Suites numériques

Peter Haïssinsky, Université d'Aix-Marseille

2015–2016

1 Introduction

Ce chapitre traite de l'étude des suites et de leur comportement, en particulier la notion de limite.

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ou complexes. Souvent, on note une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le terme de la suite u_n désigne le $n$ième (ou $n+1$-ième) terme, soit $u(n)$.

1.1 Des entiers naturels aux complexes

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$. La présentation la plus efficace postule l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, muni d'un élément 0 et d'une application « successeur » $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, vérifiant les axiomes (de Peano) suivants:

1. l'application s est injective;

2. 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel;

3. si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$ (axiome de récurrence).

On définit alors l'addition et la multiplication par récurrence par $a + 0 = a$ et $a + s(b) = s(a + b)$ (pour l'addition); $a.0 = 0$ et $as(b) = ab + a$ (pour la multiplication). On pose $1 = s(0)$, et on a $s(a) = s(a+0) = a+s(0) = a+1$, ce qui permet de supprimer l'application successeur et de la remplacer par $a \mapsto a + 1$. Enfin, la notion de successeur permet d'ordonner les entiers: on aura $m \leq n$ si $m = n$ ou si n est un successeur de m.

Les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ peuvent s'obtenir à partir de $\mathbb{N}$ en adjoignant à chaque entier naturel $n \neq 0$ un opposé $(-n)$ de sorte que $(\mathbb{Z}, +)$ a une structure de groupe commutatif:

1. élément neutre: 0 est son ensemble neutre: $n + 0 = 0 + n = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;

2. associativité: pour tous $m, n, p \in \mathbb{Z}$, on a $(m + n) + p = m + (n + p)$;

3. opposé: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe m, noté $(-n)$, tel que $m + n = n + m = 0$;

4. commutativité: pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $m + n = n + m$.

Plus précisément. Pour tout $n \neq 0$, n ou $(-n)$ est un entier naturel. On peut prolonger la fonction successeur de sorte que $s(-n) = -n + 1$. Un nombre est positif s'il est dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il est successeur de 0 et négatif si 0 est un successeur de ce nombre. La relation d'ordre s'étend sans problème avec la propriété $m \geq n$ si $m - n \geq 0$.

Avec la multiplication, les entiers relatifs sont maintenant dotés d'une structure d'anneau commutatif unitaire:

1. $(\mathbb{Z}, \times)$ est associatif et commutatif et 1 est élément neutre;

2. distributivité: pour tous $m, n, p \in \mathbb{Z}$, on a $(m + n)p = mp + np$

Les rationnels $\mathbb{Q}$ se définissent à partir de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ muni de la relation d'équivalence suivante: $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bd$: un rationnel, x, est un ensemble maximal de couples (a, b) équivalents deux à deux. On note x sous la forme a/b, où (a, b) est l'un de ses représentants. Les entiers relatifs se retrouvent dans $\mathbb{Q}$ en considérant $(n, 1)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On vérifie que la relation d'ordre et les opérations sur $\mathbb{Z}$ s'étendent en un corps: on gagne le fait que tout rationnel non nul admet un inverse pour la multiplication.

Contrairement aux entiers, qui contiennent des « trous », les rationnels n'en ont pas: entre deux rationnels $p/q < p'/q'$, il existe toujours un rationnel entre les deux, p.ex. $(p + p')/(q + q')$. Cependant, il existe des quantités que l'on ne peut pas représenter par un rationnel, par exemple, la longueur de la diagonale d'un carré de taille 1. En effet, le théorème de Pythagore implique qu'il s'agit d'un nombre dont le carré vaut 2, que l'on notera $\sqrt{2}$,

Pourquoi n'est-il pas rationnel? Supposons qu'il le soit de sorte que $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q > 0$. On peut remarquer que $1 < \sqrt{2} < 2$. Notons que $q\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ donc on peut considérer l'ensemble E des entiers naturels n non nuls tels que $n\sqrt{2}$ est entier. Cet ensemble est non vide puisque $q \in$ E. Soit m le plus petit des entiers de E, et notons $n = m\sqrt{2} - m$. On a $n < m$ car $\sqrt{2} - 1 < 1$ et $n\sqrt{2} = 2m - m\sqrt{2}$ est entier naturel; du coup $n \in$ E, mais n est plus petit que m: contradiction.

Il faut donc introduire une classe de nombres plus grande que $\mathbb{Q}$ si l'on veut que des quantités comme $\sqrt{2}$ existent. C'est le rôle de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont nous verrons une construction plus loin.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, comme l'ensemble des rationnels est un corps totalement ordonné, et vérifie l'axiome d'Archimède: pour tous $a, b > 0$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $na \geq b$. Le nom de cette propriété prend son origine dans l'*Arénaire* d'Archimède dans lequel il explique que toute quantité aussi grande soit-elle peut être mesurée par un nombre (entier); elle apparaît plus tôt dans les *Éléments* d'Euclide. en géométrie; elle permet par exemple de montrer que deux parallèlogrammes qui ont un côté de même longueur et de même hauteur ont même aire. C'est aussi cette propriété qui permet de définir la partie entière d'un réel: la partie entière $\mathrm{E}(x)$ d'un réel x est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$ (attention aux nombres négatifs).

Enfin, le corps $\mathbb{C}$ des complexes est le plus petit corps contenant les réels tel que tout polynôme à coefficients réels de degré au moins 1 ait une racine (complexe).

1.2 Rappels sur la valeur absolue et le module

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $|x| = \max\{x, -x\}$. On a aussi $\sqrt{x^2} = |x|$. Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. Le module d'un tel nombre est $|z| \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$. En particulier, il coïncide avec la valeur absolue si z est réel. Du coup, toutes les propriétés du module sont des propriétés de la valeur absolue. On a les propriétés suivantes.

1. Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

2. (homogénéité) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|zw| = |z| \times |w|$.

3. (inégalités triangulaires) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w| .$$

2 Notion de limite

La notion de limite est certainement la plus importante du chapitre. La difficulté est de trouver un formalisme adapté à la notion de limite, et ce que l'on entend par *une suite tend vers tel nombre.*

Tout d'abord, donnons un critère compliqué, mais néanmoins pratique, pour reconnaître qu'un nombre est nul.

Fait 2.1. — *Un nombre réel ou complexe x est nul si, et seulement, si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on a $|x| \leq \varepsilon$.*

Démonstration. — Dans un sens, il est clair que si $x = 0$, alors, par définition, on a aura $|x| = 0 \leq \varepsilon$ quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ choisi. L'intérêt réside dans la réciproque: supposons que $|x| < \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

Nous allons procéder par contraposée en montrant que si x est non nul, alors il existe une valeur $\varepsilon_0 > 0$ telle que $|x| > \varepsilon_0$. Pour cela, on remarque que, comme x est non nul, $|x|$ est non nul aussi, donc strictement positif. Du coup, si on prend $\varepsilon_0 \stackrel{\text{def.}}{=} |x|/2$, alors on aura d'une part $\varepsilon_0 > 0$ et $|x| > \varepsilon_0$ car $|x| - \varepsilon_0 = |x|/2 > 0$. ■

Exercice 2.2. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a < b + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors $a \leq b$.*

Remarque 2.3. — *En général, quand, dans ce cours, on note une constante ε, cela signifie que l'on y pense comme à un nombre arbitrairement petit. Ce sera aussi le cas pour la définition de limite.*

2.1 Définition et premiers exemples

Maintenant, nous voulons donner un sens au fait qu'une suite (u_n) admette une limite ℓ quand n tend vers l'infini. Cela signifie, que, dès que n sera choisi suffisamment grand, l'élément u_n sera arbitrairement proche de ℓ, ou u_n sera une bonne approximation de ℓ. Autrement dit, quelle que soit la marge d'erreur $\varepsilon > 0$ fixée, il existe un rang n_0 à partir duquel, c'est-à-dire dès que l'on choisit $n \geq n_0$, u_n est une approximation de ℓ à ε près: on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Cela donne:

Définition 2.4 (limite d'une suite). — *Une suite numérique tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On dit qu'une suite est convergente si elle admet une limite. On écrit $\ell = \lim u_n$. Sinon, on dit que la suite est divergente.*

De manière équivalente, tout disque $\mathrm{D}(\ell, r) = \{|z| < r\}$ de rayon r strictement positif contient tous les éléments de $(u_n)_n$ à l'exception d'un nombre fini.

La première chose à vérifier est l'unicité de la limite quand celle-ci existe.

Fait 2.5. — *Si une suite (u_n) est convergente alors sa limite est unique.*

Démonstration. — Supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2. Nous voulons montrer que $\ell_1 = \ell_2$, donc $\ell_1 - \ell_2 = 0$.

