a affaire à une réunion au plus dénombrable d'intervalles, on utilise les rationnels en remarquant que tout intervalle ouvert contient un rationnel: Si $a < b$, alors on trouve $n \geq 0$ tel que $|b - a| \geq 10^{-n}$ donc $10^{-n}\mathrm{E}(10^n x) \in]a, b[$. On écrit $\mathbb{Q} = \{x_n\}$. On extrait une sous-suite ainsi: On note n_0 le premier indice tel que $x_{n_0} \in \mathrm{E}$ et on pose $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_{x_{n_0}}$. Si n_k est construit, on note $\mathrm{E}_k = \cup_{0 \leq j \leq k} \mathrm{I}_k \subset \mathrm{E}$. Ou bien $\mathrm{E} = \mathrm{E}_k$ et on a fini, ou bien on note n_{k+1} le premier indice $n > n_k$ tel que $x_n \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{E}_k$ et on pose $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_{x_{n_k}}$. On obtient ainsi $\mathrm{E} = \cup \mathrm{I}_k$ où la réunion est finie ou dénombrable. ■

Proposition 3.6. — *Une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert* I *est continue si et seulement si, pour tout ouvert* $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathrm{E})$ *est ouvert.*

Démonstration. — Supposons f continue sur I. Prenons $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Si $f^{-1}(\mathrm{U}) = \varnothing$, alors $f^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert par définition. Sinon, prenons $x \in f^{-1}(\mathrm{U})$. Comme $f(x) \in \mathrm{U}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset \mathrm{U}$. Par continuité de f en x, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subset \mathrm{I}$ et, pour si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cela montre que $]x - \delta, x + \delta[\subset f^{-1}(\mathrm{U})$ impliquant ainsi que $f^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert.

Réciproquement, on suppose que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte. Prenons $x \in \mathrm{I}$ et $\varepsilon > 0$ quelconques. L'ensemble $f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$ est un ouvert non vide (il contient x), donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$]x - \delta, x + \delta[\subset (\mathrm{I} \cap f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)\,.$$

Par conséquent, si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cela établit la continuité au point x. ■

Fait 3.7. — *Un ensemble* F *est fermé si et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_n$ *convergente à valeurs dans* F *a sa limite dans* F.

Démonstration. — Supposons F fermé et prenons une suite $(x_n)_n$ convergente à valeurs dans F. Soit ℓ sa limite. Si $\ell \in (\mathbb{R} \setminus \mathrm{F})$, alos il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap \mathrm{F} = \varnothing$, mais cela implique $|x_n - \ell| \geq \varepsilon$, ce qui contredit que ℓ est la limite de $(x_n)_n$ donc $\ell \in \mathrm{F}$.

Réciproquement, supposons que toute suite $(x_n)_n$ convergente à valeurs dans F a sa limite dans F. Supposons que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ n'est pas ouvert: il existe donc $x \notin \mathrm{F}$ tel que, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver $x_n \in \mathrm{F}$ tel que $|x_n - x| \leq 1/n$. Du coup $(x_n)_n$ est une suite à valeurs dans F convergente vers x. On en déduit $x \in \mathrm{F}$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est ouvert et F est fermé. ■

Proposition 3.8. — *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*une définie sur un intervalle fermé* I *est continue si et seulement si, pour tout fermé* $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathrm{F})$ *est fermé.*

Démonstration. — Si f est continue et F est fermé, prenons une suite $(x_n)_n$ convergente de limite ℓ à valeurs dans $f^{-1}(\mathrm{F})$. La continuité implique $\lim f(x_n) = f(\ell)$. Or $f(x_n) \in \mathrm{F}$ pour tout n, donc $f(\ell) \in \mathrm{F}$ car F est fermé et donc $\ell \in f^{-1}(\mathrm{F})$, montrant ainsi que $f^{-1}(\mathrm{F})$ est fermé.

Réciproquement, on suppose que l'image réciproque de tout fermé est fermée. Prenons $x \in \mathrm{I}$ et $(x_n)_n$ une suite de I qui tend vers x. Si $(f(x_n))_n$ tend pas vers $f(x)$, on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite (n_k) tels que $|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon_0$. On écrit $\mathrm{F} = \mathbb{R} \setminus]f(x) - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0[$, qui fermé. Donc $f^{-1}(\mathrm{F})$ est un fermé qui contient $(x_{n_k})_k$ par construction. Or $\lim x_{n_k} = x$ car c'est une suite extraite d'une suite convergente vers x, donc $x \in f^{-1}(\mathrm{F})$. Mais cela devrait impliquer $|f(x) - f(x)| > 0$, ce qui est absurde. Donc f est continue au point x. ■

Proposition 3.9. — *Un sous-ensemble* K *de* $\mathbb{R}$ *est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans* K *admet une sous-suite convergente dans* K.

Démonstration. — Supposons K compact et prenons une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans K. Comme K est borné, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous fournit l'existence d'une sous-suite convergente. Comme K est fermé, cette limite est dans K.

