UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE | **Agrégation de mathématiques**
Espaces de Lebesgue | **2019-20**

Polynômes orthogonaux

Soient I un intervalle réel et ρ une fonction intégrable et strictement positive sur I. On note $d\mu(x) = \rho(x)dx$ et on considère $L^2(I,\mu)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_I fg d\mu = \int_I fg\rho dx\,.$$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré au plus n. Une suite de polynômes orthogonaux (P_n) est une suite de polynômes, orthogonale pour le produit scalaire, telle que P_n est de degré n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1 Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux. On écrit $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ si $n \geq 1$; on pose $P_0 = a_0$ et $b_0 = 0$. Enfin, on écrit $\lambda_n = \|P_n\|_2^2$.

1. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que, pour $n \geq 1$, il existe (α_n, β_n) que l'on déterminera tel que le degré de $P_{n+1} - A_n P_n$ est au plus $n-1$, où $A_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$. En déduire qu'il existe γ_n (à déterminer) tel que
$$P_{n+1} = A_n P_n - \gamma_n P_{n-1}\,.$$
On étendra cette formule à $n = 0$.

Exercice 2 Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux et soit $p_n : L^2(I,\mu) \to \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale.

1. Montrer qu'il existe $K_n : I \times I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $f \in L^2(I,\mu)$, on ait
$$p_n(f)(x) = \int K_n(x,y) f(y) d\mu(y)\,.$$
2. Montrer que
$$K_n(x,y) = \frac{a_n}{a_{n+1}\lambda_n}\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$
et en déduire
$$K_n(x,x) = \frac{a_n}{a_{n+1}\lambda_n}\,(P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$
3. Notons $S_n = \mathbb{R}_n[X] \cap \{f \in L^2(I,\mu),\ \|f\| = 1\}$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\sup\{|P(\xi)|,\ P \in S_n\} = |K_n(\xi,\xi)|^{1/2}$$
et cette borne supérieure est atteinte pour $P(x) = K_n(x,\xi)|K_n(\xi,\xi)|^{-1/2}$.

Exercice 3 Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux unitaires. Soient $z_1^n, \ldots, z_k^n$, $0 \leq k \leq n$, les racines de P_n dans I comptées avec multiplicité et notons $Q_n(x) = \prod_{1ej\leq k}(x - z_j^n)$.

1. Montrer que $Q_n P_n$ est de signe constant sur I. En étudiant $\langle P_n, Q_n\rangle$, montrer que $k = n$.
2. Montrer que les racines de P_n sont simples.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$, on a $P'_{n+1}(x)P_n(x) > P_{n+1}(x)P'_n(x)$, pour en déduire que $P'_{n+1}(z_j^{n+1})$ et $P_n(z_j^{n+1})$ ont même signe, si bien que $(-1)^{n+1-j}P_n(z_j^{n+1}) > 0$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. En déduire que les racines sont entrelacées :
$$z_1^{n+1} < z_1^n < z_2^{n+1} < z_2^n < \ldots < z_n^n < z_{n+1}^{n+1}\,.$$

4. Soit P un polynôme de degré $k \geq n$, et notons L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $L_n(z_j^n) = P(z_j^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

   (a) Montrer que
$$L_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} P(z_k^n) \frac{P_n(x)}{P_n'(z_k^n)(x - z_k^n)} .$$

   (b) Montrer que P_n divise $(P - L_n)$ et en déduire l'existence de réels $r_1, \ldots, r_n$ à déterminer tels que
$$\int P(x) d\mu(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} r_j P(z_j^n)$$
   pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Exercice 4 On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int e^{\alpha|x|} d\mu(x) < \infty$.

1. Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset L^2(I, \mu)$.
2. Montrer que, pour toute suite $(k_n)_{n \geq 0}$ de réels non nuls, il existe une unique suite de polynômes orthogonaux (P_n) telle que le coefficient dominant de P_n soit exactement k_n.
3. Montrer qu'il existe une suite de polynômes orthonormées $(Q_n)_n$.
4. Montrer que $(Q_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \mu)$. On pourra se contenter du cas I borné (si I est non borné, utiliser la transformation de Fourier).

Exercice 5 Soient $Q(x) = a_Q(x - \alpha)(\beta - x)$ un polynôme quadratique et $L(x) = b_Q(x - \gamma)$ un polynôme affine tels que $\alpha < \gamma < \beta$ et $a_Q b_Q < 0$. On note $I =]\alpha, \beta[$. On s'intéresse aux solutions polynomiales de l'équation différentielle
$$Q(x) f''(x) + L(x) f'(x) + \lambda f(x) = 0 .$$
On introduit l'endomorphisme $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = -(QP'' + LP')$.

On note
$$R(x) = \exp\left(\int_\gamma^x \frac{L(t)}{Q(t)} dt\right), \quad \rho(x) = \frac{R(x)}{|Q(x)|} \quad \text{et} \quad d\mu(x) = \rho(x) dx .$$

1. Montrer que $\rho > 0$ sur I et $\rho \in L^1(I)$; vérifier que $\mathbb{R}[X] \subset L^2(I, \mu)$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que les vecteurs propres de u coïncident avec les solutions de l'équation différentielle.
4. (a) Montrer que u est auto-adjoint dans $L^2(I, \mu) \cap \mathbb{R}[X]$. On pourra commencer par vérifier que
$$u(P) = -\frac{1}{\rho}(RP')' .$$
   (b) En déduire que $\mathbb{R}[X]$ admet une base (P_n) de vecteurs propres de u.
5. (a) Montrer que
$$u(P_n) = n\left(\frac{1-n}{2} Q'' - L'\right) P_n .$$
   (b) En déduire que (P_n) est une suite de polynômes orthogonaux de $L^2(I, \mu)$.
6. Montrer que
$$Q_n(x) = \frac{1}{\rho} \frac{d^n}{dx^n}(\rho Q^n)$$
   est un polynôme de degré n pour tout $n \geq 0$ et que $(Q_n)_n$ forme une suite de polynômes orthogonaux.