On choisit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_1$ alors $|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon/2$. De même, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_2$ alors $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon/2$. Prenons maintenant $k = n_1 + n_2$ de sorte que $|u_k - \ell_1| \leq \varepsilon/2$ et $|u_k - \ell_2| \leq \varepsilon/2$. Il vient, par l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - u_k) - (\ell_2 - u_k)| \leq |\ell_1 - u_k| + |\ell_2 - u_k| \leq \varepsilon\,.$$

D'après l'arbitraire sur le choix de $\varepsilon > 0$, le fait précédent montre que $\ell_1 = \ell_2$. ■

Exemple d'une suite convergente.— Posons, pour $n \geq 1$, $u_n = 1/n$. Le but est de montrer que $\lim u_n = 0$. On choisit donc $\varepsilon > 0$ arbitraire. On veut montrer que si n est assez grand, alors $|u_n| < \varepsilon$. Cela signifie que l'on doit avoir $1/n < \varepsilon$ ou autrement dit $n > (1/\varepsilon)$. Or, $1/\varepsilon$ est un nombre strictement positif, donc on peut trouver un entier $n_0 > 1/\varepsilon$ d'après la propriété d'Archimède. Du coup, si $n \geq n_0$, alors $1/n < \varepsilon$. Cela montre bien $\lim u_n = 0$.

Voyons maintenant comment écrire qu'une suite (u_n) ne tend pas vers ℓ. Il faut donc contredire la convergence: même si on choisit n_0 arbitrairement grand, on pourra toujours trouver un élément u_n de rang $n \geq n_0$ qui n'approche pas ℓ. Autrement dit, $\lim u_n \neq \ell$ signifie qu'il existe un écart $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout rang $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe au moins un rang $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geq \varepsilon_0$.

Exemple d'une suite divergente.— Posons $u_n = (-1)^n$ et montrons que (u_n) ne tend pas vers 1. On remarque que, dès que n est impaire, alors $u_n = -1$. Prenons donc $\varepsilon_0 = 1$ (cela suffit) et n_0 arbitraire. Si $k = 2n_0 + 1$, alors k est impaire et $k \geq n_0$. Du coup $|u_k - 1| = |-1-1| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0$. Donc la suite ne tend pas vers 1. Pour montrer qu'elle est divergente, il faut montrer qu'elle n'admet aucune limite. Le même argument permet de montrer que (u_n) ne tend pas vers (-1) en considérant des éléments de rang pair.

Prenons maintenant $\ell \neq 1, (-1)$. Il vient $|\ell| \neq 1$, donc on peut considérer $\varepsilon_0 = ||\ell| - 1|/2$, qui est bien strictement positif. Par l'inégalité triangulaire inverse, on a

$$|u_n - \ell| \geq ||u_n| - |\ell|| = |1 - |\ell|| = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0 \,.$$

Donc, quel que soit le rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \ell| > \varepsilon_0$. Donc (u_n) ne tend pas vers ℓ.

Comme ℓ est arbitraire, on conclut à la divergence de la suite (u_n).

2.2 Suites divergentes

Il existe plusieurs manières pour une suite d'être divergente. En particulier, cela peut provenir du fait que la suite « parte à l'infini », ce qui peut aussi être une propriété intéressante pour une suite.

Nous définissons ici, ce que signifie, pour une suite $(u_n)_n$ de réels, de tendre vers $\pm\infty$. Notez que cela n'a pas de sens pour des suites complexes. Nous verrons plus bas la notion correspondante.

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels. On dit que $\lim u_n = +\infty$ si, pour tout nombre $\mathrm{M} > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq \mathrm{M}$. Il faut penser à M comme à un nombre arbitrairement grand.

De même, on dit que $\lim u_n = -\infty$ si, pour tout nombre $\mathrm{M} > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \leq (-\mathrm{M})$. Il faut aussi penser à M comme à un nombre arbitrairement grand.

Donnons quelques exemples: la suite définie par $u_n = n^2$ ou $u_n = \ln n$ sont toutes deux des suites qui tendent vers $+\infty$. En revanche, la suite $u_n = (-1)^n n$ est toujours divergente, puisqu'elle change de signe.

Pour une suite (u_n) à valeurs complexes, il n'y a pas de $+$ ou $-$ l'infini qui tienne. En revanche, on pourra écrire $\lim u_n = \infty$ si la suite des modules $(|u_n|)_n$ tend vers $+\infty$: pour tout $\mathrm{M} > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_n| \geq \mathrm{M}$. Dans ce sens, la suite précédente, définie par $u_n = (-1)^n n$ tend vers l'infini. Il faut donc faire attention au contexte.

2.3 Exemples de limite de suites classiques

On énonce ici sans démonstration quelques limites à connaître. On rappelle le sens des expressions, pour $p > 0$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z + i \mathrm{Im}\, z} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}(\cos(\mathrm{Im} z) + i \sin(\mathrm{Im} z)) \quad \text{et} \quad p^z = \mathrm{e}^{z \ln p} \,.$$

1.

$$\lim n^p = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

2.

$$\lim z^n = \begin{cases} \infty & \text{si } |z| > 1 \\ 0 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

3. Si $p > 0$,

$$\lim p^{1/n} = 1 \,.$$

3 Suites de Cauchy

L'existence ou non de la limite d'une suite semble nous obliger à regarder toutes les limites possibles. Cela est loin d'être pratique. On introduit ici la notion de *suite de Cauchy* qui nous permettra d'obtenir un crière de convergence sans connaître *a priori* la limite. Ce critère sera très pratique pour montrer la divergence d'une suite. On commence par l'observation suivante:

Propriété 3.1. — *Si (u_n) est convergente, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que, si $p, q \geq n_0$, alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.*

L'intérêt de cette propriété est qu'elle ne fait pas intervenir la limite de manière explicite.

Démonstration. — Soit ℓ la limite de (u_n). Fixons-nous $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition de la limite, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$, Du coup, si on choisit $p, q \geq n_0$, on aura

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

■

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 3.2 (suite de Cauchy). — *Une suite (u_n) vérifie la propriété de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $p, q \geq n_0$ alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$. On dit d'une suite qu'elle est de Cauchy si elle vérifie la propriété de Cauchy.*

3.1 Construction des réels

Les suites de Cauchy donnent un moyen de construire l'ensemble des réels à partir des rationnels. On peut remarquer qu'il existe des suites de rationnels, de Cauchy, qui ne sont pas convergentes. C'est par exemple le cas de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\,.$$

Nous allons « compléter » l'ensemble des rationnels afin que toute suite de Cauchy soit maintenant convergente.

Nous esquissons une construction de $\mathbb{R}$ qui décrit les réels par les suites dont ils sont limites. Certains détails manquent, en particulier le formalisme rigoureux et la vérification de propriétés. Il s'agit surtout de donner une idée de la construction.

On note X l'ensemble des suites de rationnels qui vérifient la propriété de Cauchy. Nous dirons que deux telles suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont équivalentes si la suite $(x_n - y_n)_n$ tend vers 0. On pose $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de X où on ne distingue pas deux suites équivalentes. Cet ensemble $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des réels. Autrement dit, un élément de $\mathcal{R}$, que l'on appelle une *classe d'équivalence*, est une collection maximale de suites de Cauchy de rationnels qui sont équivalentes deux à deux; une suite de cette classe est un *représentant* de ladite classe.

Proposition 3.3. — *On a les propriétés suivantes.*

1. *On a une injection naturelle de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$.*
2. *L'ensemble $\mathcal{R}$ est muni d'une structure de corps compatible avec l'injection de $\mathbb{Q}$.*
3. *La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ se prolonge à $\mathcal{R}$: on a $(x_n)_n < (y_n)_n$ s'il existe $n_0 \geq 0$ tel que $x_n < y_n$ pour tout $n \geq n_0$.*

Démonstration. — Si $x \in \mathbb{Q}$, on lui associe la suite $(x_n)_n$ où $x_n = x$ pour tout x. Si $x, y \in \mathbb{Q}$ et $x \neq y$, alors $|x_n - y_n| = |x - y| > 0$, donc la suite $(x_n - y_n)_n$ ne tend pas vers zéro et on a bien défini une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$. Si $x \in \mathbb{Q}$, on écrira $(x_n) = x$ si $(x_n)_n$ est équivalente à la suite constante égale à x. En notant cette injection $\iota : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$, on retrouve $x \in \mathbb{Q}$ à partir de $\iota(x)$ en prenant la limite de n'importe quel représentant de $\iota(x)$.