R'eciproquement, supposons que toute suite à valeurs dans K admet une sous-suite convergente dans K. Si K était non borné, on pourrait construire une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans K telle que $|x_n| \geq n$. Une telle suite, tendant vers l'infini n'aurait aucune valeur d'adhérence. Donc K est borné. Si $(x_n)_n$ est une suite convergente à valeurs dans K, alors sa limite est dans K par hypothèse. Donc K est aussi fermé.■

Théorème 3.10. — *Si* $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *est une application continue et* K *est compact alors* $f(\mathrm{K})$ *est aussi compact. En particulier, l'image d'un intervalle compact est un intervalle compact.*

Démonstration. — Soit $(y_n)_n$ une suite à valeurs dans $f(\mathrm{K})$. Pour chaque n, il existe $x_n \in \mathrm{K}$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme K est compact, on peut trouver (x_{n_k}) qui soit convergente vers un réel x de K. Par conséquent, f étant continue, on a $\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) \in f(\mathrm{K})$. Donc $f(\mathrm{K})$ est compact.

Si K est un intervalle compact, alors $f(\mathrm{K})$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires et $f(\mathrm{K})$ est compact. ■

Remarque 3.11. — *Si on ne suppose pas l'intervalle compact, alors l'image peut être non bornée. C'est le cas de la fonction* $\tan :]-\pi/2.\pi/2[\to \mathbb{R}$.

Corollaire 3.12. — *Soit* $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ *une application continue définie sur un compact. Il existe* $m, \mathrm{M} \in \mathrm{K}$ *tels que, pour tout* $x \in \mathrm{K}$*, on a*

$$f(m) \leq f(x) \leq f(\mathrm{M})\,.$$

Démonstration. — Comme $f(\mathrm{K})$ est compact, $f(\mathrm{K})$ est borné, donc $f(\mathrm{K})$ admet une borne inférieure et une borne supérieure, qui sont dans $f(\mathrm{K})$ car $f(\mathrm{K})$ est fermé aussi. Par conséquent, il existe $m, \mathrm{M} \in \mathrm{K}$ tels que, pour tout $x \in \mathrm{K}$, on a $f(m) \leq f(x) \leq f(\mathrm{M})$. ■

3.3 Bijectivité

On s'interesse à la bijectivité des fonctions continues. Rappelons qu'une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ est *croissante* si $x > x'$ entraîne $f(x) \geq f(x')$, *strictement croissante* si $x > x'$ entraîne $f(x) > f(x')$, *décroissante* si $x > x'$ entraîne $f(x) \leq f(x')$, *strictement décroissante* si $x > x'$ entraîne $f(x) < f(x')$, Enfin f est monotone si f est croissante ou décroissante et *strictement monotone* si f est strictement croissante ou décroissante.

Théorème 3.13. — *Soit* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue définie sur un intervalle* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$*. La fonction* f *est bijective sur son image* $f(\mathrm{I})$ *si et seulement si* f *est strictement monotone. Dans ce cas, l'application réciproque* $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ *est continue et de même monotonie que* f*.*

Démonstration. — Par définition, $f : \mathrm{I} \to f(\mathrm{I})$ est surjective, donc on doit analyser quand f est injective.

Si f est strictement monotone, alors f est forcément injective puisque deux valeurs distinctes de x conduisent à deux valeurs distinctes de leurs images, par définition.

Supposons maintenant f non strictement monotone et montrons que f n'est pas injective. Quitte à considérer $(-f)$ le cas échéant, il existe $a < b < c$ tel que $f(a) \leq f(b)$ et $f(b) \geq f(c)$. Soit $\delta = \min\{f(b) - f(a), f(a) - f(c)$. On peut supposer $\delta > 0$ car sinon, f n'est clairement pas injective. Du coup, on a $f(a) - \delta/2 \in]f(a), f(b)[\cap]f(a).f(c)[$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires impliquent l'existence de $x \in [a, b]$ et $y \in [b, c]$ tels que $f(x) = f(y) = f(a) - \delta/2$. Comme $f(a) - \delta/2 \neq f(b)$, on en déduit que $x \neq y$. Donc f est non injective.

Supposons maintenant $f : \mathrm{I} \to f(\mathrm{I})$ continue et bijective. Quitte à considérer $(-f)$ le cas échéant, on peut supposer f strictement croissante. Comme $x < x'$ implique $f(x) < f(x')$, on obtient $y < y'$ implique $g(y) < g(y')$, donc g est aussi croissante.

Montrons que $g = f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est continue. Pour cela, on considère $y_0 \in \mathrm{I}$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Supposons qu'il $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \mathrm{I}$. On ainsi $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ car f est strictement croissante. On peut donc trouver $\alpha > 0$ tel que $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - \alpha$ et $f(x_0) + \alpha < f(x_0) + \varepsilon$. Du coup, si $|y - y_0| < \alpha$, alors $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$ et $g(f(x_0 - \varepsilon)) < g(y) < g(f(x_0 + \varepsilon))$; autrement dit, on a $x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$ et, en se rappelant que $x_0 = g(y_0)$, on obtient $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ pour tout $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$. Ceci montre la continuité au point y_0.

Si x_0 est une borne de I, par exemple, la borne inférieure, on procède de même en considérant $[x_0, x_0 + \varepsilon] \subset \mathrm{I}$; le cas de l'autre borne n'offre pas plus de difficulté. ■

Applications: fonctions réciproques.— L'étude précédente permet de justifier l'existence de fonctions réciproques des fonctions usuelles et de comprendre l'origine des ensembles de définition de ces fonctions.

Par exemple, $f : x \geq 0 \mapsto x^2 \geq 0$ est strictement croissante, bijective. L'application réciproque $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue. De même, la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $0, +\infty[$ dont l'inverse, $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

Les restrictions suivantes des fonctions trigonométriques $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ et $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ sont des bijections continues qui permettent définir les applications réciproques $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ et $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$. Notons que ces intervalles sont maximaux.

On a les mêmes constructions pour les autres fonctions réciproques.