UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE **Agrégation de mathématiques**
Espaces de Lebesgue **2019-20**

Produit de convolution

Exercice 1 Soient $a < b$ et $c < d$ des réels. On note f et g les fonctions caractéristiques des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement. Montrer que $f \star g(x)$ est la mesure de $[x-a, x-b] \cap [c, d]$ et décrire le graphe de $f \star g$ selon que $b - a = d - c$ ou non.

Exercice 2 On suppose que $f \in L^1_{loc}$, $g \in L^p_{loc}$, $1 \leq p \leq \infty$, et f ou g à support compact. Montrer que $f \star g$ existe presque partout et définit un élément de L^p_{loc}.

Exercice 3 Vérifier que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition dans L^1.

Exercice 4 On se place dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $(1/p) + (1/q) = 1$, alors $f \star g$ est continue. Montrer que si $p, q > 1$, alors $f \star g$ tend vers 0 à l'infini.
2. En déduire que si A et B sont de ensembles de mesure strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \text{il existe } (a, b) \in A \times B \text{ tel que } x = a + b\}$$

   contient un intervalle.

Exercice 5 Montrer que si $f \in L^p$, $g \in L^q$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $(1/p) + (1/q) - 1 \geq 1$, alors $f \star g$ est bien défini pp. et $(f \star g) \in L^r$, où r vérifie $(1/r) = (1/p) + (1/q) - 1$.

Exercice 6 On suppose $f \in L^1_{loc}$ et $g \in \mathcal{C}^1$, avec g à support compact, alors $f \star g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \star g) = f \star \frac{\partial}{\partial x_j} g\,.$$

Exercice 7 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g, g' \in L^\infty$. Montrer que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $f \star g'$.

Exercice 8

1. Montrer que la formule

$$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{1 - x^2}\right) \cdot \chi_{]-1,1[}(x)$$

   définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
2. En déduire l'existence, pour chaque $\varepsilon > 0$, d'une fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0, 1]$ à support dans $[-(1+\varepsilon), (1+\varepsilon)]$ qui vaut 1 sur $[-1, 1]$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue intégrable et d'intégrale 1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = n^d f(nx)$$

est une approximation de l'identité.

Exercice 10 Soit (p_n) une approximation de l'identité à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $(f \star p_n)$ tend vers f uniformément sur tout compact.

Exercice 11

1. Démontrer que la suite d'applications numériques $(k_n)_n$ définie par $k_n(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et
$$k_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt}$$
si $|x| \leq 1$ définit une approximation de l'identité que l'on appelle le noyau de Weiertrass. On pourra remarquer que
$$\int_{-1}^1 t(1-t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{n+1}\,.$$
2. (a) Démontrer que si f est une fonction continue à support dans $I = [-1/2, 1/2]$, alors la restriction de $k_n \star f$ à I est un polynôme.
   (b) En déduire le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.

Exercice 12
2 Versions en une seule
Posons, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$,
$$\gamma_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)\,.$$
On admettra dans la suite que $\gamma_t \star \gamma_s = \gamma_{t+s}$ pour tous $t, s > 0$.

1. Montrer que $\gamma_t \star \gamma_s = \gamma_{t+s}$ pour tous $t, s > 0$. On pourra d'abord traiter le cas $d = 1$ en remarquant que γ_t vérifie une équation différentielle du premier ordre pour en déduire le cas général.
2. Montrer que (γ_t) définit une approximation de l'identité quand t tend vers 0.
3. Soient $p \in [1, \infty]$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ définie par $f(x,t) = \gamma_t \star g(x)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. On suppose g uniformément continue et bornée. Vérifier que f est solution de l'équation de la chaleur
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}f - \dfrac{1}{2}\Delta f = 0 & \text{si } t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ f(0,x) = g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Exercice 13 On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ et on pose $p_n(x) = n\varphi(nx)$.

1. Montrer que (p_n) est une approximation de l'identité.
2. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a $f \star p_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que si f est continue et bornée, alors $(f \star p_n)_n$ converge uniformément sur les compacts vers f.

Exercice 14 On considère une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^\infty$ à support compact d'intégrale 1 et on pose $p_n(x) = n\varphi(nx)$.

1. Montrer que (p_n) est une approximation de l'identité.
2. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a $f \star p_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que si f est continue, alors $(f \star p_n)_n$ converge uniformément sur les compacts vers f.