On définit sur X l'addition par $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ et la multiplication par $(x_n) \times (y_n)_n = (x_n y_n)_n$. Pour montrer que ces opérations définissent des lois sur $\mathcal{R}$, il faut vérifier que le résultat de ces opérations ne dépend des suites choisies: si on remplace ces suites par des suites équivalentes, alors le résultat est équivalent au précédent.

On vérifie que si (x'_n) est équivalente à $(x_n)_n$ et $(y'_n)_n$ à $(y_n)_n$ alors leurs somme et produit sont aussi équivalents: on écrit

$$(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) = (x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)$$

et on vérifie ainsi que la limite tend bien vers zéro: soit $\varepsilon > 0$ fixé; il existe n_x tel que si $n \geq n_x$ alors $|x_n - x'_n| \leq \varepsilon/2$ et il existe n_y tel que si $n \geq n_y$ alors $|y_n - y'_n| \leq \varepsilon/2$. Du coup, si $n \geq n_x + n_y$ alors

$$|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| \leq \varepsilon\,.$$

On laisse le cas de la multiplication en exercice. Cela montre que $\mathcal{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication.

On vérifie facilement que $(\mathcal{R}, +)$ est un groupe, où on obtient l'opposé de (x_n) en prenant $(-x_n)_n$. De même, $(\mathcal{R}, +, \times)$ est un anneau qui étend $\mathbb{Q}$. Si $(x_n)_n$ n'est pas équivalente à la suite nulle, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout m, on puisse trouver $n \geq m$ tel que $|x_n| \geq \varepsilon_0$. Prenons $\varepsilon = \varepsilon_0/2$. Il existe $\mathrm{N} \geq 0$ tel que si $p, q \geq \mathrm{N}$ alors $|x_p - x_q| \leq \varepsilon_0/2$. Par conséquent, prenons $p \geq \mathrm{N}$ tel que $|x_p| \geq \varepsilon_0$: on a pour tout $n \geq \mathrm{N}$,

$$|x_n| \geq |x_p| - |x_n - x_p| \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0/2 > 0\,.$$

Donc la suite $(x_n)_n$ ne s'annule pas pour $n \geq \mathrm{N}$. Cela nous permet de définir la suite $(y_n)_n$ par $y_n = x_n$ si $n \leq \mathrm{N}$ et $y_n = 1/x_n$ sinon. On peut vérifier que $(x_n) \times (y_n) = 1$. Ceci permet de montrer que $\mathcal{R}$ est un corps.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de X non équivalentes. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout m, on puisse trouver $n \geq m$ tel que $|x_n - y_n| \geq \varepsilon_0$. Prenons $\varepsilon = \varepsilon_0/3$. Il existe $\mathrm{N} \geq 0$ tel que si $p, q \geq \mathrm{N}$ alors $|x_p - x_q| \leq \varepsilon_0/3$ et $|y_p - y_q| \leq \varepsilon_0/3$. Par conséquent, prenons $p \geq \mathrm{N}$ tel que $|x_p - y_p| \geq \varepsilon_0$. Supposons $x_p \geq y_p$; on a pour tout $n \geq \mathrm{N}$,

$$x_n \geq x_p + (x_n - x_p) \geq y_p - \varepsilon_0/3 + (x_p - y_p) \geq y_n + (y_p - y_n) - \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0 \geq y_n - \varepsilon_0/3 - \varepsilon_0/3 + \varepsilon_0 \geq y_n + \varepsilon_0/3\,.$$

Par conséquent, on a $x_n > y_n$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Cela montre que, si deux suites ne sont pas équivalentes, alors l'une est supérieure à l'autre à partir d'un certain rang. Cela permet de définir une relation d'ordre sur $\mathcal{R}$ qui est compatible avec celle de $\mathbb{Q}$. ■

Convergence de suites dans $\mathcal{R}$. — Si $(x_n)_n \in \mathrm{X}$, on définit $|(x_n)_n| = (x_n)_n$ si $(x_n) \geq 0$ et sinon $(-x_n)_n$. Cela permet de définir la convergence dans $\mathcal{R}$. Si $(x_n^p)_p$ est une suite de X, on dira qu'elle admet pour limite (u_n) si, pour tout $\varepsilon > 0$ (rationnel), il existe p_0 tel que si $p \geq p_0$, alors $|(x_n^p) - (u_n)| \leq \varepsilon$: autrement dit, il existe n_p tel que si $n \geq n_p$ alors $|x_n^p - u_n| \leq \varepsilon$.

Vérifions que si $(y_n^p)_n$ est équivalente à $(x_n^p)_n$ pour chaque p, alors (y_n^p) tend aussi vers $(u_n)_n$ afin de montrer que cette définition ne dépend pas de la suite. Fixons-nous $\varepsilon > 0$ et appliquons la définition à notre suite initiale: il existe p_0 tel que si $p \geq p_0$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|x_n^p - u_n| \leq \varepsilon/2$.

Prenons p fixé et n_0 comme ci-dessus. Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que si $n \geq n_1$ alors $|y_n^p - x_n^p| \leq \varepsilon/2$ car ces suites sont équivalentes. Du coup, pour $n \geq n_1$, on aura

$$|y_n^p - u_n| \leq |y_n^p - x_n^p| + |x_n^p - u_n| \leq \varepsilon$$

montrant ainsi que $(y_n^p)_p$ tend aussi vers $(u_n)_n$.

Suites de Cauchy dans $\mathcal{R}$. — Si $(x_n^p)_p$ est une suite de X, on dira qu'elle est de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p_0 tel que si $p, q \geq p_0$, on a $|(x_n^p)_n - (x_n^q)_n| \leq \varepsilon$; autrement dit il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|x_n^p - x_n^q| \leq \varepsilon$.

Vérifions que si $(y_n^p)_n$ est équivalente à $(x_n^p)_n$ pour chaque p, alors (y_n^p) est aussi de Cauchy afin de montrer que cette propriété vit sur $\mathcal{R}$. Fixons-nous $\varepsilon > 0$ et appliquons la définition à notre suite initiale: il existe p_0 tel que si $p, q \geq p_0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|x_n^p - x_n^q| \leq \varepsilon/3$.

Prenons p, q fixés et n_0 comme ci-dessus. Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que si $n \geq n_1$ alors $|y_n^p - x_n^p| \leq \varepsilon/3$ et $|y_n^q - x_n^q| \leq \varepsilon/3$ car ces suites sont équivalentes. Du coup, pour $n \geq n_1$, on aura

$$|y_n^p - y_n^q| \leq |y_n^p - x_n^p| + |x_n^p - x_n^q| + |x_n^q - y_n^q| \leq \varepsilon$$

montrant ainsi que $(y_n^p)_p$ est de Cauchy.

Proposition 3.4. — *On a les propriétés suivantes.*

1. *Toute suite de Cauchy de rationnels converge dans $\mathcal{R}$ vers sa classe.*

2. *Toute suite de Cauchy de $\mathcal{R}$ est convergente.*

Le premier point signifie que les éléments de $\mathcal{R}$ sont décrits par les suites de rationnels qui ont ces éléments comme limite.

DÉMONSTRATION. — On utilisera les majuscules pour désigner les éléments de $\mathcal{R}$ et les minuscules pour désigner les rationnels. Soient $(a_n)_n$ une suite de Cauchy de rationnels, A sa classe dans $\mathcal{R}$, et, pour tout entier n, A_n l'élément de $\mathcal{R}$ représenté par la suite constante a_n. On cherche, pour un rationnel $\varepsilon > 0$ fixé, à prouver l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $\varepsilon - |\mathrm{A}_n - \mathrm{A}| \geq 0$.

Il suffit pour cela d'appliquer le critère de Cauchy à la suite $(a_n)_n$, en remarquant que si, pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$, on a $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ alors pour tout $n \geq \mathrm{N}$, la suite de rationnels $(\varepsilon - |a_n - a_m|)_m$ est positive ou nulle à partir du rang N donc la classe $\varepsilon - |\mathrm{A}_n - \mathrm{A}|$ qu'elle représente est positive.

Montrons maintenant que toute suite de Cauchy est convergente. Soit (U_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{R}$, il s'agit de prouver que cette suite est convergente dans $\mathcal{R}$. On a vu précédemment que tout élément de $\mathcal{R}$ est limite de rationnels. On peut donc choisir, pour tout entier $n > 0$, un rationnel a_n tel que $|\mathrm{U}_n - a_n| \leq 1/n$. La suite $(\mathrm{U}_n - a_n)_n$ est alors convergente vers 0. La suite $(a_n)_n$ est donc, comme $(\mathrm{U}_n)_n$, de Cauchy. On peut donc considérer sa classe dans $\mathcal{R}$ que l'on note Ul. Puisque (a_n) est convergente vers U et que $(\mathrm{U}_n - a_n)_n$ est convergente vers 0, la suite $(\mathrm{U}_n)_n$ est convergente vers U. ■

Remarque 3.5. — *Nous avons suivi ici la construction des réels par Cantor, initiée par Méry. Une construction alternative a été donnée par Dedekind. Une coupure de $\mathbb{Q}$ est une partie* A *de $\mathbb{Q}$ telle que*

1. A *est non vide et différente de $\mathbb{Q}$;*

2. *pour tout a de* A*, si $a' < a$ alors a' appartient à* A*;*

3. A *ne possède pas de plus grand élément.*

On définit alors $\mathbb{R}$ comme l'ensemble de ces coupures. A chaque rationnel $x \in \mathbb{Q}$, on associe donc $\mathrm{A}_x = \mathbb{Q} \cap]-\infty, x[$. On remarque alors que $\mathbb{R}$ se divise en deux ensembles, l'un comprenant les coupures dont le complémentaire admet un plus petit élément, coupure de la forme A_x pour $x \in \mathbb{Q}$, et l'autre comprenant les coupures dont le complémentaire ne possède pas de plus petit élément.

3.2 Critère de Cauchy

Cette construction implique notamment le critère fondamental suivant.

Critère de Cauchy.— *Une suite numérique est convergente si, et seulement si, elle vérifie la propriété de Cauchy.*

En passant à la contraposée, *une suite (u_n) n'est pas convergente si elle n'est pas de Cauchy. Autrement dit, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut trouver $p, q \geq n_0$ tels que $|u_p - u_q| \geq \varepsilon_0$.*

Reprenons notre exemple $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$. Si on calcule $|u_n - u_{n+1}|$, on trouve 2. Par conséquent, en prenant $\varepsilon_0 = 1$, pour tout n_0, on a $|u_{n_0} - u_{n_0+1}| \geq \varepsilon_0$. Donc la suite n'est pas de Cauchy, et elle est divergente.

Par conséquent, pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente, on cherche un écart $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites d'entiers tendant vers l'infini $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ telles que $|u_{p_n} - u_{q_n}| \geq \varepsilon_0$.

Remarque 3.6. — *Posons $u_n = \cos(\sqrt{n})$. On obtient ainsi une suite divergente; plus précisément, toute valeur de $[-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$. Or, pour tout $p \geq 0$, la suite $(u_{n+p} - u_n)_n$ tend vers zéro. Cette dernière condition n'est donc pas suffisante pour être convergente.*

On illustre le critère de Cauchy en étudiant les suites adjacentes.

Définition 3.7. — *Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$.*

Proposition 3.8. — *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes de même limite.*

DÉMONSTRATION. — Nous allons montrer que ces suites sont de Cauchy, Prenons $\varepsilon > 0$ arbitraire; il existe n_0 tel que, si $n \geq n_0$ alors $|v_n - u_n| \leq \varepsilon$ puisque $\lim(v_n - u_n) = 0$. Du coup, si $p, q \geq n_0$, alors on a

$$\begin{cases} u_{n_0} \leq u_p \leq v_p \leq v_{n_0} \\ u_{n_0} \leq u_q \leq v_q \leq v_{n_0} \end{cases}$$

Il vient $|u_p - u_q| \leq |u_{n_0} - v_{n_0}| \leq \varepsilon$, donc (u_n) est de Cauchy. De même, on montre que (v_n) est aussi de Cauchy. Elles sont donc convergentes de limite u et v respectivement.

Il reste à montrer que ces limites sont les mêmes. Pour cela on remarque

$$|u - v| \leq |u - u_n| + |u_n - v_n| + |v_n - v|,$$

donc, si $\varepsilon > 0$ est fixé, alors pour n assez grand, on aura $|u - u_n| \leq \varepsilon/3$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon/3$ et $|v_n - v| \leq \varepsilon/3$ impliquant ainsi $|u - v| < \varepsilon$. L'arbitraire sur ε implique $u = v$. ■

De manière équivalente:

Proposition 3.9 (segments emboîtés). — *Soient* $(\mathrm{I}_n)_n$ *une suite emboîtée de segments, c'est-à-dire que l'on a pour tout* $n \geq 0$ $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$ *et* $\mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n$*, et* $\lim |b_n - a_n| = 0$. *Leur intersection* $\cap_n \mathrm{I}_n$ *contient exactement un point.*

On donne une première application.

Théorème 3.10. — *L'ensemble des réels est indénombrable c'est-à-dire qu'il n'existe pas de bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. — Si $\mathbb{R}$ est dénombrable, alors il existe une suite $(u_n)_n$ qui parcourt tous les réels. Nous allons montrer qu'aucune suite ne peut contenir $\mathbb{R}$ en construisant un point qui n'y appartient pas.

Soit $(u_n)_n$ une suite. On construit par récurrence une suite d'intervalles emboîtés I_n de sorte que $u_n \notin \mathrm{I}_n$. Du coup, $\mathrm{E} = \cap \mathrm{I}_n$ contient des points tel que, pour chaque $n \geq 0$, u_n n'est pas dans I_n, donc pas dans E. Par conséquent, les points de E ne sont pas dans la suite.

On définit I_0. Si $u_0 \notin [0,1]$ alors on pose $\mathrm{I}_0 = [0,1]$. Sinon, si $u_0 \in [0,1/2]$, on pose $\mathrm{I}_0 = [2/3,1]$ et sinon $u_0 \in]1/2,1]$ et on pose $\mathrm{I}_0 = [0,1/3]$. On note ℓ_0 sa longueur. On suppose construit une suite décroissante d'intervalles jusqu'au rang n de sorte que $\mathrm{I}_j = [a_j, b_j]$, $\mathrm{I}_{j+1} \subset \mathrm{I}_j$, $\ell_j = |b_j - a_j| = \ell_0/3^j$ et $u_j \notin \mathrm{I}_j$. On considère $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$ et on procède comme pour le cas initial: si $u_{n+1} \notin \mathrm{I}_n$ alors on pose $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n$; sinon, si $u_{n+1} \in [a_n, a_n + \ell_n/2]$, on pose $a_{n+1} = a_n + (2/3)\ell_n$ et $b_{n+1} = b_n$ et sinon $u_{n+1} \in]a_n + (1/2)\ell_n, b_n]]$ et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = a_n + (1/3)\ell_n$. On vérifie que u_{n+1} n'est pas dans I_{n+1}. On obtient donc la suite recherchée. ■

3.3 Ensembles bornés, bornes supérieure et inférieure d'un ensemble de réels

Soit $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de réels. Un *majorant* de E est un nombre $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $x \leq \mathrm{M}$. Un *minorant* est un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $m \leq x$. Un ensemble est *majoré* s'il admet un majorant; de même, il est *minoré* s'il existe un minorant. Un ensemble est *borné* s'il existe un minorant et un majorant. Autrement dit, il existe un nombre positif $p \geq 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $|x| \leq p$. Ceci nous permet de définir la notion d'ensemble borné pour les complexes: il s'agit d'un ensemble $\mathrm{E} \subset \mathbb{C}$ tel qu'il existe une constante $\mathrm{M} < \infty$ de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $|z| \leq \mathrm{M}$.

Illustrons ces notions par un petit résultat:

Propriété 3.11. — *Une suite convergente est bornée.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(u_n)_n$ une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{C}$. Par définition de la convergence, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| \leq 1$. Autrement dit, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1$$

Maintenant, il nous reste à considérer les éléments $u_0, \ldots, u_{n_0}$ qui sont en nombre fini. Il existe donc un majorant de leur module que l'on note M. Il vient: pour tout $n \geq 0$, $|u_n| \leq \mathrm{M} + |\ell| + 1$. ■

Remarque 3.12. — *La réciproque est fausse, pensez à la suite* (u_n) *définie par* $u_n = (-1)^n$ *qui est bornée, mais divergente. Cette propriété permet de montrer, dans certains cas, qu'une suite est divergente.*

On a les propositions fondamentales suivantes.

Proposition 3.13. — *Un ensemble de réels* E *majoré admet un plus petit majorant, appelé la borne supérieure de* E*, noté* $\sup \mathrm{E}$*. Elle vérifie les trois propriétés suivantes:*

1. *si* $x \in \mathrm{E}$*, alors* $x \leq \sup \mathrm{E}$*;*
2. *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $x \in \mathrm{E} \cap [\sup \mathrm{E} - \varepsilon, \sup \mathrm{E}]$*;*
3. *si* M *est un majorant de* E*, alors* $\sup \mathrm{E} \leq \mathrm{M}$.

Pour un majorant de E*, les points* **2.** *et* **3.** *sont équivalents et expriment chacun que c'est le plus petit.*

Par symétrie, on a la proposition suivante:

Proposition 3.14. — *Un ensemble* E *minoré admet un plus grand minorant, appelé la borne inférieure de* E*, noté* $\inf \mathrm{E}$*. Elle vérifie les trois propriétés suivantes:*

1. *si* $x \in \mathrm{E}$*, alors* $x \geq \inf \mathrm{E}$*;*
2. *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $x \in \mathrm{E} \cap [\inf \mathrm{E}, \inf \mathrm{E} + \varepsilon]$*;*
3. *si* m *est un minorant de* E*, alors* $\inf \mathrm{E} \geq m$.

Pour un minorant de E*, les points* **2.** *et* **3.** *sont équivalents et expriment chacun que c'est le plus grand.*

On montre maintenant la proposition 3.13 (on laisse la proposition 3.14 en exercice).

Démonstration de la proposition 3.13. — S'il existe un plus grand élément dans E, alors cet élément est la borne supérieure.

Sinon, soient $a_0 \in \mathrm{E}$ et b_0 un majorant de E. Nous allons construire deux suites adjacentes $(a_n)_n$ et (b_n) qui vont tendre vers $\sup \mathrm{E}$. On procède par récurrence. On suppose que a_n et b_n sont construits de sorte que

1. a_n n'est pas un majorant et $a_{n-1} \leq a_n$;
2. b_n est un majorant et $b_{n-1} \geq b_n$;
3. on a $|a_n - b_n| \leq |a_0 - b_0|/2^n$.

Nous définissons maintenant a_{n+1} et b_{n+1} comme suit.

- Si $(1/2)(a_n + b_n)$ est un majorant de E, on pose
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = (1/2)(a_n + b_n)\,. \end{cases}$$
- Sinon, on pose
$$\begin{cases} a_{n+1} = (1/2)(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = b_n\,. \end{cases}$$

On vérifie facilement, que dans chaque cas, on a bien $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, a_{n+1} n'est pas un majorant alors que b_{n+1} l'est. Enfin, on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} (1/2)(a_n + b_n) - a_n = (1/2)(b_n - a_n) = |a_0 - b_0|/2^{n+1} & \text{dans le premier cas} \\ b_n - (1/2)(a_n + b_n) = (1/2)(b_n - a_n) = |a_0 - b_0|/2^{n+1} & \text{dans le second cas}\,. \end{cases}$$

Ceci nous définit les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. Elles sont adjacentes par construction.

Notons ℓ leur limite commune. Montrons qu'il s'agit bien de la borne supérieure. Tout d'abord, montrons que ℓ est un majorant de E. Prenons $x \in \mathrm{E}$. Si $x = \ell$, alors $x \leq \ell$. Sinon, notons $\varepsilon = |x - \ell|$; pour n assez grand, on a $|b_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Du coup, comme b_n est un majorant, on a $x - b_n \leq 0$ et

$$x \leq (x - b_n) + b_n \leq b_n \leq \ell + \varepsilon/2 \leq \ell + |x - \ell|/2\,.$$

Si $x \geq \ell$, on obtient $|x-\ell| = x-\ell$ donc $x/2 \leq \ell/2$, ce qui implique $x = \ell$; sinon, on a $x < \ell$. Donc ℓ est bien un majorant de E.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe a_n tel que $\ell - a_n \leq \varepsilon$. Comme a_n n'est pas un majorant, il existe $a \in \mathrm{E}$, avec $a > a_n$. Or on a vu que ℓ était un majorant, donc $a \in]a_n, \ell]$. Du coup $\ell - a \leq \ell - a_n \leq \varepsilon$.

Quant au point **3.**, si M est un majorant et $\mathrm{M} < \ell$, alors notons $\varepsilon = (\ell - \mathrm{M})/2$. Il existe a_n tel que $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or comme a_n n'est pas un majorant, il existe $a \in]a_n, \ell[$. Du coup,

$$0 \leq \mathrm{M} - a \leq \mathrm{M} - a_n \leq \ell - a_n - 2\varepsilon \leq \varepsilon - 2\varepsilon < 0$$

ce qui est une contradiction. Donc $\mathrm{M} \geq \ell$. Par conséquent, ℓ est bien le plus petit majorant.

Il reste à montrer l'équivalence entre **2.** et **3.**. Soient s un majorant de E qui vérifie **2.** et M un autre majorant. Soit $\varepsilon > 0$; par **2.**, il existe $x \in \mathrm{E} \cap [s-\varepsilon, s]$, donc $\mathrm{M} \geq x \geq s - \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on en déduit $\mathrm{M} \geq s$: donc s vérifie **3.**. On procède par la contraposée pour montrer l'implication **3.** $\Rightarrow$ **2.**. Supposons donc que s est un majorant qui ne vérifie pas **2.**. Du coup, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{E} \cap [s-\varepsilon, s] = \varnothing$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $x \leq s - \varepsilon$ car s est un majorant et aucun élément ne se trouve entre les deux, donc on en déduit que $(s - \varepsilon)$ est un majorant strictement inférieur à s: ceci est donc le contraire de **3.**. ∎

Ces notions permettent de caractériser les intervalles comme suit.

Proposition 3.15. — *Un intervalle est un sous-ensemble* E *de* $\mathbb{R}$ *tel que, si* $x, y \in \mathrm{E}$*, avec* $x \leq y$*, alors tout* $z \in \mathbb{R}$ *compris entre* x *et* y *est dans* E*:*

$$x \leq z \leq y \implies z \in \mathrm{E}\,.$$

Démonstration. — On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ vérifie cette propriété. On s'intéresse ici à la réciproque: on suppose que E est un ensemble qui vérifie la propriété suivante: si $x, y \in \mathrm{E}$ avec $x \leq y$ et si $x \leq z \leq y$ alors $z \in \mathrm{E}$. Si E est vide, alors il n'y a rien à faire. Sinon, on considère $a \in \mathrm{E}$.

Si E admet un majorant, alors notons M sa borne supérieure. On remarque alors que $\mathrm{E} \cap]\mathrm{M}, +\infty[= \varnothing$ car M est un majorant de E.

- Ou bien $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a \leq x \leq \mathrm{M}$ implique $x \in \mathrm{E}$: ceci montre que E contient $[x, \mathrm{M}]$ et $\mathrm{E} \cap [a, , +\infty[= [a, \mathrm{M}]$.
- Ou bien $\mathrm{M} \notin \mathrm{E}$, et donc si $a \leq x < \mathrm{M}$ alors on peut trouver $y \in \mathrm{E} \cap [x, \mathrm{M}]$; du coup, on a $a \leq x \leq y$ et $x \in \mathrm{E}$. Par conséquent, E contient $[a, \mathrm{M}[$ et $\mathrm{E} \cap [a. + \infty[= [a, \mathrm{M}[$.

Si E n'admet pas de majorant, alors pour tout $x \geq a$, il existe $y \geq x$ dans E, impliquant ainsi $x \in \mathrm{E}$. Par conséquent E contient $[a, +\infty[$.

On procède de la même façon selon que E ait un minorant ou non, et que la borne inférieure soit dans E ou non. On conclut donc que $]-\infty, a] \cap \mathrm{E}$ est un intervalle qui contient a comme extrémité. En regroupant les deux intervalles obtenus, on en déduit que E est un intervalle. ∎

3.4 Suites équivalentes, notations de Landau

On suppose données deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ à valeurs complexes. On introduit un vocabulaire permettant de comparer leur comportement asymptotique (quand on fait tendre n vers $+\infty$). Les mêmes notions s'appliquent aussi aux fonctions.

On dit que la suite $(u_n)_n$ *domine* la suite $(v_n)_n$ s'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $|v_n| \leq \mathrm{C}|u_n|$ pour tout n. En fait, il suffit de vérifier cette propriété pour n assez grand, supérieur à un rang n_0 à déterminer, puisque les autres valeurs sont en nombre fini. On écrit alors $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ et on peut aussi dire que (v_n) est un grand O de (u_n).

Par exemple, $n = \mathrm{O}(n^2)$, $2n + 1/n = \mathrm{O}(n)$. Si (u_n) est bornée, on peut écrire $u_n = \mathrm{O}(1)$.

On dit que la suite (v_n) est *négligeable* devant $(u_n)_n$ si u_n ne s'annule pas pour n assez grand et si $\lim v_n/u_n = 0$. On écrit $v_n = o(u_n)$: la suite (v_n) est un petit o de (u_n).

Par exemple, on a aussi $10n = o(n^2)$, $14n^3 = o(\mathrm{e}^n)$, etc. Si (u_n) tend vers 0, on peut écrire $u_n = o(1)$.

Enfin, deux suites sont *équivalentes* si ces suites ne s'annulent pas pour n assez grand et si $\lim u_n/v_n = \lim v_n/u_n = 1$ et on écrit $u_n \sim v_n$ (aucune suite n'est équivalente à la suite nulle). Par exemple, on a $n + \mathrm{e}^n \sim \mathrm{e}^n$, $n + \cos n \sim n$, $\cos(1/n) \sim 1$.

On a la propriété utile suivante.

Proposition 3.16. — *Deux suites équivalentes sont ou bien toutes deux divergentes, ou bien toutes deux convergentes, et dans ce cas, elles ont même limite.*

Démonstration. — Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes, il suffit de montrer que si $(u_n)_n$ est convergente de limite ℓ, alors (v_n) est aussi convergente de limite ℓ.

On observe que

$$|v_n - u_n| = |u_n| \left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| .$$

Nous allons utiliser cette identité pour en déduire que $\lim v_n = \ell$.

Comme (u_n) est convergente, cette suite est bornée par une constante $\mathrm{M} > 0$. Prenons $\varepsilon > 0$; on peut choisir n_0 de sorte que si $n \geq n_0$, alors

$$\left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} \quad \text{et} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Du coup, on obtient, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leq |v_n - u_n| + |u_n - \ell| \\ &\leq |u_n| \left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \mathrm{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

■

4 Critères de convergence et propriétés

Nous proposons quelques critères permettant d'établir la convergence de suites.

4.1 Suites monotones

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que $(u_n)_n$ est *croissante* si, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. On dit que $(u_n)_n$ est *décroissante* si, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} \leq u_n$. Enfin, une suite est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Propriété 4.1. — *Si (u_n) est croissante, alors pour tous $n, p \geq 0$, on a $u_{n+p} \geq u_n$. De même, si la suite est décroissante alors $u_{n+p} \leq u_n$.*

Démonstration. — C'est l'occasion d'illustrer le principe de démonstration par récurrence. Supposons (u_n) croissante. On considère l'hypothèse de récurrence $\mathrm{H}(p)$: pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+p} \geq u_n$. Si $p = 0$ ou 1, alors c'est vrai par définition. Supposons que $\mathrm{H}(p)$ soit vraie, et montrons $\mathrm{H}(p+1)$. Comme (u_n) est croissante, on a $u_{n+p+1} \geq u_{n+p}$ et, d'après $\mathrm{H}(p)$, on a $u_{n+p} \geq u_n$. Du coup, on a $u_{n+p+1} \geq u_{n+p} \geq u_n$. Donc on a montré $\mathrm{H}(p+1)$ et la propriété est établie pour les suites croissantes. On laisse en exercice le cas des suites décroissantes. ■

L'objet principal de ce paragraphe sera d'établir le prochain énoncé.

Théorème 4.2. — *Une suite croissante majorée est convergente. Une suite décroissante et minorée convergente.*

Remarque 4.3. — *Une suite croissante est minorée —par le premier terme de la suite.*

La démonstration utilise la notion de borne supérieure et/ou inférieure.

Démonstration. — Supposons que $(u_n)_n$ est une suite croissante majorée. Comme la suite $(u_n)_n$ est majorée, elle admet une borne supérieure que nous notons ℓ. Du coup, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe n_0 tel que $\ell - u_{n_0} < \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. De plus, ℓ étant un majorant, on a $u_n \leq \ell$, donc $u_n \in]u_{n_0}, \ell[$ et on en déduit

$$|\ell - u_n| = \ell - u_n \leq \ell - u_{n_0} \leq \varepsilon\,.$$

On a donc montré l'existence de n_0 tel que, pour chaque $n \geq n_0$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

On laisse l'autre cas en exercice. ■

4.2 Autres propriétés

Nous proposons quelques critères permettant d'établir la convergence de suites.

Lemme 4.4. — *Une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes est convergente si et seulement si la suite de leurs parties réelles et imaginaires sont toutes deux convergentes. Dans ce cas, on a aussi convergence de la suite des modules.*

Démonstration. — On considère une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes et on écrit $u_n = a_n + ib_n$. Supposons (u_n) convergente de limite $\ell = x + iy$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Du coup, on a

$$|a_n - x| = \sqrt{|a_n - x|^2} \leq \sqrt{|a_n - x|^2 + |b_n - y|^2} = |u_n - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

De même, on obtient aussi $|b_n - y|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Donc (a_n) et (b_n) sont convergentes et on a

$$\begin{cases} \lim \mathrm{Re}\, u_n = \mathrm{Re}\, \lim u_n \\ \lim \mathrm{Im}\, u_n = \mathrm{Im}\, \lim u_n \end{cases}$$

Réciproquement, si on a $\lim a_n = x$ et $\lim b_n = y$, alors il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|a_n - x| \leq \varepsilon/2$ et $|b_n - y| \leq \varepsilon/2$ pour un choix arbitraire de $\varepsilon > 0$. Du coup

$$|u_n - \ell| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} \leq \varepsilon\,.$$

Donc $\lim u_n = x + iy$.

Enfin supposons que l'on ait convergence vers ℓ et prenons $\varepsilon > 0$ quelconque. On a $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, impliquant ainsi $\lim |u_n| = |\ell|$. ■

Proposition 4.5. — *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. On suppose que, our tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$.*

1. *Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.*
2. *Si $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_n$ aussi*
3. *Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors $(w_n)_n$ aussi.*

Démonstration. — Supposons d'abord $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = m$. Prenons $\varepsilon > 0$. Si n est assez grand, alors $\ell \leq u_n + \varepsilon/2$ et $v_n \leq m + \varepsilon/2$. Du coup, on obtient

$$\ell \leq u_n + \varepsilon/2 \leq v_n + \varepsilon/2 \leq m + \varepsilon\,.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\ell \leq m$.

Si $\lim u_n = +\infty$, alors prenons $\mathrm{M} > 0$ quelconque. Il existe n_0 tel que $u_n \geq \mathrm{M}$ dès que $n \geq n_0$. Du coup obtient $v_n \geq u_n \geq \mathrm{M}$, donc $\lim v_n = +\infty$. Le dernier cas est laissé en exercice. ■

Théorème 4.6 (des gendarmes). — *Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites à valeurs réelles. On suppose que pour tout $n \geq 0$, on ait $u_n \leq w_n \leq v_n$.*

1. *Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite ℓ, alors (w_n) est convergente et* $\lim w_n = \ell$.
2. *Si $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors $(w_n)_n$ aussi*
3. *Si $((u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors $(w_n)_n$ aussi.*

Démonstration. — La convergence de (u_n) et (v_n) vers la limite ℓ implique, pour $\varepsilon > 0$ fixé, un rang à partir duquel $\ell \leq u_n + \varepsilon$ et $\ell \geq v_n - \varepsilon$. Du coup on obtient $\ell \leq w_n + \varepsilon$ et $\ell \geq w_n - \varepsilon$ ce qui signifie $|\ell - w_n| \leq \varepsilon$. Donc $\lim w_n = \ell$. Les autres cas découlent de la proposition précédente. ■

Exemple. — On choisit $w_n = \cos n/n$, pour $n \geq 1$. On a

$$\frac{(-1)}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$$

car $|\cos n| \leq 1$. Donc $\lim w_n = 0$.

Corollaire 4.7. — *SI (u_n) est bornée et $(v_n)_n$ tend vers 0, alors $(u_n v_n)_n$ tend vers zéro.*

Démonstration. — Soit M un majorant de (u_n). On a $0 \leq |u_n v_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$. Or $\lim \mathrm{M}v_n = 0$ donc le théorème des gendarmes s'applique. ■

Une autre formulation serait: si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et (v_n) tend vers zéro, alors (u_n) aussi.

4.3 Opérations sur les suites

Théorème 4.8. — *L'espace des suites convergentes est un espace vectoriel $\mathcal{C}$ et l''application qui à une telle suite associe sa limite est une forme linéaire.*

Démonstration. — Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites ℓ et m respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un scalaire, Pour montrer le théorème, il suffit de vérifier que la suite $(u_n + \lambda v_n)_n$ est convergente de limite $\ell + \lambda m$. On peut donc supposer $\lambda \neq 0$, car sinon, il n'y a rien à faire.

Prenons donc $\varepsilon > 0$ arbitraire. Si n assez grand alors, d'une part, on aura $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ et, d'autre part, on aura $|v_n - m| \leq \varepsilon/(2|\lambda|)$.

Du coup,

$$|(u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda m)| \leq |u_n - \ell| + |\lambda||v_n - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \leq \varepsilon$$

donc $\lim(u_n + \lambda v_n) = \ell + \lambda m$. ■

Proposition 4.9. — *On suppose $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergentes de limite ℓ et m.*

1. *La suite $(u_n v_n)_n$ est convergente et* $\lim u_n v_n = \ell \times m$.
2. *Si $m \neq 0$, alors $(u_n/v_n)_n$ est bien définie pour n assez grand, elle est convergente et* $\lim u_n/v_n = \ell/m$.

Démonstration. — On écrit

$$|u_n v_n - \ell m| \leq |u_n| \cdot |v_n - m| + |m||u_n - \ell| \,.$$

On se rappelle que (u_n) est bornée car convergente, donc il existe $\mathrm{M} > 0$ telle $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout n. Si $m = 0$, alors on a $|u_n v_n| \leq \mathrm{M}|v_n|$ donc le théorème des gendarmes implique $\lim u_n v_n = 0$. Sinon, on choisit $\varepsilon > 0$ est n assez grand de sorte que $|v_n - m| \leq \varepsilon/(2\mathrm{M})$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/(2|m|)$. Il vient

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell m| &\leq |(u_n v_n - u_n m) + (u_n m - m\ell)| \\ &\leq |u_n| \cdot |v_n - m| + |m| \cdot |u_n - \ell| \\ &\leq \mathrm{M}|v_n - m| + |m||u_n - \ell| \leq \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\lim u_n v_n = \ell m$.

Pour le second cas, il suffit de montrer que $(1/v_n)$ est bien définie et convergente de limite $1/m$. Tout d'abord, en prenant $\varepsilon = |m|/2$, on obtient l'existence de n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $|v_n - m| \leq |m|/2$. Du coup, on a $|m| - |v_n| \leq |m|/2$ et $|v_n| \geq |m|/2 > 0$. Cela implique que $(1/v_n)$ est bien définie pour $n \geq n_0$. Enfin, on écrit, pour $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{v_n - m}{m v_n}\right| \leq \frac{|v_n - m|}{|m|^2/2}\,.$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$, si n est choisi suffisamment grand, on aura $|v_n - m| \leq |m|^2\varepsilon/2$ donc

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{|m|^2\varepsilon/2}{|m|^2/2} \leq \varepsilon\,.$$

Cela montre $\lim(1/v_n) = (1/m)$ et donc, $\lim u_n/v_n = \ell/m$. ■

Formes indéterminées. — Dans le contexte des limites, une forme indéterminée concerne une limite de produits ou de quotients dont on ne peut pas donner la limite *a priori* car cela correspondrait à faire des opérations de la forme 1^∞, $0 \times \infty$, $0/0$, ∞/∞ ou encore $+\infty - \infty$.

On rassemble les résultats dans des tables. Pour cela, on considère deux suites (u_n) et (v_n) de limites ℓ et m qui peuvent prendre des valeurs $\pm\infty$ le cas échéant.

Limite de sommes. —

$m \backslash \ell$	$-\infty$	réelle	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
réelle	$-\infty$	$\ell + m$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

$\lim(u_n + v_n)$

Limite de produits. —

$m \backslash \ell$	$-\infty$	réelle négative	0	réelle positive	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
réelle négative	$+\infty$	$\ell \times m$	0	$\ell \times m$	$-\infty$
0	FI	0	0	0	FI
réelle positive	$-\infty$	$\ell \times m$	0	$\ell \times m$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

$\lim(u_n \times v_n)$

Nous donnons quelques exemples classiques qui sont *a priori* des formes indéterminées.

1.

$$\lim \frac{\ln^p n}{n^q} = \begin{cases} \infty & \text{si } q < 0 \text{ ou } q = 0 \text{ et } p > 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \text{ ou } q = 0 \text{ et } p < 0 \end{cases}$$

2.

$$\lim n^p \mathrm{e}^{qn} = \begin{cases} \infty & \text{si } q > 0 \text{ ou } q = 0 \text{ et } p > 0 \\ 0 & \text{si } q < 0 \text{ ou } q = 0 \text{ et } p < 0 \end{cases}$$

3.

$$\lim \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \mathrm{e}^p\,.$$

4.

$$\lim n^{1/n} = 1\,.$$

5.
$$\lim n \sin(1/n) = 1\,.$$
ce qui s'écrit aussi $\sin(1/n) \sim (1/n)$.

6.
$$\lim n \ln(1 + (1/n)) = 1$$
ce que l'on peut écrire sous la forme $\ln(1 + (1/n)) \sim (1/n)$.

Dans le cas de polynômes, on met en facteur le degré le plus haut (on suppose $p > 0$ et $a_p \neq 0$): on écrit donc

$$u_n \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^{p} a_j n^j = a_p n^p \left(1 + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j}{n^{p-j}}\right)\,.$$

Comme $\lim \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j}{n^{p-j}} = 0$, on obtient $u_n \sim a_p n^p$ donc

$$\operatorname{Im} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_d > 0 \\ -\infty & \text{si } a_p < 0 \end{cases}$$

Du coup, si on considère une fraction rationelle

$$u_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j n^j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j n^j}$$

où $p, q > 0$, $a_p, b_q \neq 0$. alors la même astuce nous conduit à

$$u_n = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_j n^j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j n^j} = n^{p-q}\frac{a_p}{a_q} \times \frac{1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_j}{n^{p-j}}}{1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{q-1} \frac{b_j}{n^{q-j}}} \sim n^{p-q}\frac{a_p}{a_q}$$

de sorte que

$$\lim u_n = \lim n^{p-q}\frac{a_p}{b_q} = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > q \text{ et si } a_p \text{ et } b_q \text{ sont de même signe} \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ et si } a_p \text{ et } b_q \text{ sont de signe opposé} \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p < q \end{cases}$$

5 Suites récurrentes

Une suite récurrente est une suite (u_n) dont on calcule un élément en connaissant les précédents. L'exemple typique se présente sous la forme suivante. On se donne une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la valeur u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Du coup, à partir de u_0, on peut calculer u_1, puis u_2, etc.

Les suites récurrentes sont très utiles. Elles servent par exemple à fournir des algorithmes pour trouver des racines de polynômes ou pour approcher des solutions d'équations. On se contente ici de décrire quelques exemples. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

Suites arithmétiques.— Une suite arithmétique est une suite récurrente de la forme suivante: on se donne $a, c \in \mathbb{C}$ et

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = u_n + c\,. \end{cases}$$

On a
$$u_n = a + nc \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0\,.$$

Encore une raison de faire une démonstration par récurrence: on choisit comme hypothèse de récurrence que $u_n = a + nc$. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = a + 0 \times c = a$. Si $u_n = a + nc$ alors
$$u_{n+1} = u_n + c = a + nc + c = a + (n+1)c\,.$$
Donc la formule est établie.

Du coup, on a
$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

Suites géométriques.— Une suite géométrique est une suite récurrente de la fome suivante: on se donne $a, q \in \mathbb{C}$ et
$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{C}, \\ u_{n+1} = q \times u_n\,. \end{cases}$$
On a
$$u_n = aq^n \quad \text{pour tout } n \geq 0\,.$$

Encore une nouvelle raison de faire une démonstration par récurrence: on choisit comme hypothèse de récurrence que $u_n = aq^n$. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = aq^0 = a$. Si $u_n = aq^n$ alors
$$u_{n+1} = qu_n = qaq^n = aq^{n+1}\,.$$
Donc la formule est établie.

Du coup, on a
$$\lim u_n = \begin{cases} \infty & \text{si } |q| > 1 \\ 0 & \text{si } |q| < 1 \\ a & \text{si } q = 1 \end{cases}$$
Si $|q| = 1$, alors la suite est en générale divergente.

Variations des suites récurrentes.— On se donne une suite $(u_n)_n$ définie par u_0 et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Lemme 5.1. — *Supposons f croissante. Si $u_1 > u_0$, alors (u_n) est croissante et si $u_1 < u_0$ alors (u_n) est décroissante. Enfin, si $u_1 = u_0$, alors la suite est constante.*

Démonstration. — On ne traite que le premier cas, laissant les autres en exercice. On procède par récurrence. C'est vrai au rang $n = 0$: on a bien $u_1 > u_0$. Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$. Comme f est croissante, on en déduit $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, autrement dit $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Ceci montre la croissance de la suite. ∎

6 Suites extraites et valeurs d'adhérences

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite, alors une sous-suite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\varphi(k)})_k$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. On dit que $(u_{\varphi(k)})_k$ est une sous-suite extraite de $(u_n)_n$. On écrit aussi $(u_{n_k})_k$, où $n_k = \varphi(k)$. Une formulation équivalente consiste à considérer une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_k$ et de considérer $(u_{n_k})_k$.

On commence par un résultat sans surprise:

Fait 6.1. — *Si $(u_n)_n$ est convergente de limite ℓ, alors toute sous-suite extraite est aussi convergente de limite ℓ.*

Démonstration. — Notons $(u_{n_k})_k$ une sous-suite de (u_n). Comme (u_n) est convergente de limite ℓ, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Comme $(n_k)_k$ est strictement croissante et à valeurs entières, si $k \geq n_0$, alors on a aussi $n_k \geq n_0$, donc $|u_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci montre $\lim u_{n_k} = \ell$ ∎

Le résultat suivant s'avère être beaucoup plus utile qu'il ne semble paraître.

Proposition 6.2. — *Soient (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{C}$. Si, de toute sous-suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers ℓ, alors (u_n) est convergente de limite ℓ.*

Cette proposition signifie que, pour montrer qu'une suite est convergente vers ℓ, il suffit de considérer une sous-suite quelconque, et de montrer que l'on peut en extraire une autre sous-suite qui, elle, sera convergente vers ℓ.

Démonstration. — Par hypothèses, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ convergente vers ℓ. Si $(u_n)_n$ n'est pas convergente vers ℓ, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour chaque $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut trouver $p > n_0$ tel que $|u_p - \ell| \geq \varepsilon_0$.

On construit par récurrence une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $|u_{\varphi(k)} - \ell| \geq \varepsilon_0$. Tout d'abord, on choisit $\varphi(0)$ de sorte que $|u_{\varphi(0)} - \ell| \geq \varepsilon_0$. Si $\varphi(n)$ est construit, on utilise notre hypothèse que (u_n) ne tend pas vers ℓ pour trouver $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ qui vérifie $|u_{\varphi(k+1)} - \ell| \geq \varepsilon_0$. On obtient ainsi la sous-suite $(u_{\varphi(k)})_k$ recherchée. Or, quitte à extraire une sous-suite de cette sous-suite, on peut supposer qu'elle est convergente vers ℓ. Mais cela contredit le fait que jamais ses éléments ne s'approche de ℓ.

Par conséquent, $(u_n)_n$ est convergente et sa limite vaut ℓ. ∎

Voici une autre propriété très importante.

Théorème 6.3 (Bolzano-Weierstrass). — *Soit* $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ *un ensemble borné. Si $(u_n)_n$ est une suite à valeurs dans* E, *alors on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. — Comme E est borné, il existe un réel $\mathrm{M} > 0$ tel que $\mathrm{E} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Nous allons extraire une sous-suite de (u_n) convergente en construisant deux suites adjacentes $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ telles que $a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$. On procède par récurrence en s'assurant de surcroît la propriété que $[a_k, b_k]$ contient une infinité d'éléments de la suite (u_n). On note $\varphi(0) = 0$, $a_0 = -\mathrm{M}$ et $b_0 = \mathrm{M}$. On vérifie qu'il existe une infinité d'indices n (tous en fait!) tels que $u_n \in [a_0, b_0]$.

Supposons $\varphi(k)$, a_k et b_k définis avec les propriétés

1. $a_0 \leq \ldots \leq a_k$;

2. $b_0 \geq \ldots \geq b_k$;

3. $|a_n - b_n| \leq |a_0 - b_0|/2^n$;

4. il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$ et $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$.

Notons $c_k = (1/2)(a_k + b_k)$ de sorte que $a_k < c_k < b_k$. S'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_k, c_k]$ alors on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$. On choisit ensuite le plus petit indice n tel que $n > \varphi(k)$ et $u_n \in [a_k, c_k]$ et on définit $\varphi(k+1) = n$; cet indice existe bien puisqu'on le choisit parmi une infinité. Sinon, comme on a une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_k, b_k]$, on a une infinité d'indices n tels que $u_n \in [c_k, b_k]$. On pose alors $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$, et $\varphi(k+1)$ le premier indice strictement plus grand que $\varphi(k)$ qui est contenu dans $[c_k, b_k]$. On vérifie dans les deux cas les propriétés annoncées: $a_{k+1} \geq a_k$, $b_{k+1} \leq b_k$, $|a_{k+1} - b_{k+1}| = |a_k - b_k|/2 = |a_0 - b_0|/2^{k+1}$, il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ et $u_{\varphi(k+1)} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Le théorème des suites adjacentes implique que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes de même limite et le théorème des gendarmes implique que $(u_{\varphi(k)})_k$ est aussi convergente de même limite. ∎

Valeurs d'adhérence.— Une *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_n$ est un complexe qui s'obtient comme limite d'une sous-suite de $(u_n)_n$. Autrement dit, $v \in \mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si, pour tout $r > 0$, il existe une infinitÕ d'indices n tels que u_n appartienne au disque $\mathrm{D}(v, r)$, c'est-à-dire tels que $|u_n - \ell| < r$.

Le théorème de Bolzano-Weiertrass affirme que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. Une suite convergente n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, cf. le fait 6.1.

Proposition 6.4. — *Une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.*

Si on oublie l'hypothèse d'être bornée, alors la proposition est fausse. Considérer par exemple la suite $(u_n)_n$ tel que $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$.

DÉMONSTRATION. — Soit ℓ l'unique valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$. Si $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite doit être ℓ en vertu du fait 6.1. Nous allons appliquer la proposition 6.2 pour conclure. On se donne donc une sous-suite $(u_{n_k})_k$. Cette sous-suite étant bornée par hypothèse, on peut en extraire une nouvelle sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weiertrass. Sa limite étant une valeur d'adérence de la suite par définition doit être ℓ. Oar conséquent, la proposition 6.2 permet de conclure.■

Exemple.— Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_n = \cos(\sqrt{n})$. Alors, pour tout $p \geq 0$, la suite $(u_{n+p} - u_n)$ tend vers zéro, mais l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est l'intervalle $[-1, 1]$.

On rappelle la formule trigonométrique suivante

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et l'astuce suivante pour $a, b \geq 0$, avec au moins l'un non nul:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\,.$$

Prenons $p \geq 0$, on l'applique

$$|u_{n+p} - u_n| = 2 \left| \sin\left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+p}}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{n+p} - \sqrt{n}}{2}\right) \right|\,.$$

On majore le premier sinus par 1 et on traite le second en se rappelant que $\sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\sqrt{n+p} - \sqrt{n}| = \frac{p}{\sqrt{n} + \sqrt{n+p}} \leq \frac{p}{2\sqrt{n}}\,.$$

Du coup, on obtient

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{p}{2\sqrt{n}}\,.$$

A p fixé, le terme de droite tend vers 0 donc le théorème des gendarmes permet de conclure.

En fait, si on choisit une suite d'entiers naturels (p_n) telle que $p_n = o(\sqrt{n})$ alors $\lim(u_{n+p_n} - u_n) = 0$.

Prenons maintenant $x \in [-1, 1]$ et montrons que x est valeur d'adhérence de la suite. Pour cela, on commence par choisir $\theta \in [0, 2\pi]$ de sorte que $x = \cos\theta$. Nous allons montrer que, pour tout $m > 0$, il existe $n_m, k_m \geq 0$ tels que

$$|\theta + 2k\pi - \sqrt{n}| \leq 1/m\,.$$

Comme la fonction cos est 2π-périodique, on aura $x = \cos\theta = \cos(\theta + 2k_m\pi)$ et

$$|\cos\theta - u_{n_m}| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta + 2k_m\pi + \sqrt{n_m}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta + 2k_m\pi - \sqrt{n_m}}{2}\right) \right| \leq |\theta + 2k_m\pi - \sqrt{n_m}| \leq 1/m\,.$$

Donc la sous-suite $(u_{n_m})_m$ tend vers x.

Tout d'abord, prenons $z > 0$ (grand); on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq z^2 \leq n+1$ de sorte que $\sqrt{n} \leq z \leq \sqrt{n+1}$. Par construction, on a $z^2 - 1 \leq n$ donc $\sqrt{z^2-1} \leq \sqrt{n}$. On trouve ainsi

$$z - \sqrt{n} = \frac{z^2 - n}{z + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{z^2-1}}\,.$$

Donc il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que si on a $z \geq \mathrm{M}$ alors on aura $0 \leq z - \sqrt{n} \leq 1/m$. Du coup, à $\theta \in [0, 2\pi]$, on peut trouver k de sorte que $\theta + 2k\pi \geq \mathrm{M}$, impliquant ainsi l'existence de n tel que $|\theta + 2k\pi - \sqrt{n}| \leq 1/m$. Cela achève la démonstration.